ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

მეხუთე ყოველწლიური კონფერენცია

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში

SENS 2017

დოქტორანტის კოლოქვიუმი

თემა: ჰოლონომური კვანძების ჰოლონომური პარამეტრიზაცია

დოქტორანტი ვიოლეტა აფხაზავა

მიმართულება: კომპიუტერული მეცნიერებები

ხელმძღვანელი: კომპიუტერულ მეცნიერებათა დოქტორი,

პროფესორი ალექსანდრე გამყრელიძე

თბილისი, 2017

სარჩევი

Contents

აბსტრაქტი

წინამდებარე ნაშრომი შესრულებულია დოქტორანტურის სავალდებულო კომპონენტის დოქტორანტის კოლოქვიუმის შესაბამისად.

სტატიაში განხილულია ჰოლონომური კვანძების ჰოლონომური პარამეტრიზაციის საკითხები. თემას საფუძვლად უდევს კვანძთა მათემატიკურ თეორია, რომელიც სათავეს იღებს გაუსის შრომებიდან. შემდგომში რაიდემაისტერმა შემოიღო კვანძების ე. წ. AFL აღწერა, რომლიც განავითარა ჰოტცმა. 1997 წელს ვასილიევმა წარადგინა კვანძების ჰოლონომური პარამეტრიზაცია და დაამტკიცა, რომ ყოველი სახის კვანძს გააჩნია ჰოლონომური პარამეტრიზაცია.

წარმოდგენილ ნაშრომში განხილულია ჰოლონომური პარამეტრიზაციის კონკრეტული ფუნქცია, შესწავლილია მისი თვისებები, დამუშავებულია მთლიანი წირის ფუნქციით აღწერის ალგორითმი და ნაჩვენებია მიღებული წირის ჰოლონომურობა.

გასაღები სიტყვები: კვანძები, ჰოლონომური პარამეტრიზაცია, ტოპოლოგიის ალგორითმები

Key–Words: Knots, holonomic parametrizations, AFL-representation of knots

შესავალი

კვანძს ვუწოდებთ სამგანზომილებიან სივრცეში მდებარე წირს, რომლის ბოლოებიც შეერთებულია. დასაშვებია კვანძის დეფორმაცია გაწყვეტის გარეშე (იზოტოპია) – არ დაიშვება წირის გაჭრა და თავიდან შეწებება არცერთ წერტილში.

კვანძთა მათემატიკურ თეორიას საფუძველი დაუდო გაუსმა, რომელმაც 1833 წელს გამოთვალა ე. წ. გაუსის ბმის ინტეგრალი ორი კვანძის ბმულობის რიცხვის დასადგენად. მისმა მოსწავლემ იოჰან ბენედიქტ ლისტინგმა განაგრძო ეს თეორია. ასევე კვანძებით იყვნენ დაინტერესებული ლორდი კელვინი, პუანკარე, დენი.

კვანძთა თეორიით ინტერესდებოდნენ არა მხოლოდ მათემატიკოსები, დიდი წვლილი მიუძღვით ფიზიკოსებსაც, დაწყებული ლორდ კელვინიდან, დასრულებული ედვარდ ვიტენით, რომელმაც შემოიტანა ახალი ცნება – ტოპოლოგიური კვანტური ველის თეორია.

კვანძთა თეორია განიხილება სხვა საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებშიც: გენეტიკაში დნმ მოლეკულების ძაფების ჩაჭიდებასთან დაკავშირებით, ჰიდროდინამიკაში, კვანძების წარმომქმნელ მდგრად ქარბუქებთან დაკავშირებით, ფერომაგნეტიზმში, მაგნიტური ველების გაკვანძულ ნაკადებთან დაკავშირებით.

ამრიგად, ეს მათემატიკური თეორია ხელს უწყობს ახალი მიმართულებების წარმოშობას არამათემატიკურ მეცნიერებებშიც.

XX საუკუნეში ოთხი ფილდსის პრემია გაიცა კვანძთა თეორიაში გაკეთებული აღმოჩენებისათვის (ვიტენი, ჯონსი, დრინფელდი, კონცევიჩი). კვანძების ამოცნობის პრობლემა ნაწილობრივ არის ამოხსნილი – მისი ალგორითმი არსებობს, მაგრამ საკმაოდ რთულია და კომპიუტერზე არარეალიზებადი (Haken's algorithm, Friedholm Waldhausen)

მათემატიკური თვალსაზრისით, კვანძი წარმოადგენს წრეწირის უწყვეტ ასახვას ევკლიდურ სივრცეში:

$$f: S^1 \to R^3, \quad S^1 \subset R^2 \qquad (1)$$

ისმის ბუნებრივი კითხვა (კვანძთა თეორიის მთავარი საკითხი): როგორ გავიგოთ, ორი კვანძი იზოტოპურია თუ არა? სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, შეიძლება თუ არა ერთი კვანძის უწყვეტად დეფორმირება სასრული რაოდენობის მოძრაობებით ისე, რომ მივიღოთ მეორე კვანძი. ამ კითხვის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს კვანძის ტრივიალურობის დადგენა, ანუ მოცემული კვანძი არის თუ არა ტრივიალურის იზოტოპური (შეიძლება თუ არა კვანძის "გახსნა")?

სანამ ვეცდებით კვანძების გახსნას, ჯერ წარმოვადგინოთ ისინი თვალსაჩინო ფორმით. ამისათვის ვიყენებთ **ბრტყელ დიაგრამებს** – R^3-ში მოცემული კვანძის ისეთ გეგმილს OXY სიბრტყეზე, სადაც შტოების ურთიერთკვეთისას "ზემოდან" და "ქვემოდან" კვეთები გათვალისწინებულია. "ზემოდან" ნიშნავს, რომ შტოს შესაბამისი Z კოორდინატი მეტია, "ქვემოდან" – ნაკლებია.

გაუსის მტკიცებით, ნებისმიერი კვანძი შეიძლება დავაგეგმილოთ სიბრტყეზე ისე, რომ იგი წარმოდგეს ორი არათვითგადამკვეთი ნაწილის სახით. ეს წარმოდგენა მოგვიანებით რაიდემაისტერმა შეცვალა ე. წ. AFL სახით, ანუ წირის ერთი ნაწილი განიხილა როგორც სწორი ხაზი, ხოლო მეორე – მასზე დახვეული ძაფი, შემდეგ ეს სწორი ხაზი ასწია R^3-ში ისე, რომ მას შეექმნა თაღები (ARCADE), როგორც სიბრტყის "ზედა" და "ქვედა" ზედაპირების ალტერნატივა, ხოლო ძაფი (FADEN) დატოვა სიბრტყეზე, როგორც ამ თაღებს შორის გამავალი. ამ წარმოდგენას ეწოდება ARCADE FADEN LAGEN - AFL

ამ იდეაზე დაყრდნობით, ჰოტცმა დაამტკიცა, რომ ყოველი კვანძი წარმოქმნის მოცემულ ანბანზე მინიმალური სიტყვების უნიკალურ სიმრავლეს (კვანძის ყოველი AFL წარმოდგენისათვის არსებობს ერთადერთი მინიმალური სიტყვა). რადგანაც ერთი კვანძისთვის შეიძლება არსებობდეს განსხვავებული AFL წარმოდგენები, ყოველი კვანძი წარმოქმნის მინიმალური სიტყვების უნიკალურ სიმრავლეს. თუ ორი K_1 და K_2 კვანძი წარმოქმნის მინიმალური სიტყვების ორ S_1 და S_2 სიმრავლეს, მაშინ K_1 და K_2 კვანძები ერთმანეთის ექვივალენტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ S_1 და S_2 სიმრავლეებს გააჩნიათ საერთო მინიმალური სიტყვა (საერთო AFL წარმოდგენა).

მოგვიანებით, 1990-იანებში, ვასილიევმა შემოიღო ცნება – კვანძების ჰოლონომური პარამეტრიზაცია პერიოდული f ფუნქციის მეშვეობით, სადაც ასახვა $f^{\sim} = \left(-f(t), f'(t), -f''(t)\right)$ იძლევა კვანძის პარამეტრიზაციას დეკარტის კოორდინატებში. მან აჩვენა, რომ ყოველი K კვანძისათვის არსებობს მისი ექვივალენტური K' კვანძი ჰოლონომური პარამეტრიზაციით. უფრო ზუსტად, მან დაამტკიცა, რომ კვანძთა ყოველ კლასს (კვანძთა ტოპოლოგიურად იზოტოპურ კლასს) გააჩნია ჰოლონომური წარმოდგენა და აგრეთვე არსებობს ნატურალური იზომორფიზმი ტოპოლოგიური კვანძების სასრული ტიპის ინვარიანტებიდან ჰოლონომური კვანძების სასრული ტიპის ინვარიანტებში.

ბირმანმა და ვრინკლემ დაამტკიცეს, რომ ორი ჰოლონომური კვანძი, რომელიც ტოპოლოგიურად იზოტოპურია, სინამდვილეში ჰოლონომურადაც იზოტოპურია. კომბინატორული თვალსაზრისით ეს ნიშნავს, რომ ჰოლონომური კვანძების ჰოლონომური იზოტოპიით კლასიფიკაცია ამ კვანძების დიაგრამების იზოტოპიით კლასიფიკაციის იდენტურია. (კვანძის დიაგრამის იზოტოპია განიხილება, როგორც ბრტყელი იზოტოპიებისა და რაიდემაისტერის მოძრაობების მიმდევრობა).

წინამდებარე ნაშრომში განხილულია კვანძის AFL სახით წარმოდგენის ჰოლონომურ სახეზე გადაყვანის ალგორითმი, წარმოდგენილია ჰოლონომური წირის აღწერის იდეა – რკალების სათითაოდ მოცემა კონკრეტული მარტივი ფუნქციით და მთლიანი კვანძის აღწერა ამ ფუნქციების ინტერპოლაციის გზით, განხილულია აღმწერი ფუნქციის თვისებები და მოცემულია ფუნქციის კონკრეტული სახე. ყოველივე ამის საფუძველზე მუშავდება პროგრამული პაკეტი.

ამოცანის დასმა

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ყოველი კვანძი წარმოქმნის მინიმალური სიტყვების უნიკალურ სიმრავლეს მოცემულ ანბანზე. ჩვენი მიზანია, მოცემული AFL წარმოდგენის შესაბამისი სიტყვა გარდავქმნათ ისე, რომ მიღებული სიტყვა შეესაბამებოდეს კვანძის ჰოლონომურ სახეს და მოვახდინოთ შესაბამისი წირის ჰოლონომური პარამეტრიზაცია, რაც ნიშნავს შემდეგს:

ვთქვათ, $f\colon[0,2\pi) \to R \ \in \ \boldsymbol{C}^{\infty}$ არის $\boldsymbol{C}^{\infty}$ კლასის 2π-პერიოდული ფუნქცია. $S^1 \subset R^3$ არის წრეწირი სამგანზომილებიან სივრცეში. f ფუნქცია განსაზღვრავს $f^{\sim}\colon S^1 \to R^3$ ასახვას შემდეგნაირად:

