ივანე ჯავახიშვილის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ნათია ხაჩიძე

მაღალი რიგის „თითქმის წრფივი'' ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნების რხევადობის კრიტერიუმები

მათემატიკის დეპარტამენტი

დოქტორანტის სემინარი

ხელმძღვანელი: რომან კოპლატაძე, ივანე ჯავახიშვილის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის, ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის, ასოცირებული პროფესორი

თბილისი 2017

სარჩევი

რეზიუმე

ნაშრომში განხილულია ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლება, რომლის კერძო შემთხვევაა შემდეგი სახის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება

$$u^{(n)}(t) + p(t)|u(t)|^{\eta(t)} sign(u(t)) = 0$$

სადაც $p \in L_{loc}(R_+, R)$, $\eta \in C(R_+, (0;+\infty))$.

ვიტყვით, რომ მოცემული განტოლება „თითქმის წრფივია'' თუ სრულდება პირობა

$$\lim_{t\to+\infty} \eta(t) = 1,$$

ხოლო თუ

$$\lim_{t\to+\infty} \eta(t) \neq 1 \quad \text{ან} \quad \limsup_{t\to+\infty} \eta(t) \neq 1,$$

მაშინ განტოლებას ეწოდება არსებითად არაწრფივი დიფერენციალური განტოლება.

ნაშრომში განხილულია „თითქმის წრფივი'' დიფერენციალური განტოლება და დადგენილია ამონახსნების რხევადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები.

Abstract

In this paper is considered functional-differential equation, which particular case is the ordinary differential equation

$$u^{(n)}(t) + p(t)|u(t)|^{\eta(t)} sign(u(t)) = 0$$

where $p \in L_{loc}(R_+, R)$, $\eta \in C(R_+, (0;+\infty))$.

this equation is “almost linear” if the conditions

$$\lim_{t\to+\infty} \eta(t) = 1,$$

holds, while if

$$\lim_{t\to+\infty}\eta(t)\neq 1 \quad \text{or} \quad \limsup_{t\to+\infty}\eta(t)\neq 1,$$

holds, then the equation is essentially nonlinear differential equation.

In this present is considered “almost linear”differential equation and are established necessaryand sufficient conditions of oscilations of solutions.

1. შესავალი

მოცემულ ნაშრომში შესწავლილია

$$u^{(n)}(t)+F(u)(t)=0 \tag{1.1}$$

ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლების რხევადი ამონახსნების არსებობის საკმარისი პირობები, სადაც $F:C(R_+,R)\to L_{loc}(R_+,R)$ არის უწყვეტი ასახვა.

ვთქვათ $\tau\in C(R_+,R),\ \lim\limits_{t\to+\infty}\tau(t)=+\infty,$ აღვნიშნოთ $V(\tau)$ -თი ისეთი F უწყვეტი ასახვების სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს $F(x)(t)=F(y)(t)$ ყოველი $t\in R_+$ თვის $x,y\in C(R_+,R),\quad x(s)=y(s)$ როცა $s\ge\tau(t).$ ყოველი $t_0\in R_+$ თვის ავნიშნოთ $H_{t_0,\tau}$ ით სიმრავლე ყველა $u\in C(R_+,R)$ ფუნქციებისა, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $u(t)\ne 0$ როცა $t\ge t_*$. სადაც $t_*=\min\{t_0,\tau_*(t_0)\},\ \tau_*(t)=\inf\{\tau(s):s\ge t\}.$

ქვემოთ ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ სრულდება ერთ-ერთი შემდეგი ორი პირობიდან

$$F(u)(t)\ge 0 \qquad \text{როცა} \quad t\ge t_0,\quad u\in H_{t_0,\tau}, \tag{1.2}$$

ან

$$F(u)(t)\le 0 \qquad \text{როცა} \quad t\ge t_0,\quad u\in H_{t_0,\tau}. \tag{1.3}$$

ვიტყვით, რომ ფუნქცია $u:[t_0,+\infty)\to R$ არის (1.1) განტოლების წესიერი ამონახსნი, თუ ის არის ლოკალურად აბსოლუტურად უწყვეტი $n-1$ რიგის ჩათვლით, $\sup\{|u(s)|:s\in(t,+\infty)\}>0$ როცა $t\ge t_0$ და არსებობს ფუნქცია $\bar{u}\in C(R_+,R)$ ისეთი, რომ $\bar{u}(t)\equiv u(t)$ როცა $t\in[t_0,+\infty)$ და სრულდება ტოლობა $\bar{u}^{(n)}(t)+F(u)(t)=0$ როცა $t\in[t_0,+\infty)$.

ვიტყვით, რომ ამონახსნი $u:[t_0,+\infty)\to R$ არის რხევადი თუ მას აქვს ნულების მიმდევრობა $(t_0,+\infty)$ შუალედში კრებადი $+\infty$ -კენ. სხვა შემთხვევაში ვიტყვით რომ არ არის რხევადი.

განსაზღვრება 1.1. ვიტყვით, რომ (1.1) განტოლებას გააჩნია A თვისება, თუ ლუწი n -ის შემთხვევაში მისი ყოველი წესიერი ამონახსნი რხევადია, ხოლო კენტი n -ის შემთხვევაში ან რხევადია ან აკმაყოფილებს პირობას

$$\left|u^{(i)}(t)\right|\downarrow 0 \qquad \text{როცა} \quad t\to+\infty \quad (i=0....,n-1)\,. \tag{1.4}$$

განსაზღვრება 1.2. ვიტყვით, რომ (1.1) განტოლებას გააჩნია B თვისება, თუ ლუწი n -ის შემთხვევაში მისი ყოველი წესიერი ამონახსნი ან რხევადია, ან აკმაყოფილებს (1.4) პირობას, ან

$$\left|u^{(i)}(t)\right|\uparrow +\infty \qquad \text{როცა} \quad t\to+\infty \quad (i=0....,n-1) \tag{1.5}$$

ხოლო კენტი n -ის შემთხვევაში ან რხევადია ან აკმაყოფილებს (1.5) პირობას.

1836 წელს შტურმმა [35] დაამტკიცა მეორე რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებების შედარების თეორემა, რომელიც მოგვიანებით ფართოდ გამოიყენებოდა სასაზღვრო პრობლემებისა და ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევის შესასწავლად. შტურმის კლასიკური თეორემის გამოყენებით კნეზერმა დაამტკიცა, რომ თუ

$$\liminf_{t\to+\infty} t^2 p(t) > \frac{1}{4},$$

მაშინ ყოველი ამონახსნი განტოლებისა

$$u''(t) + p(t)u(t) = 0 \tag{1.6}$$

რხევადია.

მაღალი რიგის წრფივ ფუნქციონალურ-დიფერენციალურ განტოლებებში შტურმის თეორემის ნათელი ანალოგი არ გვაქვს. კვლევებისას წარმოიქმნა გარკვეული სირთულეები. კნეზერი იყო პირველი ვინც აჩვენა, რომ საკმარისია შესრუდეს პირობა

$$\liminf_{t\to+\infty} t^{n/2} p(t) > 0,$$

მაშინ განტოლებას

$$u^{(n)}(t) + p(t)u(t) = 0 \tag{1.7}$$

აქვს A თვისება.

შედარების თეორემის ერთ-ერთი შედეგია, რომ თუ გვაქვს უტოლობა

$$p(t) \geq q(t) \geq 0 \quad \text{როცა} \quad t \in R_+$$

და განტოლებას

$$u^{(n)}(t) + q(t)u(t) = 0 \tag{1.8}$$

აქვს A თვისება, მაშინ (1.7) განტოლება აქვს ასევე A თვსება.

ჭანტურიამ [4] აჩვენა, რომ თუ სრულდება უტოლობა

$$p(t) \leq q(t) \leq 0 \quad \text{როცა} \quad t \in R_+$$

და (1.8) განტოლებას აქვს B თვისება, მაშინ (1.7) განტოლებასაც აქვს ასევე B თვისება.

