ივანე ჯავახიშვილისსახელობის

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

გეგა გულაღაშვილი

ხელმძღვანელი :

ფიზიკა - მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,სოცირებული პროფესორი

გია გიორგაძე

თბილისი
2017

რიმანის სფეროზე ჰოლომორფული ფიბრაციის გახლეჩვის ტიპის შესახებ

განვიხილოთ ფუქსის სისტემას. ფუქსის სისტემა, განსაკუთრებული წერტილებით $s_1;\ s_2; \ldots ; s_m \in \mathbb{C}$მოიცემა შემდეგ ნაირად :

$$df = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{A_i dz}{(z - s_i)}\right) f$$

A_i −მუდმივი მატრიცებიაn × n

იმ შემთხვევაში თუ განსაკუთრებულ წერტილებში არ არის ∞ წერტილი

$$\sum_{i=1}^{m} A_i = 0$$

$$f = (f_1, \ldots , f_n)$$

რადგან განტოლებათა სისიტემა არის ფუქსის ტიპის, ამიტომ ამ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი ლოკალურად წარმოიდგინება შემდეგნაირად :

$$F_i(z) = \varphi_i(z)(z - s_i)^{B_i}(z - s_i)^{C_i}$$

B_i − დიაგონალური მატრიცაა, რომლის დიაგონალზე მდგომი ელემენტები აკმაყოფილებენ პირობას $b_i^1 \geq b_i^2 \geq \ \ldots \geq \ b_i^n$, ხოლო C_i − ზედა სამკუთხა მატრიცაა, რომლის საკუთრივი რიცხვებიც აკმაყოფილებენ პირობას : $0 \leq \mathrm{Re}\, c_i^j < 1$

ყოველს განსაკუთრებულ წერტისლ შეესაბამებათავისი მატრიცა, რომელსაც მონოდრომიის მატრიცა ეწოდება.

<u>რას წარმოადგენენ ეს მონოდრომიის მატრიცები</u> ?პასუხი ამ კითხვაზე არის შემდეგიგანვიხილოთ რიმანის სფეროზე წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y(1)$$

სადაც $B(z)$ ცნობილი მატრიცული ფუნქიაა, ხოლო $y(z) = (y_1(z), y_2(z), \ldots , y_n(z))$უცნობი ვექტორული ფუნქციაა. $B(z)$ მატრიცული ფუნქია ჰოლომორფულია $S = \{a_1, a_2, \ldots , a_m\}$ დისკრეტული სიმრავლის დამატებაზე, ხოლო S კი B(z)-ის განსაკუთრებულ

წერტილთა სიმრავლეა. ასეთ შემთხვევაში ცნობილია რომ (1) სისტემას $z_0 \in X_m = CP^1 \backslash S$წერტილის მირე U მიდამოში ყოველთვის აქვს n წრფივად დამოუკიდებელი $y_1(z), y_2(z), \dots, y_n(z)$ ამონახსნთა სისტემა, რომელიც გაგრძელებადია ნებისმიერი წირის გასწვრივ. თუ $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ ით აღვნიშნავთ შეკრულ მარტივ წირებს, რომლებიც იწყებიან და მთავრდებიან z_0 წერტილში, ერთხელ შემოუვლიან $a_1, a_2, \dots, a_m$ წერტილებს საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით და მთლიანად მდებარეობენ X_m მრავალსახეობაზე, მაშინ $Y = \{y_1(z), y_2(z), \dots, y_n(z)\}$ ამონახსნთა სისტემა გადავა სხვა $\widetilde{Y}$ ამონახსნში, რომელიც Y-ს უკავშირდება ტოლობებით$Y = G_j \widetilde{Y}$, სადაც $G_j,\ j = 1, \dots, m$ გადაუგვარებელი მუდმივი მატრიცებია. $G_j,\ j = 1, \dots, m$მატრიცებს **მონოდრომიის მატრიცები** ეწოდებათ.

მონოდრომიის მატრიცები საშუალებას იძლევიან ავაგოთ ფიბრაცია რიმანის სფეროზე. ფიბრაციის აგებისათვის საჭირო არის განსაზღვრული იყოს ფუნქციები, რომლებსაც გადასვლის ფუნქციები ჰქვიათ და ეს ფუქნქციები უნდააკმაყოფილებდნენ გარკვეულ პირობებს, კერძოდ :

$$g_{ij} : U_i \bigcap U_j \rightarrow GL(p, C)$$

$$g_{ij} = {g_{ji}}^{-1} \text{ და} g_{ij} g_{jk} g_{kj} = I$$

იმ შემთხვევაში თუ U_i, U_j, U_kსიმრავლეებს ექნებათ არაცარიელი თანაკვეთა.