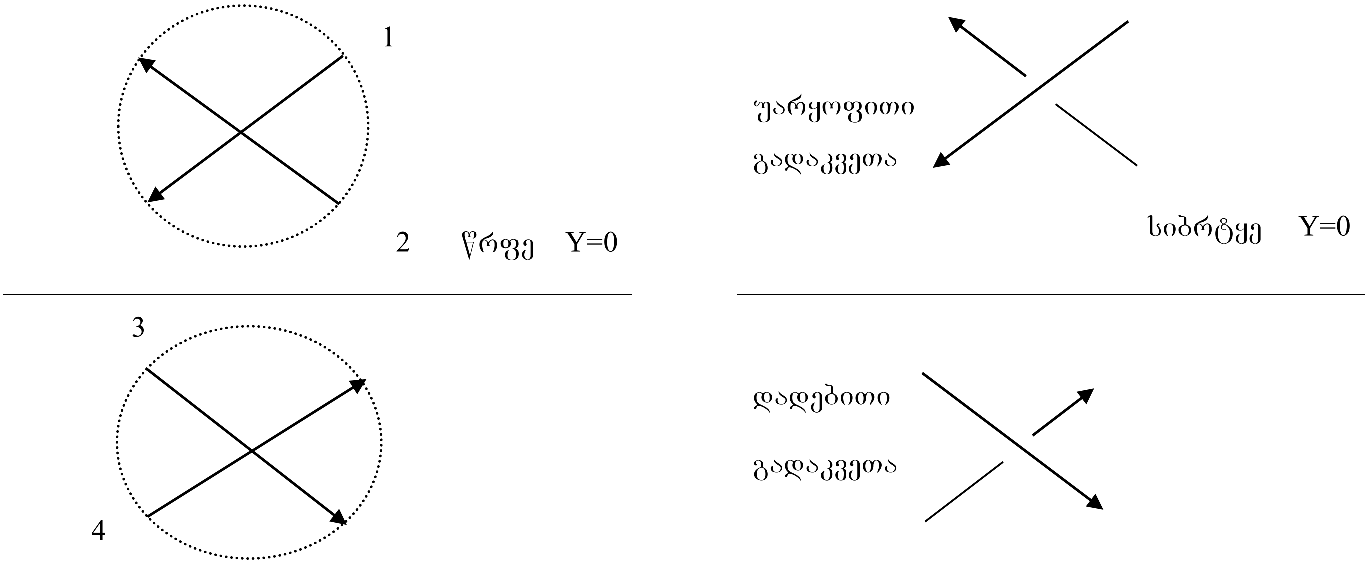
$$f^{\sim} = \left(-f(t),\, f'(t),\, -f''(t)\right) \qquad (2)$$

თუ f ფუნქცია ისეა შერჩეული, რომ:

1. $\nexists\, t_1,\, t_2 \in [0,T), \quad t_1 \neq t_2, \ (-f(t_1), f'(t_1), -f''(t_1)) = (-f(t_2), f'(t_2), -f''(t_2)).$ (3)
2. *თუ* $(-f(t_1), f'(t_1)) = \left(-f(t_2), f'(t_2)\right) \Rightarrow f'(t_1) \neq 0$ *მაშინ* $f'(t_1) \neq 0.$ (4)
3. $\nexists\, t_1,\, t_2, t_3 \in [0,T),\ t_1 \neq t_2 \neq t_3,\ \mid \left(-f(t_1), f'(t_1)\right) = \left(-f(t_2), f'(t_2)\right) = \left(-f(t_3), f'(t_3)\right)$ (5)

იტყვიან, რომ წირი აღწერილია ჰოლონომურად.

ამ თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ ჰოლონომური წირი ორიენტირებულია საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგოდ, ერთ წერტილში არ იკვეთება წირის სამი ან მეტი შტო, ხოლო წირის გადაკვეთები Y>0 ნახევარსიბრტყეზე არის უარყოფითი, Y<0 ნახევარსიბრტყეზე – დადებითი.



1 (ა) 1 (ბ)

ნახ. 1. გადაკვეთის ნიშნის განსაზღვრა: (ა) ნახაზი გვიჩვენებს პროექტირებულ სახეებს X სიბრტყეზე, (ბ) ნახაზზე ისინი მოცემულია 3-განზომილებიან სივრცეში.

AFL სიტყვა ჩაწერილია გარკვეულ ანბანზე, კერძოდ, იგი წარმოადგენს n ცალი C_i^e სახის სიმბოლოთა მიმდევრობას, სადაც $C \in \{S,T\}$, $e \in \{+1,-1\}$, i=1. . .n. S ნიშნავს, რომ წირის შტო გადადის სხვა შტოს ზემოდან, T – გადადის ქვემოდან, $+1$ – წირის შტო აღმავალია, -1 – წირის შტო დაღმავალი, i არის წირის გასწვრივ კვეთის რიგითი ნომერი. ამ პრინციპით, სამყურა ჩაიწერება შემდეგნაირად: $T_1^{-1}S_2^{+1}T_3^{-1}$. რაც შეეხება ჰოლონომური კვანძის ჩანაწერს, მის შესაბამის სიტყვაში უნდა იყოს მხოლოდ S_i^{-1} და T_i^{+1} სიმბოლოები, ანუ გვაქვს ამოცანა:

$$Input: \{C_i^e | C = S,T,\ \ e = +1,-1,\ i = 1 \dots m\} \quad (6)$$

$$Output: \{C_i |\ C = S^{-1}, T^{+1}, i = 1 \dots n\ \} \quad (7)$$

სიმარტივისათვის ჰოლონომურად აღწერილ კვანძში შეიძლება S^{-1} S-თან და T^{+1} T-სთან გავაიგივოთ და გვექნება შემდეგი ჩანაწერი:

$$Output: \{C_i |\ C = S,T, \quad\ \ i = 1 \dots n\ \} \quad (8)$$

მიღებული სიტყვის შესაბამისი მონაცემთა სტრუქტურა არის კვანძების მასივი (ან ბმული სია), სადაც ყოველი კვანძი შეგვიძლია ცალკე კლასის (სტრუქტურის) სახით განვიხილოთ:

```
class  node = {          int  i,    i=0,…n-1,          (9)
                         int  j,    j=0,…n-1,
                         char c,   c=S, T
                 }
```

თავდაპირველ AFL წირში შეიძლება იყოს არაჰოლონომური გადასვლები (საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო) და/ან კვეთები (Y>0 ნახევარსიბრტყეზე – უარყოფითი, Y<0 ნახევარსიბრტყეზე – დადებითი). [1] სტატიაში განხილული ალგორითმის შესაბამისად საწყის კვანძში ჯერ გარდავქმნით არაჰოლონომურ გადასვლებს, შემდეგ კი – არაჰოლონომურ კვეთებს. თუ არაჰოლონომური მხოლოდ გადასვლებია, მაშინ მხოლოდ FADEN ნაწილის გარდაქმნა იქნება საჭირო, თუ არაჰოლონომური კვეთებიც გვაქვს, მაშინ გარდაიქმნება ARCADE ნაწილიც.

i არის სიტყვის მარცხნიდან მარჯვნივ წაკითხვისას კვეთის რიგითი ნომერი (S/T სიმბოლოსი)

j არის სიტყვაში კვეთაზე გადასვლის რიგი.

მაგალითად, სამყურას ჩანაწერში:

$$Input = S_0^{-1}T_1^{+1}S_2^{-1}$$

$$Output = S_5\, S_1 S_3 T_2 T_0 T_4$$

$$i = \{0,1,2,3,4,5\}$$

$$j = \{5,1,3,2,0,4\}$$

ეს ჩანაწერი შეესაბამება კვეთების (FADEN და ARCADE ნაწილების) ნუმერაციას, წირის ერთგვარ აბსტრაქციას. $AFL \rightarrow Holonomic$ ალგორითმი ადგენს წირის ასეთ აბსტრაქტულ ჩანაწერს და იგი ასახავს წირის კვეთების მიმდევრობას, რაც მთლიანად აღწერს წირს. წირის ფუნქციის მეშვეობით აღწერისათვის საჭიროა კოორდინატების შესაბამება, რასაც მოგვიანებით შევეხებით.

ვთქვათ, თავდაპირველ AFL წირში გვაქვს არაჰოლონომური კვეთებიც. k არის FADEN-ის გარდაქმნის შედეგად დარჩენილი არაჰოლონომური კვეთების რაოდენობა, რომლებიც ARCADE-ს გარდაქმნით ჰოლონომურდება და მიიღება 2k+1 ცალი რკალი, ამიტომ Output სიტყვაში კვეთები (რკალები) შეგვიძლია დავყოთ შემდეგნაირად:

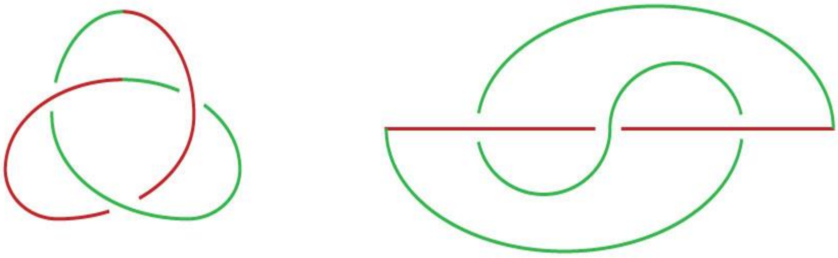
$j=0,\ldots n-1-(2k+1)$ - FADEN

$j=n-1-2k,\ldots n-1$ - ARCADE

AFL წირების გარდაქმნა ჰოლონომურ სახეზე

($AFL \rightarrow Holonomic$ ალგორითმი)

როგორც უკვე ვთქვით, AFL სიტყვა ჩაწერილია გარკვეულ ანბანზე, კერძოდ, იგი წარმოადგენს n ცალი C_i^e სახის სიმბოლოთა მიმდევრობას, სადაც $C \in \{S,T\}$, $e \in \{+1,-1\}$, $i=1..n$. სადაც S ნიშნავს, რომ წირის შტო გადადის სხვა შტოს ზემოდან, T – გადადის ქვემოდან, $+1$ – წირის შტო აღმავალია, -1 – წირის შტო დაღმავალი, i არის წირის გასწვრივ კვეთის რიგითი ნომერი. ამ პრინციპით, სამყურა ჩაიწერება შემდეგნაირად: $T_1^{-1}S_2^{+1}T_3^{-1}$



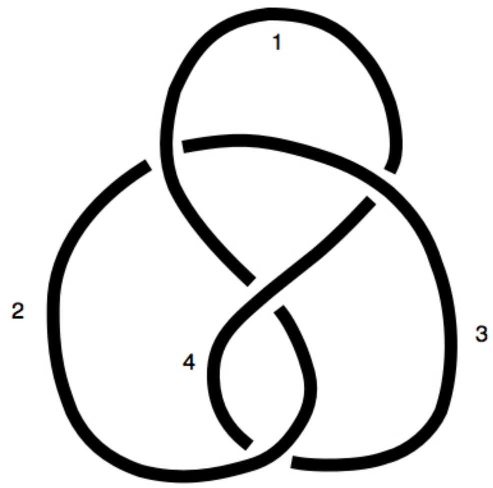
ნახ. 2. სამყურა და მისი AFL წარმოდგენა

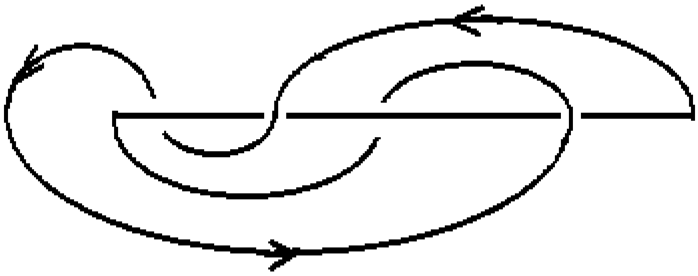
ვასილიევის მიერ დამტკიცებული თეორემის შესაბამისად, ყოველი K კვანძს შეესაბამება მისი იზოტოპური K' კვანძი, ჰოლონომური პარამეტრიზაციით. ასევე, ორი ჰოლონომური კვანძი, რომლებიც ტოპოლოგიურად იზოტოპურია, არის ჰოლონომურად იზოტოპურიც, რაც იმას ნიშნავს, რომ ჰოლონომური კვანძების ჰოლონომური იზოტოპია მათი დიაგრამების იზოტოპური კლასიფიკაციის იდენტურია (კვანძების დიაგრამების იზოტოპია განისაზღვრება, როგორც პლანარული იზოტოპიებისა და რაიდემაისტერის მოძრაობების სასრული მიმდევრობა).