შედარების თეორემიდან ვღებულობ, რომ თუ $p(t) \geq 0$ ($p(t) \leq 0$) და

$$\liminf_{t\to+\infty} t^n |p(t)| > M_n \quad (M_n^*) \tag{1.9}$$

სადაც

$$
\begin{aligned}
&M_n = \max\{-\lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+1) : \lambda \in [0;n-1]\} \\
&(M_n^* = \max\{\lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+1) : \lambda \in [0;n-1]\}).
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

მაშინ (1.7) განტოლება აქვს A თვისება (B თვისება).

საკმარისი პირობები, იმისათვის, რომ (1.7) განტოლებას ჰქონდეს A(B) თვისება, მიღებულია [9], [33], [2], [13] ნაშრომებში. მოგვიანებით ჭანტურიამ [6] დაამტკიცა ინტეგრალური შედარების თეორემა, რომელიც ინტეგრალური განზოგადებაა ზემოთ ხსენებული შედარების თეორემის. ამ თეორემის გამოყენებით მან შეძლო გაეუმჯობესებინა (1.9) პირობა. კერძოდ, მან აჩვენა, რომ თუ $p(t) \ge 0$ $\left(p(t) \le 0\right)$ და სრულდება უტოლობა

$$
\liminf_{t\to+\infty} t\int_t^{+\infty} s^{n-2}p(s)ds > M_n \qquad \left(\liminf_{t\to+\infty} t^2\int_t^{+\infty} s^{n-3}|p(s)|ds > \frac{M_n^*}{2}\right)
$$

სადაც $M_n(M_n^*)$ განსაზღვრულია (1.10)-ით, მაშინ (1.7) განტოლებას აქვს A თვისება (B თვისება). კოპლატაძემ [18], [19] დაამტკიცა ინტეგრალური შედარების თეორემა ორი სახის დიფერენციალური განტოლებისათვის დაგვიანებული არგუმენტით.

ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება

$$
u^{(n)}(t) + p(t)|u(t)|^{\eta(t)} sign(u(t)) = 0 \tag{1.11}
$$

კერძო შემთხვევაა (1.1) განტოლების, სადაც $p \in L_{loc}(R_+, R)$, $\eta \in C(R_+;(0,+\infty))$.

ვიტყვით, რომ განტოლება „თითქმის წრფივია“ თუ $\lim\limits_{t\to+\infty}\eta(t) = 1$, ხოლო თუ არსებობ $\lambda \in (0;1)$ $\left(\lambda \in (1;+\infty)\right)$ ისეთი, რომ სრულდება პირობა $\eta(t) \le \lambda \left(\eta(t) \ge \lambda\right)$, მაშინ (1.11) განტოლება არის არსებითად არაწრფივი ემდენ-ფაულერის სახის დიფერენციალური განტოლება.

(1.11) განტოლების რხევადობის კრიტერიუმები, როცა $\eta(t) \equiv \lambda \ne 1$ და $n = 2$, პირველად შეისწავლა ატკინსონმა [3]. კიღურაძემ შეისწავლა ანალოგიური პრობლემა მაღალი რიგის ემდენ-ფაულერის განტოლებისთვის, როცა n ლუწია და $\lambda > 1$ [14]. ლიცკომ და სვეკმა დაამტკიცეს აუცილებელი და საკმარისი პირობები ლუწი და კენტი n-ის შემთხვევაში, როცა $0 < \lambda < 1$ და $\lambda > 1$. მრავალი სტატია და კვლევები მიეძღვნა ჩვეულებრივ და გადახრილარგუმენტიანი დიფერენციალური განტოლებების შესწავლას [1], [7], [8], [10], [11], [12], [15], [20]-[25], [30], [31]. ანალოგიური პრობლემა

შესწავლილია ნაშრომში [29], სადაც ხარისხის მაჩვენებელი მუდმივია. (1.1) სახის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნების რხევადობის საკითხის შესწავლა დაიწყო 1990 წელს. სახელდობრ, პირველად ნაშრომში იყო გამოყენებული ახალი მიდგომები ამონახსნების რხევადობის დასადგენად [22]. განზოგადოებული ემდენ-ფაულერის „თითქმის წრფივი" დიფერენციალური განტოლებების გამოკვლევა პირველად გამოჩნდა [27]-[29] ნაშრომებში. A თვისების შემთხვევაში ოპტიმალური შედეგები მიღებულია [29]-ში. მიღებული შედეგებიდან (1.11) განტოლების შემთხვევაში, როცა $\lim\limits_{t\to+\infty}\eta(t)=1$ და $\eta(t)\neq 1$, კარგად ჩანს მსგავსება წრფივ და არაწრფივი განტოლებების შემთხვევაში. ამის მიხედვით, „თითქმის წრფივ" განტოლებებს უკავიათ შუალედური ადგილი წრფივ და არაწრფივ განტოლებებს შორის.

ამ ნაშრომში შესწავლილია „თითქმის წრფივი" განტოლებებისთვის ორივე A და B თვისებების შემთხვევა. A თვისების შემთხვევაში შესაძლებელი აღმოჩნდა [29]-ში მიღებული შედეგების გაუმჯობესება.

2. ზოგიერთი დამხმარე ლემა

აღვნიშნოთ $\widetilde{C}_{loc}^{n-1}([t_0,+\infty))-$ით სიმრავლე ყველა $u:[t_0,+\infty)\to R$ ფუნქციებისა, რომლებიც აბსოლუტურად უწყვეტია ყოველ განსაზღვრულ ქვეინტერვალზე $[t_0,+\infty)$ ინტერვალისა. ასევე აბსოლუტურად უწყვეტია მათი წარმოებულებიც $n-1$რიგამდე ჩათვლით.

ლემა 2.1. ვთქვათ $u(t)\in\widetilde{C}_{loc}^{n-1}([t_0,+\infty)),\ u(t)>0,\ u^{(n)}(t)\le 0\ (u^{(n)}(t)\ge 0)$ როცა $t\ge t_0$ და $u^{(n)}(t)\neq 0$ უსასრულობის ნებისმიერ მიდამოში, მაშინ არსებობს $t_1\ge t_0$ და $\ell\in\{0,...,n-1\}$ ისეთი, რომ $\ell+n$ კენტია ($\ell+n$ ლუწია) და

$$u^{(i)}(t)>0 \quad \text{როცა} \quad t\ge t_1 \quad (i=0,...,\ell-1) \tag{2.1$_\ell$}$$

$$(-1)^{i+\ell}u^{(i)}(t)\ge 0 \quad \text{როცა} \quad t\ge t_1 \quad (i=0,...,\ell-1).$$

შენიშვნა. იმ შემთხვევაში როცა $\ell=0$ ვიგულისხმებთ, რომ (2.1_ℓ) პირობის მეორე უტოლობა სრულდება, ხოლო როცა $\ell=n$ სრულდება პირველი უტოლობა (2.1_ℓ) პირობიდან.

დამტკიცება: ლემის პირობით $u^{(n)}(t) \le 0$ როცა $t \ge t_0$. მაშინ არსებობს რაიმე $t^* \ge t$ ისეთი, რომ სრულდება შემდეგი ორიდან ერთ-ერთი $u^{(n-1)}(t) \le 0$ ან $u^{(n-1)}(t) \ge 0$.

ვთქვათ სრულდება $u^{(n-1)}(t) \le 0$. განვიხილოთ $u^{(n-2)}(t)$

$$u^{(n-2)}(t) = u^{(n-2)}(t_0) + \int_{t_0}^{t} u^{(n-1)}(t)dt.$$

როცა $t \to +\infty$ მივიღებთ, რომ $u^{(n-2)}(t) \le 0$, რადგან $u^{(n-2)}(t_0)$ რაღაც ფიქსირებული რიცხვია. ანალოგიურად გვექნება, რომ $u^{(n-3)}(t) \le 0$ და ა.შ. საბოლოოდ გვექნება $u(t) \le 0$. რაც ეწინააღმდეგება პირობას.