ამ ფიბრაციის აგების კონსტრუქცია არის შემდეგი :

<u>ფიბრაციის აგების კონსტრუქცია რიმანის სფეროზე</u> :

რიმანის სფეორზე განვიხილოთ სასრული რაოდენობის წერტილები $S = \{s_1 ;\ s_2 ; \dots ;\ s_n\}$ და მონოდრომიის $G_1 ;\ G_2 ; \dots ;\ G_n$მატრიცები ე. ი. მოცემული ყოფილა წარმოდგენა :

$$\rho : \pi_1(\tilde{C} \backslash S ;\ z_0) \rightarrow GL(p, C)$$

$$\rho(\gamma_i) = G_i ;\ \forall\, i = 1 \dots n$$

სადაც γ_i არის წირი, რომლის საწყისი და საბოლოოწერტილიარის z_0წერტილიდაშემოუვლის მხოლოდ ერთ z_i წერტილს $\forall\, i = 1 \dots n$.განვიხილოთ მრავალსახეობა $X_n = \tilde{C} \backslash S$ და ამ მრავალსახეობის დაფარვა ბმული და ცალადბმული U ღია სიმრავლეებით. ავირჩიოთ ისეთი დაფარვა, რომ თუ ორი სიმრავლის თანაკვეთა, ამ დაფარვიდან, არაცარიელია მაშინ მათი თანაკვეთაც ბმული და ცალადბმულია. X_n სათვის ყოველთვის შესაძლებელია ესეთი სასრული დაფარვის მონახვა. თითოეული U_i ღია

სიმრავლისათვის, მისგან ავირჩიოთ ერთი წერტილი და γ_i გზით შვაერთოთ ჩვენ მიერ არჩეული წერტილი z_0წერტილთან. ეს გზები დავაფიქსიროთ. თუ $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ განვიხილოთ გზა , δ_{ij} დავარქვათ, რომელიც მდებარეობს სიმრავლეში $U_i \cup U_j$ და აერთებს γ_i და γ_j მარყუჟების ბოლოებს. განვიხილოთ $\gamma_i \delta_{ij} {\gamma_j}^{-1}$ მარყუჟი. ამ მარყუჟს აქვს თავისი ჰომოტოპიის კლასი. $\rho(\gamma_i \delta_{ij} {\gamma_j}^{-1}) = g_{ij}$ გადაუგვარებელი მატრიცებია. ფიქსირებული γ_i და γ_j გზებისათვის g_{ij} მატრიცა არ არის დამოკიდებული δ_{ij} -ზე, რადგან ცალადბმული სიმრავლეებია როგორც დამფარავი სიმრავლეები ასევე მათი თანაკვეთები.

$U_i \cap U_j$ ამ სიმრავლის თითოეულ ელემენტს შევუსაბამოთ g_{ij} მატრიცა. ესეთნაირად ჩვენ მივიღებთ მუდმივ ასახვას:

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(p, C)$$

აგებიდან გამომდინარეობს რომ $g_{ij} = {g_{ji}}^{-1}$ და რადგან $\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{kj}$ ნულის ჰომოტოპიურია, ანუ z_0 წერტილში მოჭიმვადია, გამოვა $g_{ij} g_{jk} g_{kj} = 1$. ე. ი. g_{ij} ასახვები შეგვიძლია განვხილოთ როგორც გადასვლის ფუნქციები.ე. ი.ჩვენ ავაგეთკოციკლები.ამ პირობებში კი შესაძლებელია, რომ აიგოს ფიბრაცია .
აღსანიშნავია რომ ფიბრაცია არ იგება ცალსახად.

ნებისმიერი ჰოლომორფული ვექტორული ფიბრაცია რიმანის სფეროზე ეკვივალენტურია ერთგანზომილებიანი ფიბრაციები პირდაპირი ჯამისა :

$$F \sim H(k_1) \oplus \ldots \oplus H(k_p)$$

$H(k_i)$არის ფიბრაცის, რომლის კოორდინატული აღწერა არის ესეთი $(\mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}} \backslash \{0\}, z^{k_i})$

$k_1 \geq \cdots \geq k_p$ ამ მთელ რიცხვებს ეწოდებათ ფიბრაციის გახლეჩვის ტიპი.

<u>დებულება</u>: განვიხილოთ განსაკუთრებულ წერტილთა ორი სხვადასხვა სისტემა$s_1;\ s_2; \dots ; s_m$ და$\tilde{s}_1;\ \tilde{s}_2; \dots ; \tilde{s}_m$.თუარსებობს კონფორმული ასახვა $T\colon \tilde{C}\backslash\{s_1;\ s_2; \dots ; s_m\} \to \tilde{C}\backslash\{\tilde{s}_1;\ \tilde{s}_2; \dots ; \tilde{s}_m\}$ მაშინ $(k_1 \dots , k_p) = (\tilde{k}_1 \dots , \tilde{k}_p)$