გაუსისა და რაიდემაისტერის შრომების თანახმად, ნებისმიერი ჩაკეტილი წირი შეიძლება, წარმოდგენილ იქნეს ორი არათვითგადამკვეთი ნაწილის გაერთიანების სახით. ამ ნაწილებიდან ერთ-ერთს თუ განვიხილავთ თაღის სახით (ARCADE), მეორე შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც მასზე დახვეული ძაფი (FADEN). FADEN ნაწილის მოძრაობის ორიენტაცია განსაზღვრავს ზოგადად AFL-ის ორიენტაციას. თუ FADEN წირი (t-ს ზრდასთან ერთად) მუდმივად საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგოდ მოძრაობს, შესაბამისად, ARCADE ნაწილიც t-ს ზრდასთან ერთად) მუდმივად საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგოდ იქნება მიმართული და წირი მთლიანად აკმაყოფილებს ჰოლონომურობის ერთ-ერთ თვისებას. ამ წარმოდგენაში FADEN (არათვითგადამკვეთი) კვეთს ARCADE-ს რაღაც წერტილებში, რომლებსაც ვიყენებთ AFL სიტყვის ჩასაწერად.

AFL ჩანაწერში კვეთების მიმდევრობა შეიძლება ისეთი იყოს, რომ i წერტილიდან $i+1$ წერტილზე პირდაპირ გადასვლა FADEN-ის თვითგადაკვეთას იწვევდეს, ამ შემთხვევაში FADEN

აკეთებს ზედმეტ რკალს, რომელიც ცდება ARCADE-ს, რათა თვითკვეთა იქნას თავიდან აცილებული.





ნახ. 3. რვიანი კვანძი და მისი AFL წარმოდგენა

ბირმანისა და ვრინკლეს მიერ ნაჩვენები იქნა, რომ ორი ჰოლონომური კვანძი, რომელიც ტოპოლოგიურად იზოტოპურია, ჰოლონომურადაც იზოტოპურია. ეს ნიშნავს, რომ ჰოლონომური კვანძების ჰოლონომური კლასიფიკაცია იდენტურია ამ კვანძების დიაგრამების იზოტოპური კლასიფიკაციის. ამდენად, მხოლოდ ჰოლონომური კვანძების განხილვა იძლევა წირების ფართო კლასის ნაცვლად გაცილებით ვიწრო კლასის განხილვის საშუალებას.

განვიხილოთ შემომავალი AFL სიტყვა. თუ AFL-ში ყველა გადასვლა და კვეთა იქნება ჰოლონომური, იგი შეესაბამისება ტრივიალურ კვანძს ანუ წრეწირს, ამიტომ აპრიორი ჩავთვალოთ, რომ AFL-ში აუცილებლად არსებობს არაჰოლონომური გადასვლები ან/და არაჰოლონომური კვეთები. მის ჰოლონომურად გადასაქცევად ვიქცევით შემდეგნაირად:

1. თავიდან პირობითად ვუშვებთ, რომ ARCADE არის სწორი ხაზი, რომელიც დევს აბსცისთა ღერძზე. ამ პირობას ვიყენებთ FADEN-ის შედარებით ადვილად გარდასაქმნელად.

2. ვამატებთ “კიდურა” კვანძებს, ანუ იმ წერტილებს, სადაც FADEN გადადის ARCADE-ში. თუ AFL ჩანაწერში კვანძები ისეა განლაგებული, რომ “კიდურა” კვანძების ჩამატების შემთხვევაში FADEN თვითგადამკვეთი გამოდის, AFL-ის კონსტრუირებისათვის ვიქცევით შემდეგნაირად: რკალში, რომელიც გადაკვეთს მასზე ადრე გავლებულ რკალს, საწყისი *i* წერტილის შემდეგ

ვამატებთ ARCADE-ს გარეთ ახალ წერტილს იმის გათვალისწინებით, თუ რომელ მხარესაა AFL -ის საბოლოო წერტილი – i-ს მარცხნივ თუ მარჯვნივ, და აქედან გადავდივართ რკალის საბოლოო $i+1$ წერტილზე, რომელიც გადაინომრება და გახდება $i+2$. შესაბამისად გადაინომრება მომდევნო წერტილებიც. (O(n)).

3. ვადგენთ არაჰოლონომური გადასვლების მქონე რკალების (ARCADE-ს ზემოთ მარჯვნივ მიმართული, ARCADE-ს ქვემოთ მარცხნივ მიმართული) არსებობას. თუ ასეთი არ არის, გადავდივართ კვეთების ჰოლონომურობის შემოწმებაზე (პ. 6) (O(n)).

4. ჰოლონომური გადასვლების გარდასაქმნელად ვიქცევით შემდეგნაირად :

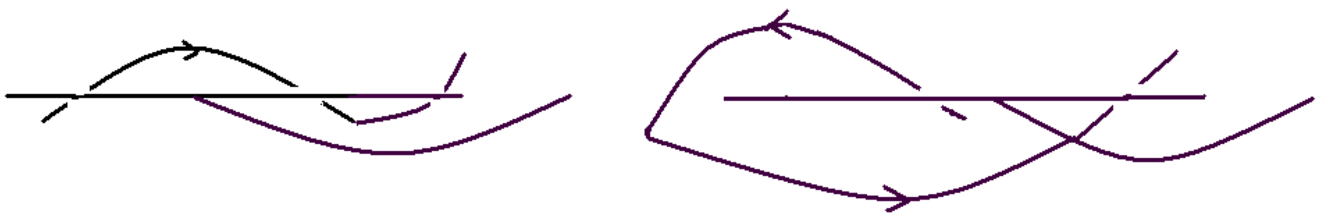
ა. თუ შემოსულ სიტყვაში არაჰოლონომური გადასვლა რაიდემაისტერის პირველი მოძრაობის შესაბამისია, მას იქვე გადავანაცვლებთ: (O(n)).

ა

ბ

ნახ. 4ა, 4ბ. რაიდემაისტერის I მოძრაობა

ბ. თუ რომელიმე კვანძის შესაბამისი კვეთაც და გადასვლაც არაჰოლონომურია, ეს კვანძი შეგვიძლია “გავიტანოთ” ARCADE-ს გარეთ ჰოლონომურობის გათვალისწინებით (შესაბამისად მარცხნივ ან მარჯვნივ). (O(n)).



ნახ. 5. ერთდროულად არაჰოლონომური გადასვლისა და კვეთის გარდაქმნა

გ. დანარჩენი არაჰოლონომური გადასვლების ჰოლონომურად გარდასაქმნელად გამოვყოფთ ცალ-ცალკე მარჯვნივ და მარცხნივ გადასვლებს. ვიწყებთ უკიდურესად მარჯვნივ მდებარე საბოლოო წერტილის მქონე რკალით, რკალის დასაწყისიდან გადავდივართ მარცხნივ, ვამატებთ ახალ (S^{-1}) წერტილს ARCADE-ს გარეთ (ვაგრძელებთ წარმოსახვით ხაზს), ვკვეთთ

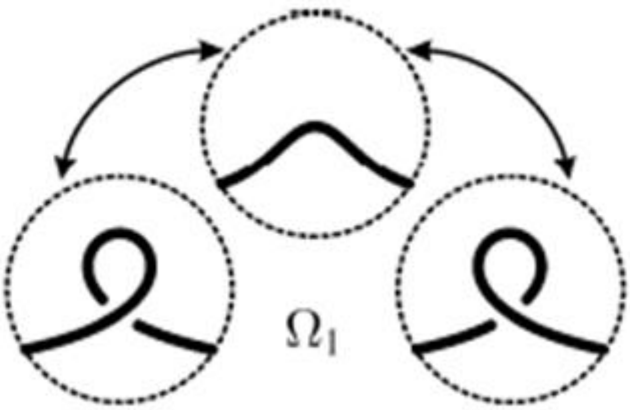
და "ვუხვევთ" მარჯვნივ, ვამატებთ რკალის საბოლოო წერტილის უშუალოდ გვერდით მარჯვნივ ახალ T^{+1} წერტილს და გადავდივართ თავდაპირველი რკალის საბოლოო წერტილში (↓). ასე ვიქცევით ყველა არაჰოლონომური მარჯვნივ გადასვლის გასაჰოლონომურებლად. (O(n)).

დ. ანალოგიურად ვიქცევით არაჰოლონომური მარცხნივ გადასვლების შემთხვევაშიც: ვიწყებთ უკიდურესად მარცხნივ მდებარე საბოლოო წერტილის მქონე რკალით, რკალის დასაწყისიდან გადავდივართ მარჯვნივ, ვამატებთ ახალ (T^{+1}) წერტილს ARCADE-ს გარეთ (ვაგრძელებთ წარმოსახვით ხაზს), ვკვეთთ და "ვუხვევთ" მარცხნივ, ვამატებთ რკალის საბოლოო წერტილის უშუალოდ გვერდით მარცხნივ ახალ S^{-1} წერტილს და გადავდივართ თავდაპირველი რკალის საბოლოო წერტილში (↑). ასე ვიქცევით ყველა არაჰოლონომური მარცხნივ გადასვლის გასაჰოლონომურებლად. (O(n)).

ე. მთლიანობაში AFL-ს შეიძლება დააკლდეს ერთი ან რამდენიმე კვეთა, მაგრამ დაემატება FADEN-ის თვითგადამკვეთი ერთი ან რამდენიმე კვეთა, თუმცა ეს გადასვლები შეესაბამება რაიდემაისტერის მოძრაობებს და არ არღვევს თავდაპირველი AFL-ის ტოპოლოგიას.

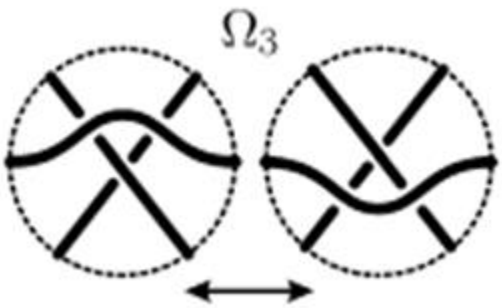
5. მე-4 პუნქტში აღწერილი გარდაქმნების შემდეგ ვამოწმებთ, ხომ არ გაჩნდა "ზედმეტი" რკალები, ანუ ისეთი, რომლებიც ARCADE-ს არ კვეთს და მუდმივად ერთ-ერთ ნახევარსიბრტყეშია განლაგებული. ასეთი ნაწილების მოსაშორებლად ვამოწმებთ შემდეგ პირობებს:

ა. ვეძებთ გვერდიგვერდ განლაგებულ ერთნაირი კვეთის (S ან T) მქონე რკალებს და "ვხსნით" (რაიდემაისტერის პირველი მოძრაობა, ნახ. 6); (O(n)).



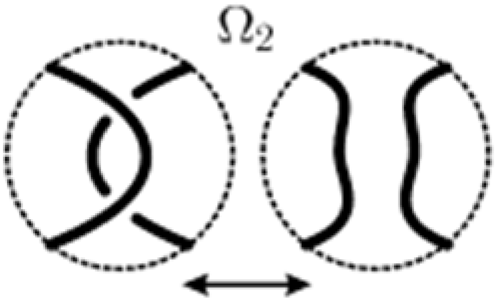
ნახ. 6. რაიდემაისტერის პირველი მოძრაობა

ბ. ვეძებთ ისეთ რკალებს, რომლის ორივე ბოლო ARCADE-ს გარეთაა და "ვხსნით" (რაიდემაისტერის მესამე მოძრაობა, ნახ. 7); (O(n)).



ნახ. 7. რაიდემაისტერის მესამე მოძრაობა

გ. ვეძებთ ისეთ რკალებს, რომლის ერთ-ერთი ბოლო ARCADE-ს გარეთაა და მთლიანად რკალი არ კვეთს სხვა რკალებს და “ვხსნით” (რაიდემაისტერის მეორე მოძრაობა, ნახ. 8); (O(n)).