განვიხილოთ მეორე პირობა $u^{(n-1)}(t) \ge 0$. აქ გვაქვს კვლავ ორი შემთხვევა $u^{(n-2)}(t) \le 0$ და $u^{(n-2)}(t) \ge 0$, რაღაც ადგილიდან დაწყებული. განვიხილოთ $u^{(n-2)}(t) \ge 0$ როცა $t \ge t^*_{00}$. მაშინ მივიღებთ, რომ $u^{(n-3)}(t) \ge 0$ როცა $t \ge t^{**}_{00} \ge t^*_{00}$. საბოლოოდ გვექნება, რომ $u(t) > 0$. ანუ წარმოებულებმა n რიგიდან დაიწყეს ნიშანცვლა, ე.ი. $\ell = n-1$. მაშინ სრულდება (2.1_ℓ) პირობები. $u^{(n-2)}(t) \le 0$ შემთხვევისთვის ჩავატაროთ ანალოგიური მსჯელობა როგორც ზევით. ამით ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.2. ვთქვათ $u(t) \in \tilde{C}^{n-1}_{loc}([t_0,+\infty))$ და (2.1_ℓ) სრულდება რომელიმე $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$ -თვის $\ell + n$ კენტია ($\ell + n$ ლუწია). მაშინ

$$\int_{t_0}^{+\infty} t^{n-\ell-1} \left| u^{(n)}(t) \right| dt < +\infty. \tag{2.2}$$

გარდა ამისა, თუ

$$\int_{t_0}^{+\infty} t^{n-\ell} \left| u^{(n)}(t) \right| dt = +\infty, \tag{2.3}$$

არსებობს $t_* \ge t_0$ ისეთი, რომ

$$\frac{u^{(i)}(t)}{t^{\ell-i}} \downarrow 0, \qquad \frac{u^{(i)}(t)}{t^{\ell-i-1}} \uparrow +\infty, \qquad (i = 0,\dots,\ell-1) \qquad (2.4_i)$$

$$u(t) \ge \frac{t^{\ell-1}}{\ell!} u^{(\ell-1)}(t) \qquad \text{როცა} \qquad t \ge t_* \tag{2.5}$$

და

$$u(t)\ge \frac{1}{(\ell-1)!(n-\ell-1)!}\int_{t_*}^{t}(t-s)^{\ell-1}\int_{s}^{+\infty}(\xi-s)^{n-\ell-1}\left|u^{(n)}(\xi)\right|d\xi ds \qquad \text{როცა} \quad t\ge t_*. \qquad (2.6)$$

ლემა 2.3. ვთქვათ $t_0\in R_+$, $\varphi,\psi\in C([t_0,+\infty),(0,+\infty))$, ψ არის არაზრდადი ფუნქცია და

$$\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=+\infty, \qquad (2.7)$$

$$\liminf_{t\to+\infty}\psi(t)\tilde{\varphi}(t)=0, \qquad (2.8)$$

სადაც $\tilde{\varphi}(t)=\inf\{\varphi(s): s\ge t\ge t_0\}$. მაშინ არსებობს რაიმე $\{t_k\}_{k=1}^{+\infty}$ წერტილთა მიმდევრობა ისეთი, რომ $t_k\uparrow+\infty$ როცა $k\to+\infty$ და

$$\tilde{\varphi}(t_k)=\varphi(t_k), \qquad \psi(t)\tilde{\varphi}(t)\ge\psi(t_k)\tilde{\varphi}(t_k) \qquad t_0\le t\le t_k \qquad (\text{k=1,2,…}) \qquad (2.9)$$

და

$$\lim_{t\to+\infty}\psi(t_k)\varphi(t_k)=0. \qquad (2.10)$$

<u>დამტკიცება:</u> $t\in(t_0;+\infty)$. განვსაზღვროთ სიმრავლეები E_i $(i=1,2)$ შემდეგნაირად

$$t\in E_1\Leftrightarrow\varphi(t)=\tilde{\varphi}(t),$$

$$t\in E_2\Leftrightarrow\tilde{\varphi}(s)\psi(s)\ge\tilde{\varphi}(t)\psi(t), \quad \text{როცა} \quad s\in[t_0,t].$$

(2.7) და (2.8)-დან ნათელია, რომ $\sup E_i=+\infty$. ვაჩვენოთ, რომ $\sup E_1\cap E_2=+\infty$. მართლაც თუ დავუშვებთ, რომ $t_*\in E_2$ და $t_*\notin E_1$. (2.7)-დან არსებობს $t^*>t_*$ ისეთი, რომ $\tilde{\varphi}(t)=\varphi(t_*)$ როცა $t\in[t_*,t^*]$ და $\tilde{\varphi}(t^*)=\varphi(t_*)$ მეორეს მხრივ, ψ არის არაზრდადი ფუნქცია, ჩვენ გვაქვს

$$\psi(t)\tilde{\varphi}(t)\ge\psi(t^*)\tilde{\varphi}(t^*) \quad \text{როცა} \quad t\in[t_0,t^*].$$

ამიტომ $t^*\in E_1\cap E_2$. ზემოთ აღნიშნული მსჯელობის გამეორებით ჩვენ დავადგინეთ, რომ სრულდება

$$\sup E_1\cap E_2=+\infty.$$

შესაბამისად, არსებობს მიმდევრობა $\{t_k\}$, ისეთი რომ $t_k \uparrow +\infty$ როცა $k \to +\infty$ და (2.9) სრულდება.

ქვემოთ ყველგან ვიგულისხმოთ, რომ სრულდება უტოლობა

$$|F(u)(t)| \geq \sum_{i=1}^{m} \int_{\tau_i(t)}^{\sigma_i(t)} |u(s)|^{\mu_i(s)} d_s r_i(s,t) \qquad \text{როცა} \quad t \geq t_0, \ u \in H_{t_0,\tau} \tag{2.11}$$

სადაც

$$\mu_i \in C(R_+;(0,+\infty)), \quad \tau_i, \sigma_i \in C(R_+;R_+), \quad \tau_i(t) \leq \sigma_i(t) \quad \text{როცა} \quad t \in R_+, \tag{2.12}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \tau_i(t) = +\infty \quad i = 1,\dots,m,$$

$r_i : R_+ \times R_+ \to R_+$ არის ზომადი t ცვლადის მიმართ და არაკლებადი ფუნქცია s ცვლადის მიმართ, $i = 1,\dots,m.$

3. აუცილებელი პირობები მონოტონური ამონახსნების არსებობისთვის

ამ თავში დადგენილია საკმარისი პირობები (2.1_ℓ) სახის ამონახსნების არსებობისათვის. ანალოგიური შედეგი როცა (1.2) პირობა სრულდება მეღებულია [29]-ში.