ნახ. 8. რაიდემაისტერის მეორე მოძრაობა

დ. ა, ბ, გ პუნქტებს ვიმეორებთ მანამ, სანამ არ აღმოვფხვრით ასეთ “ზედმეტ” რკალებს.

6. მე-4, მე-5 პუნქტები ასრულებს FADEN ნაწილის მთლიან გარდაქმნას. თუ მიღებულ ჩანაწერში არ დარჩება არაჰოლონომური კვეთები, ARCADE ნაწილს, რომელიც თავიდან ჩავთვალეთ აბსცისათა ღერძის თანხვდენილად, ვცვლით მცირე სიმაღლის რკალით, ხოლო თუ მიღებულ ჩანაწერში ისევ დარჩება არაჰოლონომური კვეთები, საჭირო ხდება ARCADE-ს გარდაქმნა. ვადგენთ, ჰოლონომურ გადასვლაზე არაჰოლონომური კვეთების რაოდენობას და AFL წარმოდგენაში ARCADE -ს ვამატებთ იმდენივე ხვიას, ანუ, თუ წირის ჩანაწერში არის *k* ცალი რკალი, რომელთა შესაბამისი გადასვლა ჰოლონომურია და კვეთა – არაჰოლონომური, წირს ARCADE ნაწილში უნდა დაემატოს *2k* ცალი რკალი. (ნახ. 9ა, 9ბ).

ნახ. 9ა

ნახ. 9ბ

ნახ. 9ა, 9ბ. ARCADE-ს დახვევა არაჰოლონომური კვეთების გარდასაქმნელად

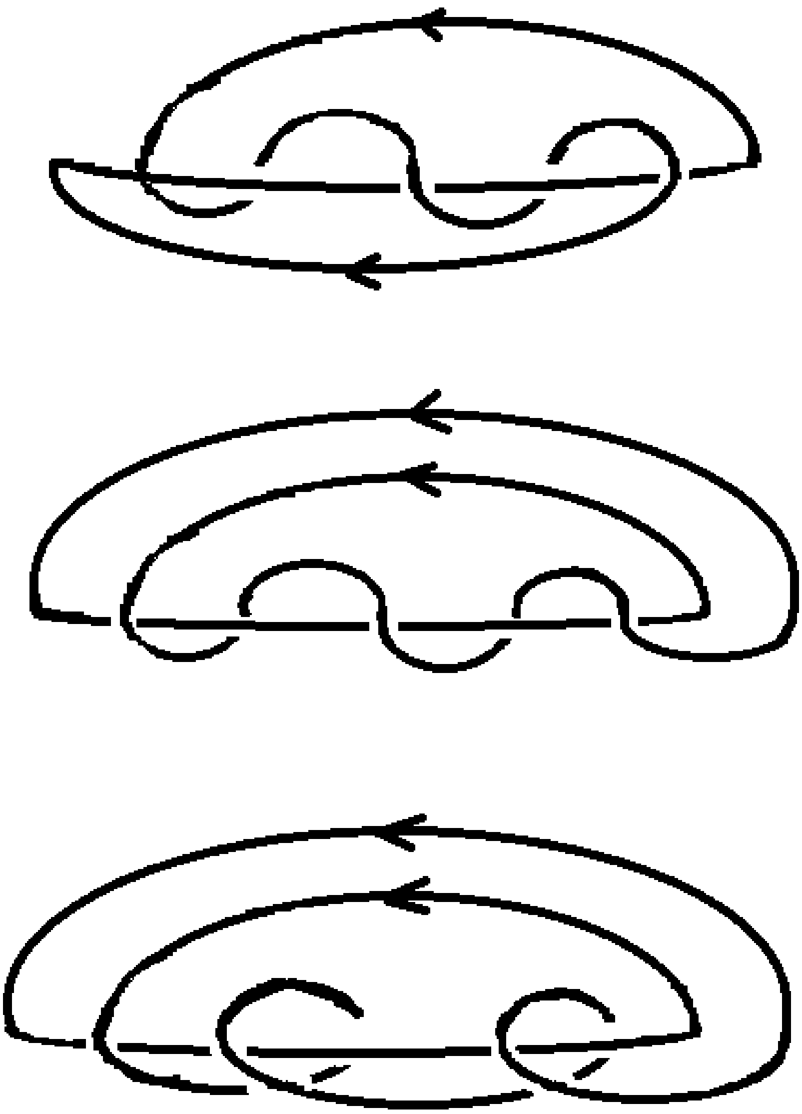
არაჰოლონომურ კვეთასთან ARCADE-ს ვახვევთ რაიდემაისტერის მეორე მოძრაობის შესაბამისად ისე, რომ ერთი კვეთის ნაცვლად წარმოიქმნება ოთხი კვეთა. ორი ახალი წერტილი დაემატება არაჰოლონომური კვეთის მარჯვნივ ((T^{-1} შემთხვევაში) ან მარცხნივ ((S^{+1} შემთხვევაში). აქაც ARCADE ნაწილის სწორხაზოვან არეებს ვცვლით მცირე სიმაღლის რკალებით. (O(n)).

ეს ალგორითმი ასრულებს AFL-ის ჰოლონომურად გარდაქმნას. აქ უკვე შეგვიძლია ARCADE წარმოვიდგინოთ (ისევ ტოპოლოგიის დაურღვევლად) როგორც რკალი, რომლის სიმაღლე ნაკლებია FADEN-ის ყველა რკალის სიმაღლეზე (როდესაც თავდაპირველ AFL-ში არ არის არაჰოლონომური კვეთები), გარდა იმ წერტილების მიდამოსი, სადაც დაგვჭირდა თვითონ ARCADE-ს დახვევა არაჰოლონომური კვეთის “გასახსნელად”.

მიღებული წირისთვის ვადგენთ ფუნქციას ისე, რომ $(-f(t), f'(t), -f''(t))$ შეესაბამებოდეს წირის პარამეტრულ (X, Y, Z) აღწერას.

ალგორითმის კერძო შემთხვევად შეგვიძლია განვიხილოთ $(2, q)$ ტორული ტიპის კვანძები (q=2*k+1), რომლის ზოგადი AFL ჩანაწერი იქნება $S_0^{-1}(T_i^{+1}S_{i+1}^{-1})$, i=1. . .(q-1)/2, (მაგალითად სამყურა $S_0^{-1}T_1^{+1}S_2^{-1}$). მისი გარდაქმნა დასრულდება 5ა პუნქტით, რადგანაც ჩანაწერი, დაწყებული

T_1^{+1}-დან შედგება მხოლოდ რაიდემაისტერის მეორე მოძრაობის შესაბამისი არაჰოლონომური გადასვლებისაგან.



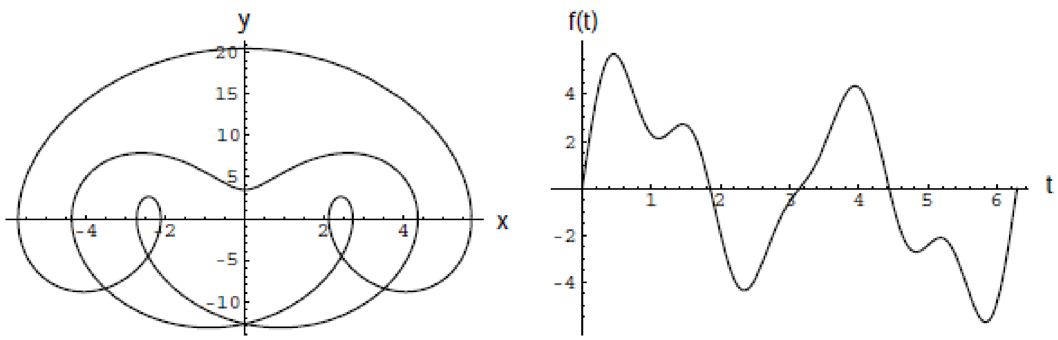
ნახ. 10. (2,5) ტორის გარდაქმნა ჰოლონომურ სახეზე

პარამეტრიზაციის ფუნქციის თვისებები და წონის ფუნქცია

ჰოლონომური წირის აღწერისათვის ვეძებთ ისეთ პერიოდულ f ფუნქციას, რომ ასახვა $(-f(t), f'(t), -f''(t))$ შეესაბამებოდეს წირის პარამეტრულ (X, Y, Z) აღწერას.

აღსანიშნავია, რომ დადებითი სამყურასთვის შედგენილია ჰოლონომური პარამეტრიზაციის ფუნქცია (ჯონ ბუეტი, მაიკლ კინნალი, ფელიქს ტუბიანა):

$$f(t) = \sin t + 4 * \sin 2 * t + \sin 4 * t \qquad (10)$$



ნახ. 11 . ფუნქცია $f(t) = \sin t + 4 * \sin 2 * t + \sin 4 * t$ განსაზღვრავს დადებით სამყურას.

როგორც ვხედავთ, f(t)-ს შესაბამისი გრაფიკი ხერხისებურია. ავტორებმა შეძლეს ამ მაგალითის გავრცობა $(2, q)$ ტორული კვანძებისთვის, გარკვეული ხერხისებური ფუნქციების ფურიეს წაკვეთილი მიახლოებით. თუმცა მათი ეს კერძო შედეგი საკმაოდ ჩახლართულია აღსაწერად და ამასთანავე, არ არის დამტკიცებული, რომ ეს მეთოდი მუშაობს ყველა q-თვის.

ჩვენს შემთხვევაში განვიხილავთ სხვანაირ მიდგომას. რადგანაც ფუნქცია აღწერს მთლიან წირს $[0, 2\pi]$ შუალედზე, ცხადია, წირის ყოველ რკალს ამ შუალედიდან რაღაც მონაკვეთი შეესაბამება. ვთქვათ, წირში არის n ცალი რკალი (თითოეული რკალი შეესაბამება წირის ორ მომდევნო კვეთას შორის არსებულ გადასვლას). $[0, 2\pi]$ შუალედს ვყოფთ n ცალ მონაკვეთად, დაყოფის წერტილები აღვნიშნოთ t_i-თი, $i = 1..n$, $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_i < \cdots < t_{n-1} < t_n \leq 2\pi$ და თითოეულ i- ურ მონაკვეთზე რკალს აღვწერთ რაღაც f_i მარტივი ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მეშვეობით[1].

<u>თეორემა 1</u>. ჰოლონომური წირი ჰოლონომურად აღიწერება, როგორც ამ წირის ცალკეული რკალების აღმწერი f_i მარტივი ტრიგონომეტრიული ფუნქციების კომბინაცია

$$f = \sum_{i=1}^{i=n} f_i * coef_i \qquad (11)$$

[1] $[0, 2\pi]$ შუალედის დაყოფის წესს მოგვიანებით აღვწერთ.

სადაც $coef_i$ კოეფიციენტები არის პერიოდული, უბან-უბან მუდმივი წონის ფუნქცია ისე, რომ თითოეული რკალისთვის სრულდება ტოლობები:

$$f(t) = f_i(t), \qquad f'(t) = f_i'(t), \qquad f''(t) = f_i''(t), \quad \forall\, i = 1..n \qquad (12)$$

ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ ასე შერჩეული ფუნქცია აკმაყოფილებს ჰოლონომურობის სამ თვისებას. $AFL \rightarrow Holonomic$ ალგორითმიდან გამომდინარე, ჩვენ რკალები ისე განვალაგეთ, რომ რკალების გადაკვეთის წერტილები დაშორებულია X ღერძიდან. ეს ავტომატურად იწვევს მე-2 პირობის შესრულებას. რაც შეეხება 1-ელ და მე-3 პირობებს, ეს დამოკიდებულია თავად ფუნქციების შერჩევაზე.