ქვემოთ ყველგან გამოვიყენებთ შემდეგ აღნიშვნებს:

ვთქვათ $t_0 \in R_+$, $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$. U_{ℓ,t_0} -ით აღვნიშნეთ (1.1) განტოლების წესიერ ამონახსნთა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ (2.1_ℓ) პირობას.

$$\Lambda_{\ell,u} = \{\lambda \mid \lambda \in [\ell-1,\ell], \lim_{t\to+\infty} t^{-\lambda} u(t) = +\infty\}, \qquad u \in U_{\ell,t_0} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} &\mu(t) = \min\{1, \mu_i(t); i = 1,\dots,m\}, \\ &\tau_*(t) = \inf\{\tau(s) : s \geq t\}, \qquad \tau(t) = \min\{t, \tau_i(t); i = 1,\dots m\}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$h_{1,\varepsilon}(\lambda)=\begin{cases}0, & \lambda=\ell-1\\ \varepsilon, & \lambda\in(\ell-1,\ell]\end{cases},\quad h_{1,\varepsilon}(\lambda)=\begin{cases}0, & \lambda=\ell\\ \varepsilon, & \lambda\in[\ell-1,\ell)\end{cases},\quad h_\varepsilon(\lambda)=h_{1,\varepsilon}(\lambda)+h_{2,\varepsilon}(\lambda),\qquad (3.3)$$

$$g_\ell(t,\varepsilon,\lambda)=\int_t^{+\infty}(\xi-t)^{n-\ell-1}\sum_{i=1}^{n}\int_{\tau_i(\xi)}^{\sigma_i(\xi)}s^{(\lambda-h_{1,\varepsilon})\mu_i(s)}d_s r_i(s,\xi)d\xi,\qquad (3.4_\ell)$$

$$\rho_{\ell,1}(t,\varepsilon,\lambda)=t^{\left(1-1/\mu(t)\right)h_\varepsilon(\lambda)-\lambda-h_{2,\varepsilon}(\lambda)}\int_0^t(t-s)^{\ell-1}(\tau_*(s))^{h_\varepsilon(\lambda)}g_\ell(s,\varepsilon,\lambda)ds,\qquad (3.5_\ell)$$

$$\rho_{\ell,2}(t,\varepsilon,\lambda)=t^{\left(1-1/\mu(t)\right)h_\varepsilon(\lambda)-\lambda-h_{2,\varepsilon}(\lambda)}\int_0^t(t-s)^{\ell-1}(s)^{h_\varepsilon(\lambda)}g_\ell(s,\varepsilon,\lambda)ds.\qquad (3.6_\ell)$$

შენიშვნა 3.2. $\Lambda_{\ell,u}$ სიმრავლის განმარტებაში ვიგულისხმებთ, რომ თუ არ არის $\lambda\in[\ell-1,\ell]$ ისეთი, რომ $\lim\limits_{t\to+\infty}t^{-\lambda}u(t)=+\infty$, მაშინ $\Lambda_{\ell,u}=\varnothing$.

თეორემა 3.1. ვთქვათ $F\in V(\tau)$, (1.2) ((1.3)), (2.11), (2.12) პირობები სრულდება, $\ell\in\{1,\dots,n-1\}$ $\ell+n$ კენტია ($\ell+n$ ლუწია),

$$\int_0^{+\infty}t^{n-\ell}\sum_{i=1}^{m}\int_{\tau_i(t)}^{\sigma_i(t)}s^{(\ell-1)\mu_i(s)}d_s r_i(s,t)dt=+\infty,\qquad (3.7_\ell)$$

$$\int_0^{+\infty}t^{n-\ell-1}\sum_{i=1}^{m}\int_{\tau_i(t)}^{\sigma_i(t)}s^{\ell\mu_i(s)}d_s r_i(s,t)dt=+\infty,\qquad (3.8_\ell)$$

და

$$\liminf_{t\to+\infty}\mu_i(t)>0\qquad (i=1,\dots,m).\qquad (3.9)$$

გარდა ამისა, თუ $U_{\ell,t_0}\neq\varnothing$ ზოგიერთი $t_0\in R_+$ -თვის. მაშინ არსებობს $\lambda_0\in[\ell-1,\ell]$ ისეთი, რომ

$$\limsup_{\varepsilon\to0^+}\left(\liminf_{t\to+\infty}\rho_{\ell,1}(t,\varepsilon,\lambda_0)\right)\le(\ell-1)!(n-\ell-1)!,\qquad (3.10_\ell)$$

სადაც $\rho_{\ell,1}$ განსზღვრულია (3.4_ℓ) და (3.5_ℓ) ტოლობებით.

დამტკიცება: ვთქვათ $t_0 \in R_+$ და $U_{\ell,t_0} \neq \varnothing$. U_{ℓ,t_0} სიმრავლის განმარტებიდან (1.1) განტოლებას აქვს წესიერი ამონახსნი $u \in U_{\ell,t_0}$ რომელიც აკმაყოფილებს (2.1_ℓ) პირობას. (1.2)((1.3)), (2.1_ℓ) , (2.5), (2.11) და (3.7_ℓ) -ის თანახმად ცხადია სრულდება (2.3). ამგვარად, ლემა 2.2.-დან, (2.4_0) პირობა სრულდება და

$$u(t) \geq \frac{1}{(\ell-1)!(n-\ell-1)!}\int_{t_*}^{t}(t-s)^{\ell-1}\int_{s}^{+\infty}(\xi-s)^{n-\ell-1}\sum_{i=1}^{m}\int_{\tau_i(\xi)}^{\sigma_i(\xi)}(u(\xi_1))^{\mu_i(\xi_1)}d_{\xi_1}r_i(\xi_1,\xi)ds \qquad (3.11)$$

როცა $t \geq t_*$ სადაც $t_* \geq t_0$ საკმარისად დიდი რიცხვია. (2.4_0)-ში ჩვენ გვაქვს $\ell-1 \in \Lambda_{\ell,u}$ და $\ell \notin \Lambda_{\ell,u}$. ამიტომ $\Lambda_{\ell,u} \subset [\ell-1,\ell)$. და $\lambda_0 = \sup \Lambda_{\ell,u} \in [\ell-1,\ell]$. (3.8_ℓ)-დან გვაქვს $\frac{u(t)}{t^\ell} \downarrow 0$ როცა $t \uparrow +\infty$, მაშინ (2.4_0) და (3.3)-ის თანახმად, საკმარისად მცირე დადებითი ε -თვის მივიღებთ

$$\liminf_{t\to+\infty}\frac{u(t)}{t^{\lambda_0+h_{2\varepsilon}(\lambda_0)}} = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty}\frac{u(t)}{t^{\lambda_0-h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}} = +\infty \qquad (3.12)$$

და

$$\ell-1 \leq \lambda_0 - h_{1\varepsilon}(\lambda_0) < \lambda_0 + h_{2\varepsilon}(\lambda_0) \leq \ell. \qquad (3.13)$$

აღვნიშნოთ

$$\varphi(t) = \left(\frac{u(t)}{t^{\lambda_0-h_{1,\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu(t)} \qquad (3.14)$$

და

$$\widetilde{\varphi}(t) = \inf\{\varphi(s) : s \geq t\}. \qquad (3.15)$$

ვაჩვენოთ, რომ

$$\liminf_{t\to+\infty} t^{-h_\varepsilon(\lambda_0)}\widetilde{\varphi}(t) = 0, \qquad (3.16)$$

სადაც $h_\varepsilon(\lambda_0)$ განსაზღვრულია (3.3)-ით. მართლაც, (3.15)-ის თანახმად გვაქვს

$$t^{-h_\varepsilon(\lambda_0)}\widetilde{\varphi}(t) \leq t^{-h_\varepsilon(\lambda_0)}\left(\frac{u(t)}{t^{\lambda_0-h_{1,\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu(t)} = t^{(\mu(t)-1)h_\varepsilon(\lambda_0)}\left(\frac{u(t)}{t^{\lambda_0+h_{2,\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu(t)}. \qquad (3.17)$$

რადგან $\mu(t) \le 1$, (3.12)-ის პირველი პირობის და (3.9)-ის თანახმად, (3.17)-დან (3.16) აკმაყოფილებს ყოველი $\varepsilon > 0$-თვის (3.13) პირობას. (3.2) და (3.12)-ის პირველი პირობის გამოყენებით, (3.11)-დან გვაქვს

$$u(\tau_*(t)) \ge \frac{1}{(\ell-1)!(n-\ell-1)!} \int_{t_*}^{\tau_*(t)} (\tau_*(t)-s)^{\ell-1} \int_s^{+\infty} (\xi - s)^{n-\ell-1} \times$$

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{\tau_i(\xi)}^{\sigma_i(\xi)} \left(\frac{u(\xi_1)}{\xi_1^{\lambda_0 - h_{1,\varepsilon}(\lambda_0)}} \right)^{\mu_i(\xi_1)} \xi_1^{(\lambda_0 - h_{1,\varepsilon}(\lambda_0))\mu_i(\xi_1)} d_{\xi_1} r_i(\xi_1, \xi) d\xi ds \ge \frac{1}{(\ell-1)!(n-\ell-1)!} \int_{t_*}^{\tau_*(t)} (\tau_*(t)-s)^{\ell-1} \int_s^{+\infty} (\xi-s)^{n-\ell-1} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{m} \int_{\tau_i(\xi)}^{\sigma_i(\xi)} \left(\frac{u(\xi_1)}{\xi_1^{\lambda_0 - h_{1,\varepsilon}(\lambda_0)}} \right)^{\mu(\xi_1)} \xi_1^{(\lambda_0 - h_{1,\varepsilon}(\lambda_0))\mu_i(\xi_1)} d_{\xi_1} r_i(\xi_1, \xi) d\xi ds \quad \text{როცა} \quad t \ge t_*.$$

ამგვარად, (3.2) და (3.15)-ის თანახმად, უკანასკნელი უტოლობიდან

$$u(\tau_*(t)) \ge \frac{1}{(\ell-1)!(n-\ell-1)!} \int_{t_*}^{\tau_*(t)} (\tau_*(t)-s)^{\ell-1} \widetilde{\varphi}(\tau_*(s)) g_\ell(s, \varepsilon, \lambda_0) ds \quad \text{როცა} \quad t \ge t_1 \tag{3.18}$$

სადაც $g_\ell(s, \xi, \lambda_0)$ განსაზღვრულია (3.4_ℓ) – ით. (3.9), (3.12) და (3.16)-ში ცხადია, რომ ფუნქციები $\varphi(t)$ და $\psi(t) = t^{-h_\varepsilon(\lambda_0)}$ აკმაყოფილებს (2.3) ლემის პირობებს, სადაც $h_\varepsilon(\lambda_0)$ განსაზღვრულია (3.3)-ით. ამიტომ არსებობს მიმდევრობა $\{t_k\}_{k=1}^{+\infty}$ ისეთი, რომ $t_k \uparrow +\infty$ როცა და

$$\psi(\tau_*(t_k))\widetilde{\varphi}(\tau_*(t_k)) \le \psi(\tau_*(t))\widetilde{\varphi}(\tau_*(t)) \qquad t_1 \le t \le t_k \tag{3.19}$$

$$\widetilde{\varphi}(\tau_*(t_k)) = \varphi(\tau_*(t_k)) = \left(\frac{u(\tau_*(t_k))}{\tau_*^{\lambda_0 - h_{1,\varepsilon}(\lambda_0)}(t_k)} \right)^{\mu(\tau_*(t_k))} \qquad k = k_0, k_0+1, \dots \tag{3.20}$$

და

$$\lim_{t \to +\infty} \psi(\tau_*(t_k))\varphi(\tau_*(t_k)) = 0, \tag{3.21}$$

სადაც t_1 და k_0 საკმარისად დიდი რიცხვებია და ფუნქციები τ_*, μ და $\widetilde{\varphi}$ განსაზღვრულია შესაბამისად (3.2) და (3.15) ტოლობებით. (3.19) და (3.20-ის გათვალისწინებით (3.18)-დან მივიღებთ

$$u(\tau_*(t_k)) \geq \frac{(\tau_*(t_k))^{-h_\varepsilon(\lambda_0)}}{(\ell-1)!(n-\ell-1)!} \int_{t_1}^{\tau_*(t_k)} (\tau_*(t_k)-s)^{\ell-1} \tau_*^{h_\varepsilon(\lambda_0)}(s) g_\ell(s,\varepsilon,\lambda_0) ds =$$

$$= \frac{(\tau_*(t_k))^{-h_\varepsilon(\lambda_0)} (u(\tau_*(t_k)))^{\mu(\tau_*(t_k))}}{(\ell-1)!(n-\ell-1)! \tau_*^{(\lambda_0-h_{1,\varepsilon}(\lambda_0))\mu(\tau_*(t_k))}} \int_{t_1}^{\tau_*(t_k)} (\tau_*(t_k)-s)^{\ell-1} \tau_*^{h_\varepsilon(\lambda_0)}(s) g_\ell(s,\varepsilon,\lambda_0) ds \quad k \geq k_0$$

ამგვარად გვაქვს

$$\left(\left(\frac{u(\tau_*(t_k))}{\tau_*^{\lambda_0-h_{1,\varepsilon}(\lambda_0)}(t_k)}\right)^{\mu(\tau_*(t_k))} (\tau_*(t_k))^{-h_\varepsilon(\lambda_0)}\right)^{\frac{1=\mu(\tau_*(t_k))}{\mu(\tau_*(t_k))}} \geq \frac{(\tau_*(t_k))^{-\lambda_0-h_{2\varepsilon}(\lambda_0)+\left(1-1/\mu(\tau_*(t_k))\right)h_\varepsilon(\lambda_0)}}{(\ell-1)!(n-\ell-1)!} \times$$

$$\times \int_{t_1}^{\tau_*(t_k)} (\tau_*(t_k)-s)^{\ell-1} (\tau_*(s))^{h_\varepsilon(\lambda_0)} g_\ell(s,\varepsilon,\lambda_0) ds, \quad \text{როცა} \quad k \geq k_0 \qquad (3.22)$$

მართლაც $\mu(\tau_*(t_k)) \leq 1$, (3.21)-ის თანახმად საკმარისად დიდი k-თვის გვაქვს

$$\left(\left(\frac{u(\tau_*(t_k))}{\tau_*^{\lambda_0-h_{1,\varepsilon}(\lambda_0)}(t_k)}\right)^{\mu(\tau_*(t_k))} (\tau_*(t_k))^{-h_\varepsilon(\lambda_0)}\right)^{\frac{1=\mu(\tau_*(t_k))}{\mu(\tau_*(t_k))}} \leq 1.$$

ამიტომ, საკმარისად დიდი k-თვის (3.22)-დან მივიღებთ

$$(\tau_*(t_k))^{-\lambda_0-h_{2,\varepsilon}(\lambda_0)+\left(1-1/\mu(\tau_*(t_k))\right)h_\varepsilon(\lambda_0)} \times \left[\int_0^{\tau_*(t_k)} (\tau_*(t_k)-s)^{\ell-1} (\tau_*(t_k))^{h_\varepsilon(\lambda_0)} g_\ell(s,\varepsilon,\lambda_0) ds - \right.$$

$$\left. - \int_0^{t_1} (\tau_*(t_k)-s)^{\ell-1} (\tau_*(s))^{h_\varepsilon(\lambda_0)} g_\ell(s,\varepsilon,\lambda_0) ds \right] \leq (\ell-1)!(n-\ell-1)!$$