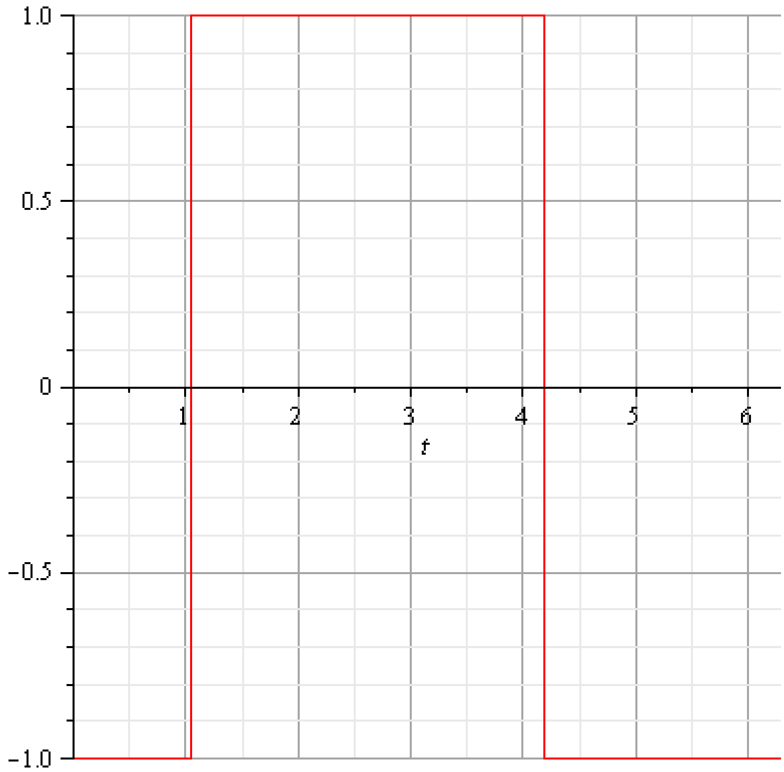
ჯერ განვიხილოთ

ლემა 1. (1) ფორმულაში კოეფიციენტებად შეგვიძლია გამოვიყენოთ მოდიფიცირებული კვადრატული ტალღების ნამრავლი.

დამტკიცება: განვიხილოთ ზოგადი კვადრატული ტალღის გამოსახულება

$$S_{A,T} = A * (-1)^{\left\lfloor \frac{2*(t-t_*)}{T} \right\rfloor} \qquad (13)$$

სადაც A ტალღის ამპლიტუდაა, T არის პერიოდის სიგრძე, ჩვენს შემთხვევაში $T = 2\pi$ $t_* \in [0, 2\pi]$. მისი გრაფიკი მოცემულია ნახ. 12.-ზე:



ნახ. 12. ზოგადი კვადრატული ტალღის გრაფიკი

ფუნქციის მნიშვნელობებია A და $-A$ ზუსტად პერიოდის ნახევარ სიგრძეზე, კერძოდ, თუ:

$$0 \le t_* < \frac{T}{2}, \quad S_{A,T} = -A, \quad \forall\, t \in [0, t_*] \cup \left[t_*, t_* + \frac{T}{2}\right],$$

$$S_{A,T} = A, \quad \forall\, t \in \left[t_*,\ t_* + \frac{T}{2}\right] \qquad (14)$$

და

$$T/2 \le t_* < T, \quad S_{A,T} = A, \quad \forall\, t \in [0, t_* - T/2] \cup [\, t_*, T],$$

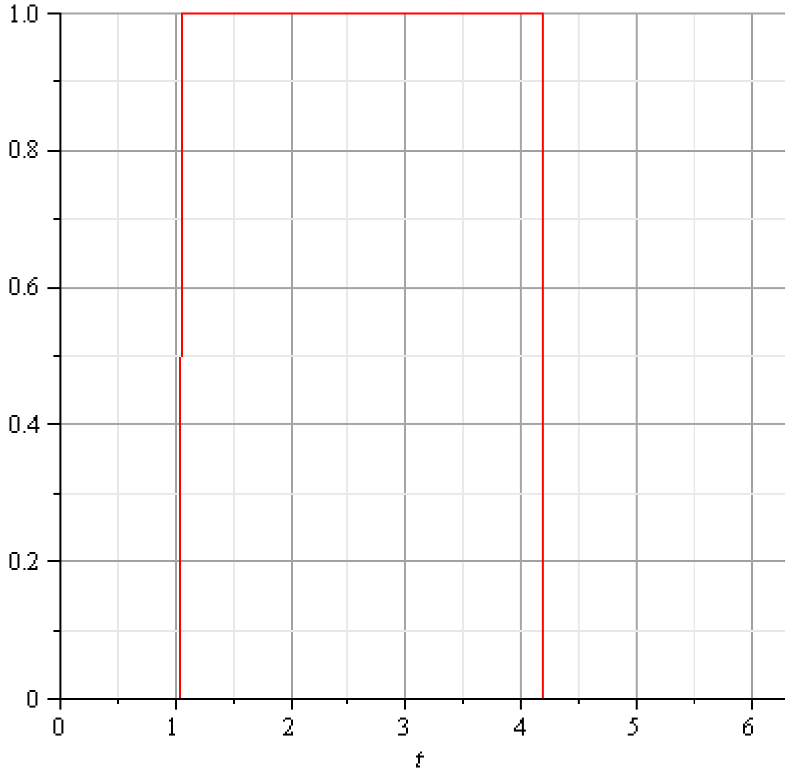
$$S_{A,T} = -A, \quad \forall\, t \in [\, t_* - T/2, T] \qquad (15)$$

ჩვენ გვჭირდება ზოგადი გამოსახულების მოდიფიკაცია შემდეგი სახით:

$$\frac{1}{2} * (1 + (-1)^{\left\lfloor \frac{2*(t-t_i)}{T} \right\rfloor}) \qquad (16)$$

სადაც t_i – პერიოდის დაყოფის წერტილებია, $i = 1..n$, $A = 1$, $T = 2\pi$.

ამ გამოსახულების მნიშვნელობებია 1 და 0 (4), (5) წესების შესაბამისად. (ნახ. 13.)



ნახ. 13. მოდიფიცირებული კვადრატული ტალღის გრაფიკი

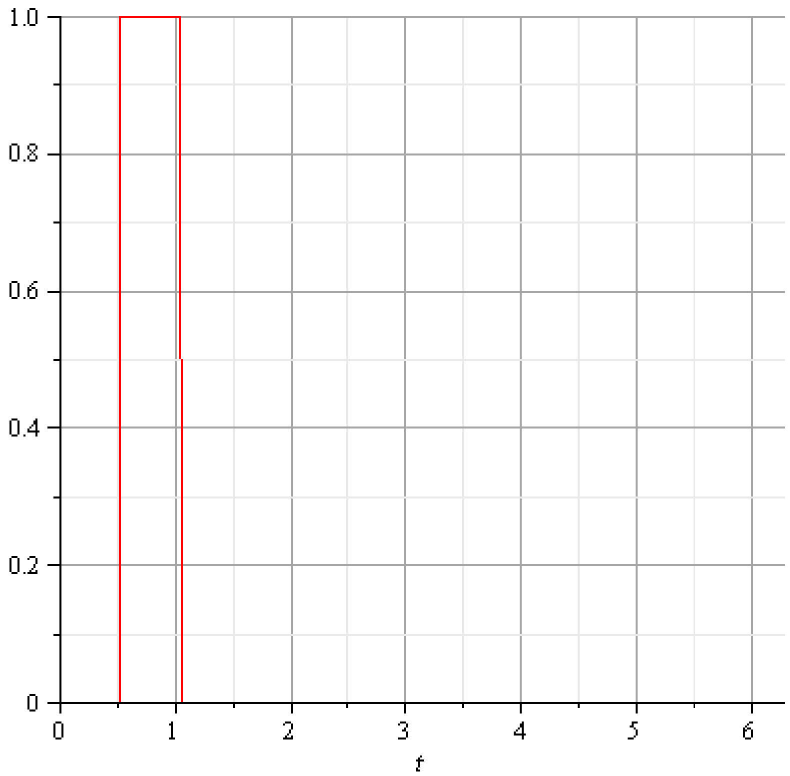
როგორც უკვე ვთქვით, კვადრატული ტალღის ფუნქციას ორი განსხვავებული მნიშვნელობა აქვს პერიოდის ნახევრის სიგრძის შუალედებზე. იმისათვის, რომ ვარეგულიროთ

მნიშვნელობების შუალედის სიგრძე, ორი კვადრატული ტალღის გამოსახულებას ვამრავლებთ ერთმანეთზე:

$$sqw_i = \frac{1}{2} * \left(1 + (-1)^{\left\lfloor \frac{2*(t-t_{i-1})}{T} \right\rfloor}\right) * \frac{1}{2} * (1 + (-1)^{\left\lfloor \frac{2*\left(t-(t_i-\frac{T}{2})\right)}{T} \right\rfloor}) \qquad (17)$$

მისი მნიშვნელობებია $[t_{i-1}, t_i]$ შუალედზე − 1, ხოლო პერიოდის დანარჩენ მონაკვეთებზე − 0. ეს თვისება უზრუნველყოფს იმას, რომ პარამეტრიზაციის f ფუნქციაში ყოველი f_i წევრი "აქტიურდება" შესაბამის მონაკვეთზე, ხოლო დანარჩენ მონაკვეთებზე "ქრება" (ნახ. 14), ე.ი.

$$f(t) = f_i(t), \;\; \forall\, i = 1..n \qquad (18)$$



ნახ. 14. პარამეტრიზაციის ფუნქციის კოეფიციენტის გრაფიკი

გარდა ამისა, უბან-უბან მუდმივი ფუნქციის თვისებიდან გამომდინარე, კვადრატული ტალღის აღმწერი ფუნქციის წარმოებული =0, ამდენად, გვექნება:

$$(f_i * sqw_i)' = f_i{}' * sqw_i \qquad \text{და} \qquad (f_i * q_i)'' = f_i{}'' * sqw_i \qquad (19)$$

და, აქედან გამომდინარე:

$$f'(t) = f_i'(t), \quad \forall\, i = 1..n \qquad \text{და} \qquad t \in [t_{i-1}, t_i] \qquad (20)$$

$$f''(t) = f_i''(t), \quad \forall\, i = 1..n \;\; \text{და} \qquad t \in [t_{i-1}, t_i] \qquad (21)$$

ე. ი. (9) გამოსახულება აკმაყოფილებს (4) მოთხოვნებს და ის შეგვიძლია გამოვიყენოთ წონის ფუნქციის შესაბამის კოეფიციენტებად (1) გამოსახულებაში.

▪ (ლემა 1-ის დამტკიცება)

შენიშვნა 1. f_i ფუნქციების რამდენიმე თვისება:

ა) იმის გათვალისწინებით, რომ წრის ჰოლონომური აღწერისას ყოველი რკალის ბოლოები X ღერძს უნდა ეყრდნობოდეს, გვექნება:

$$f_i'(t_{i-1}) = f_i'(t_i) = 0 \qquad (22)$$

ბ) რკალების თანაბარი სიმრუდისათვის:

$$f_i''(t_{i-1}) = -f_i''(t_i) \qquad (23)$$

გამოთვლების გასამარტივებლად შეგვიძლია ჩავთვალოთ:

$$f_i''(t_{i-1}) = f_i''(t_i) = 0 \quad \forall\, i = 1..n \qquad (24)$$

რადგანაც გარდა ზემოაღნიშნულისა, f_i ფუნქციები უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ პირობებს:

$$\begin{gathered} f_i(t_i) = f_{i+1}(t_i) \\ f_i'(t_i) = f_{i+1}'(t_i) \\ f_i''(t_i) = f_{i+1}''(t_i) \\ f_1(0) = f_n(2\pi) \\ f_1'(0) = f_n'(2\pi) \\ f_1''(0) = f_n''(2\pi) \end{gathered} \qquad (25)$$

i - ური რკალი შეესაბამება პერიოდის $[t_{i-1}, t_i]$ შუალედს. რაც შეეხება თავად პარამეტრიზაციის ფუნქციის წევრ f_i ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს, მათი არგუმენტი არის $\alpha_i * t$, სადაც ყოველ რკალზე არგუმენტის $\alpha_i * t$ სიდიდე იცვლება 0-დან π−მდე. α_i პარამეტრი განსაზღვრავს f_i ფუნქციების პერიოდს, რომელიც $2 * \pi$-ს ჯერადი უნდა იყოს (ზოგადად, არჩეული T-ს ჯერადი) ლუწი ჯერადობით.

იმის გათვალისწინებით, რომ წრის ჰოლონომური აღწერისას ყოველი რკალის ბოლოები X ღერძს უნდა ეყრდნობოდეს, გვექნება:

$$f_i'(0) = f_i'(\pi) = 0 \qquad (26)$$

ხოლო რკალების თანაბარი სიმრუდისათვის:

$$f_i''(0) = -f_i''(\pi) \qquad (27)$$

გამოთვლების გასამარტივებლად შეგვიძლია წინასწარ დავაფიქსიროთ:

$$f_i''(t_i) = 0 \quad \forall\, i = 1..n \qquad (28)$$

შენიშვნა 2. f_i ფუნქციების არგუმენტად ვიღებთ არა უშუალოდ t-ს, არამედ $\alpha_i * t$ სიდიდეს ისე, რომ:

$$\forall\ t \in [t_{i-1}, t_i]\ : \qquad 0 \le \alpha_i * (t - t_i) \le \pi \tag{29}$$

α_i პარამეტრები განსაზღვრავს f_i ფუნქციის პერიოდს, რადგანაც $T(f_i) = 2\pi/\alpha_i$ და სამართლიანია შემდეგი:

ლემა 2. α_i პარამეტრები აკმაყოფილებენ ტოლობას:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\alpha_i} = 2 \tag{30}$$

დამტკიცება: ვთქვათ, α_i პარამეტრები რაღაც წესით შევარჩიეთ, მაშინ (18)-ს შესაბამისად $[0, 2\pi]$ შუალედი დაიყოფა შემდეგი წესით:

ცხრ. 1. $[0, 2\pi]$ *შუალედის დაყოფა* n *მონაკვეთად*

i	t_{i-1}	t_i
1	0	$\frac{\pi}{\alpha_1}$
2	$\frac{\pi}{\alpha_1}$	$\frac{\pi}{\alpha_1} + \frac{\pi}{\alpha_2}$
3	$\frac{\pi}{\alpha_1} + \frac{\pi}{\alpha_2}$	$\frac{\pi}{\alpha_1} + \frac{\pi}{\alpha_2} + \frac{\pi}{\alpha_3}$
. . .	. . .	. . .
n	$\frac{\pi}{\alpha_1} + \frac{\pi}{\alpha_2} + \frac{\pi}{\alpha_3} + \cdots + \frac{\pi}{\alpha_{n-1}}$	$\frac{\pi}{\alpha_1} + \frac{\pi}{\alpha_2} + \frac{\pi}{\alpha_3} + \cdots + \frac{\pi}{\alpha_{n-1}} + \frac{\pi}{\alpha_n}$

ზოგადად, i-ურ რკალზე დროითი ცვლადი გაივლის მონაკვეთებს:

$$t \in [t_{i-1}, t_i]\ ,\ \textit{სადაც}\ t_0 = 0, \qquad t_i = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\alpha_j}, \quad \forall\, i = 1..n \tag{31}$$

t_i წარმოადგენს i -ური რკალის საბოლოო და i+1 რკალის საწყის წერტილს. მთლიანი წრის საბოლოო წერტილი, რომელიც უნდა დაემთხვეს წრის საწყის წერტილს, იქნება t_n=2 შესაბამისად:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\pi}{\alpha_i} = 2 * \pi, \tag{32}$$

$$\textit{აქედან:}\ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\alpha_i} = 2 \tag{33}$$

▪ (ლემა 2-ის დამტკიცება)

შენიშვნა 3: $\forall\alpha_i$ განსაზღვრავს შესაბამისი რკალის სიმრუდეს, ან რაც იგივეა, რკალის სიმაღლის (h) შეფარდებას რკალის სიგანესთან (Δx). ზოგადად, თუ რკალის სიმაღლეს წინასწარ არ დავაფიქსირებთ, მარტივი ტრიგონომეტრიული ფუნქცია ($\cos(t)$ ან $\sin(t)$) $\alpha * t \in [0, \pi]$ შუალედზე აღწერს რკალს, რომელიც მაქსიმუმს (მინიმუმს) აღწევს $\alpha * t = \frac{\pi}{2}$ წერტილში და $h = \alpha * \Delta x * p$, სადაც p პროპორციულობის კოეფიციენტი დამოკიდებულია ფუნქციის კონკრეტულ სახეზე და ერთი და იგივეა ამ სახის ყოველი ფუნქციისათვის ნებისმიერი სხვა კოეფიციენტების შემთხვევაში.

შენიშვნა 4: იმ შემთხვევაში, თუ რკალების სიმაღლეს, ან, რაც იგივეა, რკალების ურთიერთგანლაგებას, მნიშვნელობა არ ექნებოდა, α პარამეტრს ყველა რკალისთვის ავიღებდით ერთი და იმავე სიდიდეს, ანუ (24)-ის გათვალისწინებით გვექნებოდა: $\alpha = \frac{n}{2}$. მაგრამ, რადგანაც განვიხილავთ გარდაქმნილი AFL წრის – ორ ნაწილად წარმოდგენილი წრის – ჰოლონომურ პარამეტრიზაციას, აპრიორი ვიცით, რომ ARCADE ნაწილში რკალების სიმაღლე გარკვეულად უნდა შეესაბამებოდეს FADEN ნაწილის რკალების სიმაღლეს. აქედან გამომდინარე, შენიშვნა 2-ის გათვალისწინებით, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ წრის ARCADE და FADEN ნაწილებში α პარამეტრი სხვადასხვა იქნება.

ლემა 3. რკალების რაოდენობის მიუხედავად, წრის ARCADE და FADEN ნაწილები იკავებენ თანაბარ დროს, სრული პერიოდის ნახევარს.

დამტკიცება. შენიშვნა 4-ის გათვალისწინებით, წრის FADEN ნაწილში პარამეტრი აღვნიშნოთ α_f-ით, ხოლო ARCADE ნაწილში პარამეტრი აღვნიშნოთ α_a-ით.

$$T_a = \frac{\pi}{\alpha_a} \qquad (34)$$

სადაც T_a არის თითოეული რკალის აღმწერი ფუნქციის შესაბამისი შუალედი ARCADE ნაწილში და

$$T_f = \frac{\pi}{\alpha_f} \qquad (35)$$

სადაც T_f არის თითოეული რკალის აღმწერი ფუნქციის შესაბამისი შუალედი FADEN ნაწილში.

მთლიანად ARCADE ნაწილი იკავებს

$$TA = m * \frac{\pi}{\alpha_a} \qquad (36)$$

შუალედს, ხოლო FADEN ნაწილი იკავებს

$$TF = (n - m) * \frac{\pi}{\alpha_f} \qquad (37)$$

შუალედს, სადაც n არის მთლიან წრეში რკალების საერთო რაოდენობა, ხოლო m - ARCADE ნაწილში რკალების რაოდენობა.

მთლიანი წირის სრული შუალედი (რომელიც პერიოდის ტოლია) იქნება:

$$T = m * T_a + (n - m) * T_f \quad (38)$$

$$T = \pi * \left(\frac{m}{\alpha_a} + \frac{n-m}{\alpha_f}\right) \quad (39)$$

α_a და α_f უნდა შევარჩიოთ ისე, რომ ARCADE ნაწილში რკალების მაქსიმალური სიმაღლე მოდულით ნაკლები იყოს FADEN ნაწილში რკალების მინიმალურ სიმაღლეზე მოდულით, ამისათვის უნდა შესრულდეს პირობა:

$$\min_{Faden} |x_k - x_{k+1}| * pf * \alpha_f > \max_{Arkade} |x_l - x_{l+1}| * p1 * \alpha_a \quad (40)$$

$$\frac{2*\pi}{\frac{\pi}{\alpha_a}} = 2 * \alpha_a \quad (41)$$

$$\frac{2*\pi}{\frac{\pi}{\alpha_f}} = 2 * \alpha_f \quad (42)$$

$$\frac{2*\pi}{m*\frac{\pi}{\alpha_a}} = \frac{2*\alpha_a}{m} \quad (43)$$

$$\frac{2*\pi}{(n-m)*\frac{\pi}{\alpha_f}} = \frac{2*\alpha_f}{n-m} \quad (44)$$

მთლიანი ფუნქციის პერიოდულობის გათვალისწინებით, $\frac{T}{TA}$ და $\frac{T}{TF}$ სიდიდეები უნდა იყოს მთელი, უფრო მეტიც, ლუწი სიდიდეები. ამასთან, მთელი პერიოდი შეიცავს ერთ ARCADE და ერთ FADEN ნაწილებს, ანუ

$$\frac{T}{TA} = \frac{T}{TF} = 2 \quad (45)$$

რაც გვაძლევს საშუალებას, დავასკვნათ, რომ რკალების რაოდენობისგან დამოუკიდებლად, ჰოლონომურად გარდაქმნილ წირში ARCADE და FADEN ნაწილების აღწერას სჭირდება თანაბარი დრო – სრული პერიოდის ნახევარი.

$$TA = TF \quad (46)$$

(ლემა 3 დამტკიცებულია)

აქედან, როგორც შედეგი, გამომდინარეობს, რომ თუ თავდაპირველი AFL წირი ისეთია, რომ მასში არაჰოლონომური კვეთები არ არის, ან დადის ასეთ სახეზე, ე.ი. მხოლოდ FADEN ნაწილის გარდაქმნაა საჭირო, ARCADE ნაწილში მხოლოდ ერთი რკალი იქნება, აქედან გამომდინარე,

$$\alpha 1 = 1 \quad \text{და} \quad \alpha f = n - 1 \quad (47)$$

ჰოლონომური პარამეტრიზაციის ფუნქცია

თეორემა 2. თუ ჰოლონომურად გარდაქმნილი წრის ყოველ რკალს აღვწერთ ფუნქციით:

$$f_i = a_i * arctg(q_i * cos(\propto_i * t)) + f_i * cos(\propto_i * t) + c_i \quad (48)$$

სადაც $q_i > 0$, და განისაზღვრება გარკვეული პირობების მიხედვით, ხოლო $\propto_i$ ნატურალური რიცხვია და განისაზღვრება FADEN და ARCADE ნაწილებში რკალების რაოდენობის შესაბამისად, მაშინ ფუნქცია

$$f = \sum_{i=1}^{i=n} f_i * sqw_i \quad (49)$$

ახდენს ჰოლონომურად გარდაქმნილი წრის ჰოლონომურ პარამეტრიზაციას. ამასთან, q_i პარამეტრები განსაზღვრავს ფუნქციის სახეს და იგი ერთი მუდმივია FADEN ნაწილის რკალებისთვის, მეორე მუდმივია ARCADE ნაწილის იმ რკალებისთვის, რომლებიც "ეხვევა" FADEN რკალებს, მესამე მუდმივია - ARCADE ნაწილის იმ რკალებისთვის, რომლებიც "არ ეხვევა" FADEN რკალებს.

დამტკიცება: ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ (49) ფუნქცია აკმაყოფილებს ჰოლონომურობის 3 თვისებას.