სადაც g_ℓ განსაზღვრულია (3.4_ℓ) ტოლობით.თუ გავითვალისწინებთ $-\lambda_0 - h_{2,\varepsilon}(\lambda_0) + \ell - 1 < 0$ და $\mu(\tau_*(t_k)) \leq 1$, უკანასკნელი უტოლობიდან მივიღებთ

$$\limsup_{k\to+\infty}(\tau_*(t_k))^{-\lambda_0-h_{2,\varepsilon}(\lambda_0)+\left(1-1/\mu(\tau_*(t_k))\right)h_\varepsilon(\lambda_0)}\times\left[\int_0^{\tau_*(t_k)}(\tau_*(t_k)-s)^{\ell-1}(\tau_*(t_k))^{h_\varepsilon(\lambda_0)}g_\ell(s,\varepsilon,\lambda_0)ds\leq\right.$$

$$\leq(\ell-1)!(n-\ell-1)!$$

მაშასადამე

$$\liminf_{k\to+\infty}t^{-\lambda_0-h_{2,\varepsilon}(\lambda_0)+\left(1-1/\mu(\tau_*(t_k))\right)h_\varepsilon(\lambda_0)}\times\left[\int_0^{t}(t-s)^{\ell-1}(\tau_*(s))^{h_\varepsilon(\lambda_0)}g_\ell(s,\varepsilon,\lambda_0)ds\leq\right.$$

$$\leq(\ell-1)!(n-\ell-1)!$$

ამგვარად, უკანასკნელ უტოლობაში თუ ავიღებთ ზედა ზღვარს როცა $\varepsilon\to 0+$, მივიღებთ (3.10_ℓ), სადაც ფუნქცია $\rho_{\ell 1}$ განსაზღვრულია $(3.5_\ell)-$ ით. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3.2. ვთქვათ (3.1) თეორემის პირობები სრულდება და

$$\liminf_{t\to+\infty}\frac{\tau_i(t)}{t}>0\qquad\qquad (i=1,\ldots,m)\qquad\qquad (3.23)$$

მაშინ არსებობს $\lambda_0\in[\ell-1,\ell]$ ისეთი, რომ

$$\limsup_{\varepsilon\to0+}\left(\liminf_{t\to+\infty}\rho_{\ell 2}(t,\varepsilon,\lambda_0)\right)\leq(\ell-1)!(n-\ell-1)!\qquad\qquad(3.24_\ell)$$

სადაც $\rho_{\ell,2}$ განსაზღვრულია (3.4_ℓ) და (3.6_ℓ) ტოლობებიდან.

დამტკიცება: 3.2 თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ 3.1 თეორემის (3.10_ℓ) პირობა მოიცავს (3.24_ℓ) , სადაც $\rho_{\ell,1}$ და $\rho_{\ell,2}$ შესაბამისად განსაზღვრულია (3.5_ℓ) და (3.6_ℓ) ტოლობებით. მართლაც, (3.23)-ის თანახმად არსებობს $c>0$ და $t_*>0$ ისეთი, რომ $\tau_*(t)\geq ct$, როცა $t\geq t_*$. სადაც τ_* განსაზღვრულია (3.2) ტოლობით. (3.4_ℓ) და (3.5_ℓ) -ის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ

$$\rho_{\ell,1}(t,\varepsilon,\lambda_0)\geq t^{\left(1-1/\mu(t)\right)h_\varepsilon(\lambda_0)-\lambda_0-h_{2,\varepsilon}(\lambda_0)}\times\left[\int_0^{t_*}(t-s)^{\ell-1}(\tau_*(s))^{h_\varepsilon(\lambda_0)}g_\ell(s,\varepsilon,\lambda_0)ds+\right.$$

$$+c^{h_\varepsilon(\lambda_0)}\int_{t_*}^{t}(t-s)^{\ell-1}(\tau_*(s))^{h_\varepsilon(\lambda_0)}g_\ell(s,\varepsilon,\lambda_0)ds\Bigg] \tag{3.25}$$

(3.2)-ის პირველიპირობის და (3.13)-ის გამო, ჩვენ გვაქვს

$$\left(1-\frac{1}{\mu(t)}\right)h_\varepsilon(\lambda_0)-\lambda_0-h_{2,\varepsilon}(\lambda_0)\le-\lambda_0-h_{2,\varepsilon}(\lambda_0)\le 1-\ell.$$

ამიტომ

$$\lim_{t\to+\infty}t^{\left(1-\frac{1}{\mu(t)}\right)h_\varepsilon(\lambda_0)-\lambda_0-h_{2,\varepsilon}(\lambda_0)}\int_0^{t_*}(t-s)^{\ell-1}(\tau_*(s))^{h_\varepsilon(\lambda_0)}g_\ell(s,\varepsilon,\lambda_0)ds=0.$$

თუ (3.25) უტოლობაში გავითვალისწინებთ (3.6_ℓ) და (3.10_ℓ) პირობებს, მაშინ გვაქვს

$$\liminf_{t\to+\infty}\rho_{\ell,2}(t,\varepsilon,\lambda_0)\le c^{-h_\varepsilon(\lambda_0)}\liminf_{t\to+\infty}\rho_{\ell,1}(t,\varepsilon,\lambda_0)\le c^{-h_\varepsilon(\lambda_0)}(\ell-1)!(n-\ell-1)!.$$

რადგან $\lim\limits_{\varepsilon\to0+}h_\varepsilon(\lambda_0)=0$. თუ უკანასკნელ უტოლობაში ავიღებთ ძედა ზღვარს, როცა $\varepsilon\to0+$, , მივიღებთ (3.24_ℓ) , რომელიც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

თეორემა 3.3. ვთქვათ სრულდება 3.1 თეორემის პირობები და

$$\limsup_{t\to+\infty}t^{1-\mu(t)}<+\infty \tag{3.26}$$

სადაც μ განსაზღვრულია (3.2)-ის პირველი ტოლობით.მაშინ არსებობს $\lambda_0\in[\ell-1,\ell]$ ისეთი, რომ

$$\limsup_{\varepsilon\to0+}\left(\liminf_{k\to+\infty}t^{-\lambda_0-h_{2,\varepsilon}(\lambda_0)}\times\left[\int_0^t(t-s)^{\ell-1}(\tau_*(s))^{h_\varepsilon(\lambda_0)}g_\ell(s,\varepsilon,\lambda_0)ds\right.\right)\le(\ell-1)!(n-\ell-1)!. \quad (3.27_\ell)$$

დამტკიცება: რადგან 3.1 თეორემის პირობები სრულდება, არსებობს $\lambda_0\in[\ell-1,\ell]$ ისეთი, რომ (3.10_ℓ) პირობა ძალაშია. (3.5_ℓ), (3.9) და (3.26)-დან გვაქვს

$$\liminf_{k\to+\infty}t^{-\lambda_0-h_{2,\varepsilon}(\lambda_0)}\times\left[\int_0^t(t-s)^{\ell-1}(\tau_*(s))^{h_\varepsilon(\lambda_0)}g_\ell(s,\varepsilon,\lambda_0)ds\le\right.$$

$$\leq c^{h_\varepsilon(\lambda_0)} \liminf_{t\to+\infty} \rho_{\ell,1}(t,\varepsilon,\lambda_0),$$

სადაც $c = \limsup_{t\to+\infty} t^{(1-\mu(t))/\mu(t)} < +\infty$, $\rho_{\ell,1}$ და g_ℓ შესაბამისად განსაზღვრულია (3.5_ℓ) და (3.4_ℓ) ტოლობებით. რადგან $\lim_{\varepsilon\to0+} h_\varepsilon(\lambda_0) = 0$, უკანასკნელი უტოლობიდან (3.10_ℓ) პირობის თანახმად მივიღებთ (3.27_ℓ) პირობას. რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

თეორემა 3.4. ვთქვათ სრულდება 3.1თეორემის პირობები და (3.26). მაშინ არსებობს $\lambda_0 \in [\ell-1,\ell]$ ისეთი, რომ

$$\limsup_{\varepsilon\to0+}\left(\liminf t^{-\lambda_0-h_{2\varepsilon}(\lambda_0)} \int_0^t (t-s)^{\ell-1} s^{h_\varepsilon(\lambda_0)} g_\ell(s,\varepsilon,\lambda_0) \right) \leq (\ell-1)!(n-\ell-1)! \qquad (3.28_\ell)$$

სადაც g_ℓ განსაზღვრულია (3.4_ℓ) ტოლობით.