განვიხილოთ (48) ფუნქცია ზოგადად და მისი წარმოებულები:

$$f = a * arctg(q * cos(\propto * t)) + b * cos(\propto * t) + c \quad (50)$$

$$f' = a * \frac{1*q*\propto*(-sin(\propto*t))}{1+q^2*cos^2(\propto*t)} + b * \propto * (-sin(\propto * t)) = -\propto * sin(\propto * t) * \left(\frac{a*q}{1+q^2*cos^2(\propto*t)} + b\right) \quad (51)$$

$$f'' = -\propto^2 cos(\propto * t) * \left(\frac{a*q}{1+q^2*cos^2(\propto*t)} + b\right) - \propto * sin(\propto * t) * \left(\frac{-a*q*q^2*2*cos(\propto*t)*(-sin(\propto*t))*\alpha}{\left(1+q^2*cos^2(\propto*t)\right)^2}\right) = -\propto^2 cos(\propto * t) * \left(\frac{2*a*q^3*sin^2(\propto*t)}{\left(1+q^2*cos^2(\propto*t)\right)^2} + \frac{a*q}{1+q^2*cos^2(\propto*t)} + b\right) \quad (52)$$

ავტომატურად სრულდება შემდეგი პირობები:

$$f'(0) = f'(\pi) = 0 \quad (53)$$

$$f''(\pi - t) = -f''(t) \quad (54)$$

დამატებით თუ მოვითხოვთ, რომ შესრულდეს პირობა:

$$f''(0) = 0 \quad (55)$$

მივიღებთ:

$$\frac{2*q^3*sin^2 0}{(1+q^2*cos^2 0)^2} + \frac{a*q}{1+q^2*cos^2 0} + b = \frac{a*q}{1+q^2} + b = 0 \quad (56)$$

აქედან:

$$\boldsymbol{b} = -\frac{\boldsymbol{a*q}}{\boldsymbol{1+q^2}} \quad (57)$$

და თავდაპირველი ფუნქცია და მისი წარმოებულები მიიღებს სახეს:

$$\boldsymbol{f = a * arctg(q * cos(\propto * t)) - \frac{a*q}{1+q^2} * cos(\propto * t) + c} \quad (58)$$

$$\boldsymbol{f' = -\propto * a * sin(\propto * t) * (\frac{q}{1+q^2 * cos^2(\propto * t)} - \frac{q}{1+q^2})} \quad (59)$$

$$\boldsymbol{f'' = -a * \propto^2 cos(\propto * t) * \left(\frac{2*q^3*sin^2(\propto*t)}{\left(1+q^2*cos^2(\propto*t)\right)^2} + \frac{q}{1+q^2*cos^2(\propto*t)} - \frac{q}{1+q^2}\right)} \quad (60)$$

განვიხილოთ ფუნქციის თვისებები: თუ მოვითხოვთ $q > 0$, მაშინ

$$\boldsymbol{\frac{q}{1+q^2*cos^2(\propto*t)} - \frac{q}{1+q^2} \geq 0 \qquad \forall q > 0} \quad (61)$$

ნულთან ტოლობა მიიღება, როცა $cos^2(\propto * t) = 1$, ანუ ინტერვალის ბოლოებზე

და

$$\boldsymbol{\frac{2*q^3*sin^2(\propto*t)}{\left(1+q^2*cos^2(\propto*t)\right)^2} + \frac{q}{1+q^2*cos^2(\propto*t)} - \frac{q}{1+q^2} \geq 0 \qquad \forall q > 0} \quad (62)$$

აქაც ნულთან ტოლობა მიიღება ინტერვალის ბოლოებზე

ანუ $q > 0$ შემთხვევაში გარანტირებულია ფუნქციის მკაცრი მონოტონურობა და ფუნქციის წარმოებულის მკაცრი ამოზნექილობა ან ჩაზნექილობა (a-ს ნიშნის მიხედვით), რაც უზრუნველყოფს იმას, რომ კვანძის გეგმილისთვის XOY სიბრტყეზე $\forall\ t \in [t_{i-1}, t_i]$ მონაკვეთზე გვექნება ნახევარელიფსის ფორმის მქონე რკალები და რკალის დაფიქსირებული სიგანის შემთხვევაშიც რკალის სიმაღლე შეგვიძლია ნებისმიერად ვცვალოთ q-ს არჩევის მიხედვით. ეს ფაქტორი გვაძლევს ჰოლონომურ წირში რკალების "სწორი" ურთიერთგანლაგების საშუალებას.

ვიპოვოთ a და c სიდიდეები:

$$\boldsymbol{f(0) = a * arctg(q * cos(0)) - \frac{a*q}{1+q^2} * cos(0) + c = a * arctg(q) - \frac{a*q}{1+q^2} + c = -x0} \quad (63)$$

$$\boldsymbol{f(\pi) = a * arctg(q * cos(\pi)) - \frac{a*q}{1+q^2} * cos(\pi) + c = -a * arctg(q) + \frac{a*q}{1+q^2} + c = -x1} \quad (64)$$

ამ ორი ტოლობიდან გვექნება:

$$\boldsymbol{c = -\frac{x0+x1}{2}} \quad (65)$$

$$-2 * \left(a * arctg(q) - \frac{a * q}{1 + q^2}\right) = x0 - x1$$

$$a * \left(arctg(q) - \frac{q}{1 + q^2}\right) = \frac{x1 - x0}{2}$$

$$\boldsymbol{a = \frac{x0-x1}{2} * \frac{q^2+1}{q-(q^2+1)*arctg(q)} = \frac{x1-x0}{2} * \frac{q^2+1}{(q^2+1)*arctg(q)-q}} \quad (66)$$

გამოვითვალოთ კონკრეტული რკალის სიმაღლეც:

$$\boldsymbol{h_0} = -\propto * \mathbf{1} * \boldsymbol{a} * \left(\frac{q}{1+q^2*0} - \frac{q}{1+q^2}\right) = -\propto * \boldsymbol{a} * \frac{q^3}{1+q^2} \qquad (67)$$

a-ს გამოსახულების გათვალისწინებით გვექნება:

$$\boldsymbol{h_0} = -\propto * \boldsymbol{a} * \frac{q^3}{1+q^2} = -\propto * \frac{q^3}{1+q^2} * \frac{x0-x1}{2} * \frac{q^2+1}{(q^2+1)*arctg(q)-q} = -\propto * \frac{x0-x1}{2} * \frac{q^3}{(q^2+1)*arctg(q)-q} \qquad (68)$$

$$\frac{q^2+1}{(q^2+1)*arctg(q)-q} > 0 \qquad \forall\, q \geq 1\,,\ \text{რადგანაც}\ arctg(1) = \pi/4\ \text{და}\ \lim_{q\to\infty} arctg(q) = \pi/2 \qquad (69)$$

მივიღეთ, რომ რკალის სიმაღლე პირდაპირპროპორციულია რკალის სიგანის, $\propto$ პარამეტრის და ასევე დამოკიდებულია q სიდიდეზე, რაც გვაძლევს იმის საშუალებას, რომ რკალის სიმაღლე ვცვალოთ საჭიროებისამებრ, რაც მნიშვნელოვანია იმ შემთხვევაში, როცა თავდაპირველ კვანძში გვაქვს არაჰოლონომური კვეთები.

გაკეთებულია $AFL \to Holonomic$ ალგორითმის რეალიზაცია **C++** ენაზე და გამოთვლილია სამყურა კვანძის და რვიანი კვანძის შესაბამისი გარდაქმნების $\boldsymbol{x}$ კოორდინატები და აგებულია მათი გრაფიკები 2.3 ფუნქციით **Wolfram Mathematica** გარემოში. აღნიშნული გრაფიკები მოცემულია დანართების სახით.

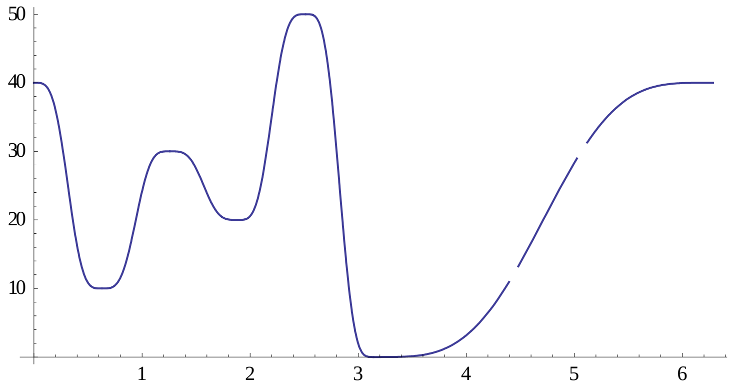
სირთულეები და სამომავლო გეგმები

უნდა აღინიშნოს, რომ ამ ფუნქციით ხდება კვანძის ჰოლონომური აღწერა, თუმცა, გადაბმის წერტილებში, ანუ $[t_{i-1}, t_i]$ მონაკვეთების ბოლოებში წირების შეერთება საკმარისად გლუვი არ არის, რაც შერჩეული ფუნქციის მოდიფკაციისკენ, ან ახალი ფუნქციის შედგენისკენ გვიბიძგებს.

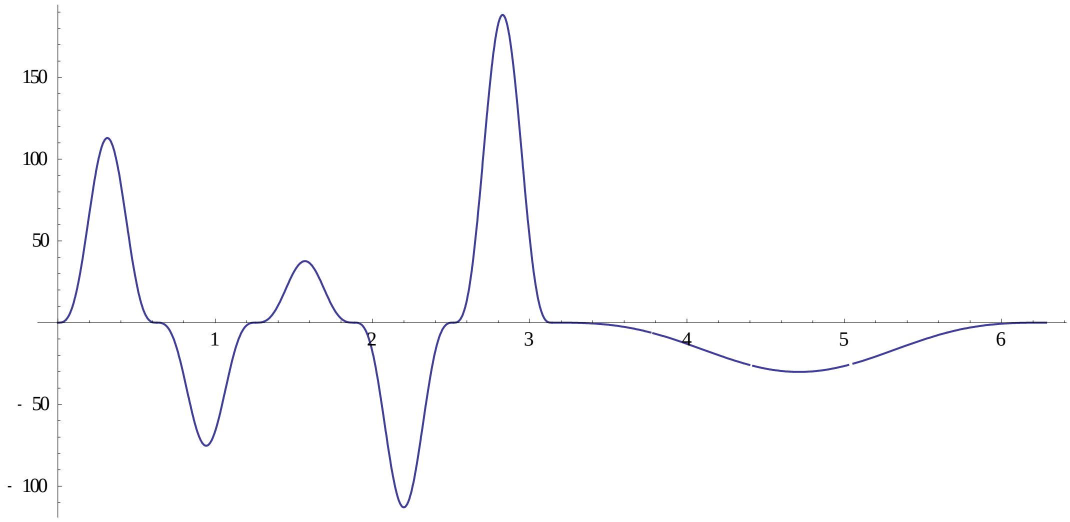
შემდგომ ეტაპზე გათვალისწინებულია შესაბამისი პროგრამული პაკეტის შექმნა ჰოლონომური წირების ასაგებად **C++** ენის და **Wolfram Mathematica** გარემოს გათვალისწინებით.

დანართი 1.

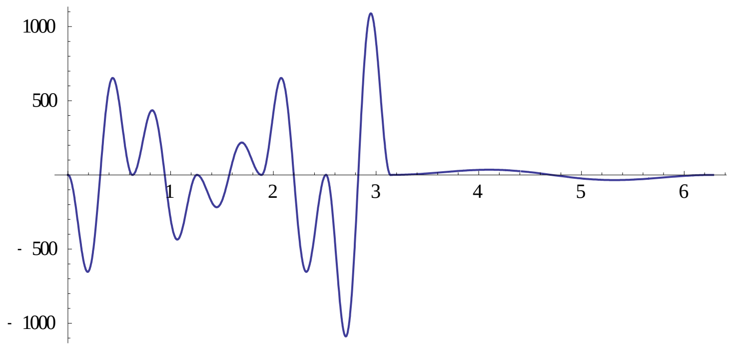
სამყურას შესაბამისი $-\mathbf{f}$ ფუნქციის გრაფიკი



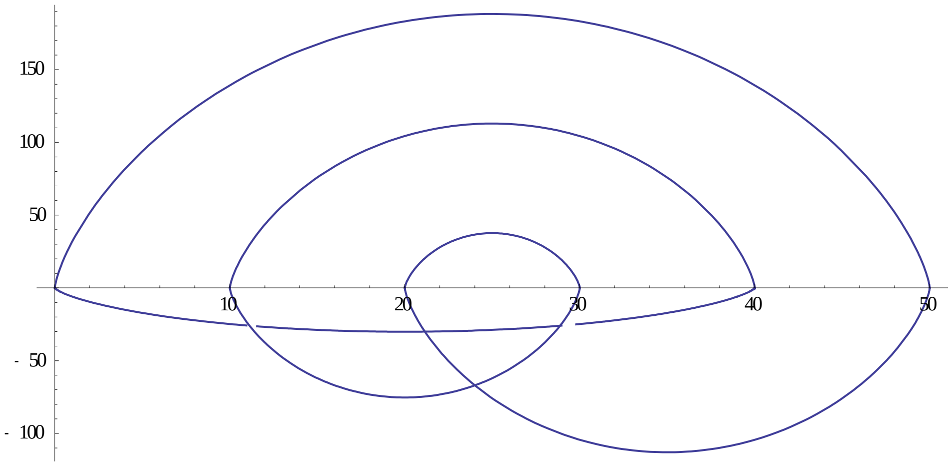
სამყურას შესაბამისი $\mathbf{f}'$ ფუნქციის გრაფიკი



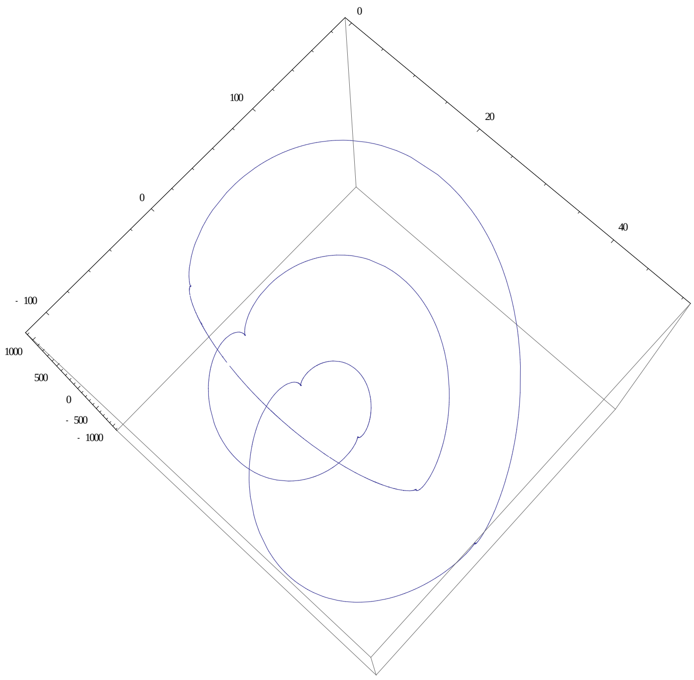
სამყურას შესაბამისი $-\mathbf{f}''$ ფუნქციის გრაფიკი



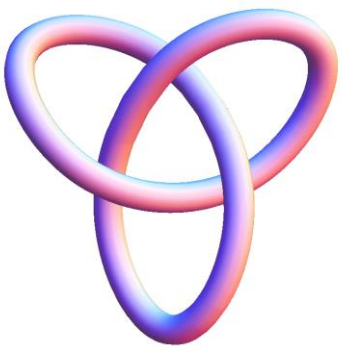
სამყურას შესაბამისი ჰოლონომური წარმოდგენის $(-\mathbf{f},\mathbf{f}')$ გეგმილი **OXY** სიბრტყეზე



სამყურას შესაბამისი ჰოლონომური წარმოდგენა $(-\mathbf{f},\mathbf{f}',-\mathbf{f}'')$

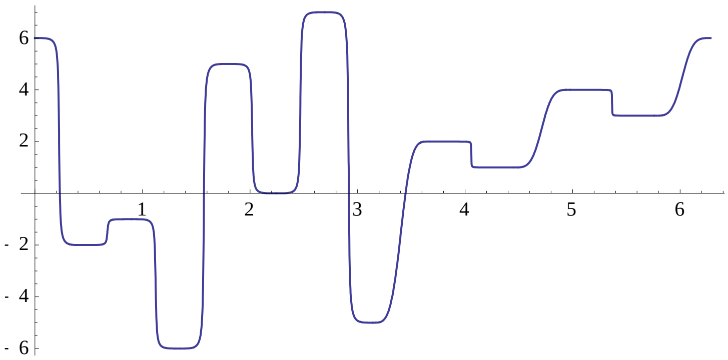


სამყურა

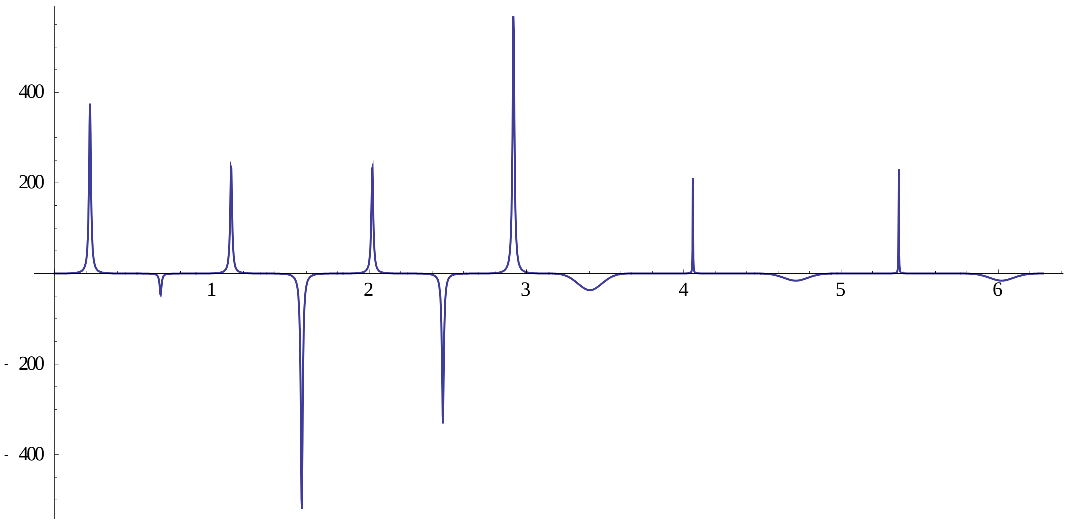


დანართი 2

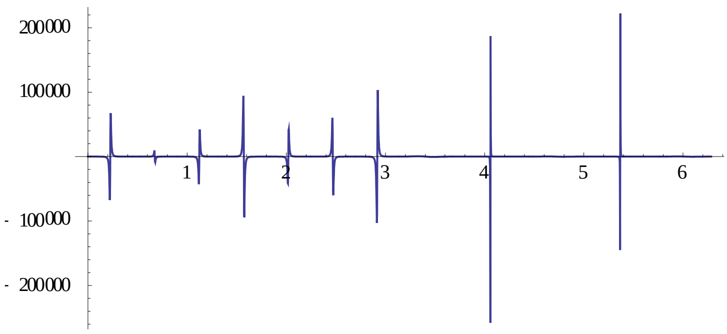
რვიანის შესაბამისი $-\mathbf{f}$ ფუნქციის გრაფიკი



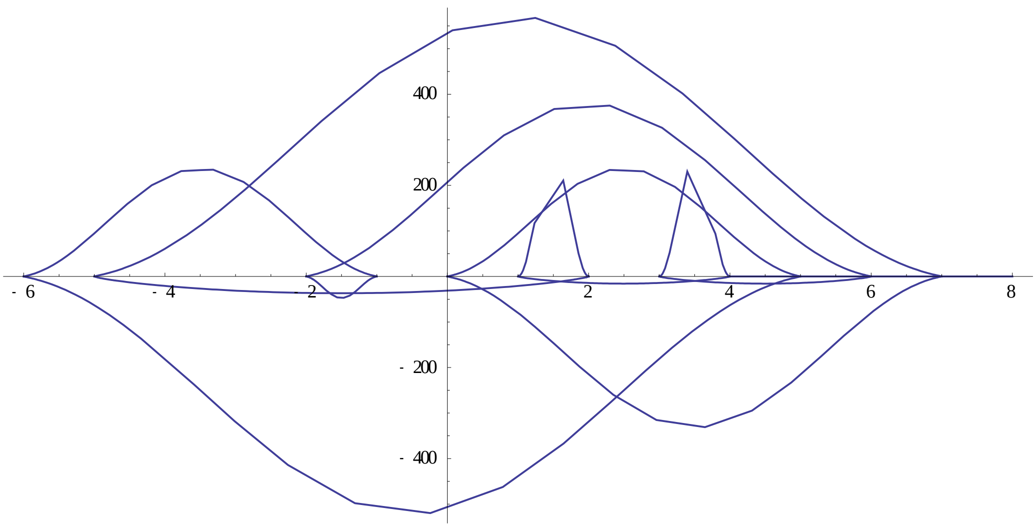
რვიანის შესაბამისი $\mathbf{f}'$ ფუნქციის გრაფიკი



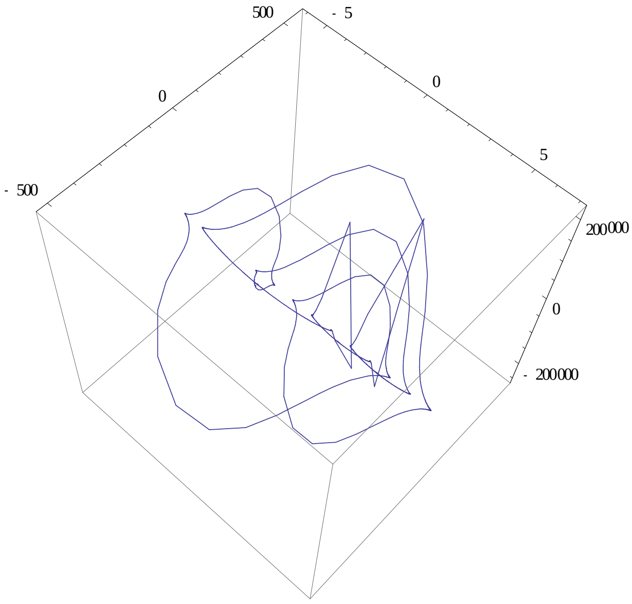
რვიანის შესაბამისი $-\mathbf{f}''$ ფუნქციის გრაფიკი



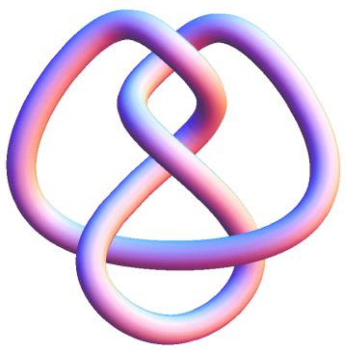
რვიანის შესაბამისი ჰოლონომური წარმოდგენის $(-\mathbf{f},\mathbf{f}')$ გეგმილი **OXY** სიბრტყეზე



რვიანის შესაბამისი ჰოლონომური წარმოდგენა $(-\mathbf{f},\mathbf{f}',-\mathbf{f}'')$



რვიანი



გამოყენებული ლიტერატურა

1. V. O. Manturov, Knot theory
2. J. S. Birman and N. C. Wrinkle, Holonomic and Legendrian parametrizations of knots,. J. Knot Theory Ramifications 9 (2000), 293 - 309.
3. A. Gamkrelidze and V. Apkhazava, On the Holonomic Parametrizations of Knots, Proceedings of European Computing Conference (ECC'09), Tbilisi, 2009, 248-252