დამტკიცება: 3.1 თეორემის პირობები სრულდება, თუ გავითვალისწინებთ (3.23) პირობას მაშინ 3.2 თეორემის ძალით სამართლიანია (3.24_ℓ) . (3.6_ℓ), (3.9), (3.26)-დან გვაქვს

$$\limsup_{\varepsilon\to0+}\left(\liminf t^{-\lambda_0-h_{2\varepsilon}(\lambda_0)} \int_0^t (t-s)^{\ell-1} s^{h_\varepsilon(\lambda_0)} g_\ell(s,\varepsilon,\lambda_0) \right) \leq c^{h_\varepsilon(\lambda_0)} \liminf_{t\to+\infty} \rho_{\ell,2}(t,\varepsilon,\lambda_0),$$

სადაც $c = \limsup_{t\to+\infty} t^{(1-\mu(t))/\mu(t)} < +\infty$, $\rho_{\ell,2}$ და g_ℓ შესაბამისად განსაზღვრულია (3.6_ℓ) და (3.4_ℓ) ტოლობებით. რადგან $\lim_{\varepsilon\to0+} h_\varepsilon(\lambda_0) = 0$, მაშინ უკანასკნელი უტოლობიდან (3.24_ℓ) პირობის თანახმად მივიღებთ (3.28_ℓ) პირობას. რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

თეორემა 3.5. ვთქვათ სრულდება 3.2 თეორემის პირობები და

$$\lim_{t\to+\infty} \mu(t) = 1. \qquad (3.29)$$

მაშინ არსებობს $\lambda_0 \in [\ell-1,\ell]$ ისეთი, რომ

$$\limsup_{\varepsilon\to0+}\left(\liminf_{t\to+\infty} \rho_{\ell,3}(t,\varepsilon,\lambda_0) \right) = 0 , \qquad (3.30_\ell)$$

სადაც

$$\rho_{\ell,3}(t,\varepsilon,\lambda_0)=t^{\ell-\lambda_0+h_{1,\varepsilon}(\lambda_0)-\varepsilon}\times\int_t^{+\infty}\xi^{n-\ell-1}\sum_{i=1}^{m}\int_{\tau_i(\xi)}^{\sigma_i(\xi)}\xi_1^{(\lambda_0-h_{1,\varepsilon}(\lambda_0))\mu_i(\xi_1)}d_{\xi_1}r_i(\xi_1,\xi)d\xi. \qquad (3.31_\ell)$$

<u>დამტკიცება:</u> რადგან 3.2 თეორემის პირობები სრულდება, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ (3.24_ℓ) მოიცავს (3.30_ℓ) პირობას. თუ ეს ასე არაა, ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ დადებით წევრებიანი მიმდევრობები $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{+\infty}$, $\{t_k\}_{k=1}^{+\infty}$ და $c_0>0$ ისეთი, რომ $\lim\limits_{k\to+\infty}\varepsilon_k=0$ და

$$\rho_{\ell,3}(t,\varepsilon_k,\lambda_0)\ge c_0 \qquad \text{როცა} \quad t\ge t_k \qquad (3.32)$$

განვიხილოთ შემთხვევა როცა $\ell=n-1$ (3.32), (3.31_ℓ) და (3.6_ℓ) პირობების თანახმად მივიღებთ

$$\rho_{\ell,n-1}(t,\varepsilon,\lambda_0)\ge c_0 t^{\left(1-\frac{1}{\mu(t)}\right)h_{\varepsilon_k}(\lambda_0)-\lambda_0-h_{2,\varepsilon}(\lambda_0)}\times\int_{t_k}^{t}(t-s)^{n-2}s^{\lambda_0+1-n+\varepsilon_k+h_{2,\varepsilon_k}(\lambda_0)}ds=$$

$$=\frac{c_0 t^{\left(1-\frac{1}{\mu(t)}\right)h_{\varepsilon_k}(\lambda_0)-\lambda_0-h_{2,\varepsilon_k}(\lambda_0)}}{\prod\limits_{i=0}^{n-2}(\lambda_0+\varepsilon_k+h_{2,\varepsilon_k}(\lambda_0)-i)}\times t^{\lambda_0+\varepsilon_k+h_{2,\varepsilon_k}(\lambda_0)}(1+o(1)) \qquad \text{როცა} \quad t\ge t_k .$$

სხვა შემთხვევაში, (3.3) და (3.29)-ის თანახმად, არსებობს $t_k^{'}\ge t_k$ და $\varepsilon_k^{'}$ ისეთი, რომ

$$\rho_{n-1,2}(t,\varepsilon_k^{'},\lambda_0)\ge\frac{c_0 t^{\varepsilon_k^{'}}(1+o(1))}{\prod\limits_{i=0}^{n-2}(\lambda_0+\varepsilon_k^{'}+h_{2,\varepsilon_k^{'}}(\lambda_0)-i)} \qquad \text{როცა} \quad t\ge t_k^{'}.$$

შესაბამისად

$$\lim_{t\to+\infty}\rho_{n-1,2}(t,\varepsilon_k^{'},\lambda_0)=+\infty,$$

რომელიც ეწინააღმდეგება (3.24_{n-1}) უტოლობას. მიღებული წინააღმდეგობა $\ell=n-1$-ის შემთხვევაში ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ $\ell \in \{1,\dots,n-2\}$. (3.6_ℓ) -ის თანახმად

$$\rho_{n-1,2}(t,\varepsilon,\lambda_0) \ge -t^{\left(1-1/\mu(t)\right)h_{\varepsilon_k}(\lambda_0)} \int_1^t (t-s)^{\ell-1} s^{h_{\varepsilon_k}(\lambda_0)} \int_s^{+\infty} \left(1-\frac{s}{\xi}\right)^{n-\ell-1} \times$$

$$\times d\int_\xi^{+\infty} \xi_1^{n-\ell-1} \sum_{i=1}^m \int_{\tau_i(\zeta_1)}^{\sigma_i(\xi_1)} \xi_2^{(\lambda_0-h_{1,\varepsilon_k}(\lambda_0))\mu_i(\xi_2)} d_{\xi_2} r_i(\xi_2,\xi_1) d\xi_1 ds = t^{\left(1-1/\mu(t)\right)h_{\varepsilon_k}(\lambda_0)-\lambda_0-h_{2\varepsilon_k}(\lambda_0)} \times$$

$$\times \int_1^t (t-s)^{\ell-1} s^{h_{\varepsilon_k}(\lambda_0)} \int_s^{+\infty} \left(\left(1-\frac{s}{\xi}\right)^{n-\ell-1}\right)' \int_s^{+\infty} \xi_1^{n-\ell-1} \sum_{i=1}^m \int_{\tau_i(\xi_1)}^{\sigma_i(\xi_1)} \xi_2^{(\lambda_0-h_{1,\varepsilon_k}(\lambda_0))\mu_i(\xi_2)} d_{\xi_2} r_i(\xi_2,\xi_1) d\xi_1 d\xi ds.$$

რადგან $\frac{d}{d\xi}\left(1-\frac{s}{\xi}\right)^{n-\ell-1} \ge 0$, როცა $\xi \ge s \ge t$, (3.3), (3.31_ℓ) და (3.32)-ის თანახმად უკანასკნელი უტოლობა გვაძლევს

$$\rho_{\ell,2}(t,\varepsilon,\lambda_0) \ge c_0 t^{\left(1-1/\mu(t)\right)h_{\varepsilon_k}(\lambda_0)-\lambda_0-h_{2,\varepsilon_k}(\lambda_0)} \int_{t_k}^t (t-s)^{\ell-1} s^{h_{\varepsilon_k}(\lambda_0)} \times$$

$$\times \int_s^{+\infty} \xi^{\lambda_0-\ell-h_{1,\varepsilon_k}(\lambda_0)+\varepsilon_k} \left[\left(1-\frac{s}{\xi}\right)^{n-\ell-1}\right]' d\xi ds = c_0(\ell-\lambda_0-\varepsilon_k+h_{1,\varepsilon_k}(\lambda_0)) t^{\left(1-1/\mu(t)\right)h_{\varepsilon_k}(\lambda_0)-\lambda_0-h_{2,\varepsilon_k}(\lambda_0)} \times$$

$$\times \int_{t_k}^t (t-s)^{\ell-1} s^{h_{\varepsilon_k}(\lambda_0)} \times \int_s^{+\infty} (\xi-s)^{n-\ell-2} \xi^{\lambda_0-n-h_{1,\varepsilon_k}(\lambda_0)+\varepsilon_k} d\xi_1 ds =$$

$$= \frac{c_0(\ell-1)!(n-\ell-1)!(\ell-\lambda_0-\varepsilon_k+h_{1,\varepsilon_k}(\lambda_0))(1+o(1))}{\prod_{i=0}^{\ell-1}(\lambda_0+\varepsilon_k+h_{2,\varepsilon_k}(\lambda_0))\prod_{i=\ell+1}^{n-1}(\lambda_0-i+\varepsilon_k-h_{1,\varepsilon_k}(\lambda_0))} \times t^{\left(1-1/\mu(t)\right)h_{\varepsilon_k}(\lambda_0)+\varepsilon_k} \quad \text{როცა} \quad t \ge t_k$$

შესაბამისად, თუ $\ell \in \{1,\dots,n-2\}$, მაშინ (3.29)-ის თანახმად კვლავ გვაქვს, რომ

$$\lim_{t\to+\infty} \rho_{\ell,2}(t,\varepsilon_k',\lambda_0) = +\infty,$$

რაც ეწინააღმდეგება (3.24_ℓ) უტოლობას. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

შემდეგი თეორემები მტკიცდება ანალოგიურად

თეორემა 3.6. ვთქვათ სრულდება 3.2 თეორემის პირობები და (3.26). მაშინ არსებობს $\lambda_0 \in [\ell-1,\ell]$ ისეთი, რომ

$$\limsup_{\varepsilon\to 0+}\Big(\liminf_{t\to+\infty}\rho_{\ell,4}(t,\varepsilon,\lambda_0)\Big) \le \prod_{i=0,i\ne\ell}^{n-1}|\lambda_0 - i|, \qquad (3.33_\ell)$$

სადაც

$$\rho_{\ell,4}(t,\varepsilon,\lambda_0) = t^{\ell-\lambda_0+h_{1,\varepsilon}(\lambda_0)}\int_t^{+\infty}\xi^{n-\ell-1}\sum_{i=1}^{m}\int_{\tau_i(\xi)}^{\sigma_i(\xi)}\xi_1^{(\lambda_0-h_{1,\varepsilon}(\lambda_0))\mu_i(\xi_1)}d_{\xi_1}r_i(\xi_1,\xi)d\xi. \qquad (3.34_\ell)$$

თეორემა 3.7. ვთქვათ სრულდება 3.6 თეორემის პირობები. მაშინ არსებობს $\lambda_0 \in [\ell-1,\ell]$ ისეთი, რომ

$$\limsup_{\varepsilon\to 0+}\Big(\liminf_{t\to+\infty}\rho_{\ell,5}(t,\varepsilon,\lambda_0)\Big) \le \prod_{i=0,}^{n-1}|\lambda_0 - i|,$$

სადაც

$$\rho_{\ell,5}(t,\varepsilon,\lambda_0) = t\int_t^{+\infty}\xi^{n-2-\lambda_0+h_{1,\varepsilon}(\lambda_0)}\sum_{i=1}^{m}\int_{\tau_i(\xi)}^{\sigma_i(\xi)}\xi_1^{(\lambda_0-h_{1,\varepsilon}(\lambda_0))\mu_i(\xi_1)}d_{\xi_1}r_i(\xi_1,\xi)d\xi. \qquad (3.35_\ell)$$

4. მონოტონური ამონახსნების არ არსებობის საკმარისი პირობები

თეორემა 4.1. ვთქვათ $F \in V(\tau)$, (1.2)((1.3)), (2.11), (2.12) და (3.7_ℓ) -(3.9) პირობები სრულდება, $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$ $\ell+n$ კენტია ($\ell+n$ ლუწია) და ყოველი $\lambda \in [\ell-1,\ell]$-თვის

$$\limsup_{\varepsilon\to 0+}\Big(\liminf_{t\to+\infty}\rho_{\ell,1}(t,\varepsilon,\lambda)\Big) \ge (\ell-1)!(n-\ell-1)!, \qquad (4.1_\ell)$$

სადაც $\rho_{\ell,1}$ განსაზღვრულია (3.5_ℓ) და (3.4_ℓ) ტოლობით. მაშინ (1.1) განტოლებას არ აქვს (2.1_ℓ) სახის ამონახსნები.

<u>დამტკიცება:</u> დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ არსებობს $t_0 \in R_+$ და $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$, $\ell+n$ კენტია ($\ell+n$ ლუწია) ისეთი, რომ $U_{\ell,t_0} \ne \varnothing$. ამგვარად განტოლებას (1.1) აქვს წესიერი ამონახსნი $u:[t_0;+\infty) \to (0;+\infty)$ რომელიც აკმაყოფილებს (2.1_ℓ) პირობას. რადგან 3.1 ტეორემის პირობები სრულდება, არსებობს $\lambda_0 \in [\ell-1,\ell]$ ისეთი, რომ (3.10_ℓ)

პირობა ძალაშია, რაც ეწინააღმდეგება (4.1_ℓ) პირობას. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

თეორემა 4.2. ვთქვათ $F \in V(\tau)$, (1.2)((1.3)), (2.11), (2.12), (3.7_ℓ)-(3.9) და (3.23) პირობები სრულდება, $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$ $\ell+n$ კენტია ($\ell+n$ ლუწია) და ყოველი $\lambda \in [\ell-1,\ell]$-თვის

$$\limsup_{\varepsilon\to 0+}\Big(\liminf_{t\to+\infty} \rho_{\ell,2}(t,\varepsilon,\lambda)\Big) \geq (\ell-1)!(n-\ell-1)!, \qquad (4.2_\ell)$$

სადაც $\rho_{\ell,2}$ განსაზღვრულია (3.4_ℓ) და (3.6_ℓ) ტოლობით. მაშინ (1.1) განტოლებას არ აქვს (2.1_ℓ) სახის ამონახსნები.

<u>დამტკიცება:</u> დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ არსებობს $t_0 \in R_+$ და $\ell \in \{1,\dots, \ -1\}$, $\ell+n$ კენტია ($\ell+n$ ლუწია) ისეთი, რომ $U_{\ell,t_0} \neq \varnothing$. ამგვარად (1.1) განტოლებას აქვს წესიერი $u:[t_0;+\infty) \to (0;+\infty)$ ამონახსნი რომელიც აკმაყოფილებს (2.1_ℓ) პირობას. რადგან 3.1 თეორემა და (3.23) პირობა სრულდება, ამიტომ 3.2 თეორემის ძალით არსებობს $\lambda_0 \in [\ell-1;\ell]$ ისეთი, რომ სამართლიანია (3.24_ℓ) პირობა. რაც ეწინააღმდეგება (4.2_ℓ) პირობას. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4.3. ვთქვათ $F \in V(\tau)$, (1.2)((1.3)), (2.11), (2.12), (3.7_ℓ)-(3.9) და (3.26) პირობები სრულდება, $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$ $\ell+n$ კენტია ($\ell+n$ ლუწია) და ყოველი $\lambda \in [\ell-1,\ell]$-თვის

$$\limsup_{\varepsilon\to 0+}\left(\liminf_{k\to+\infty} t^{-\lambda-h_{2,\varepsilon}(\lambda)} \times \left[\int_0^t (t-s)^{\ell-1}(\tau_*(s))^{h_\varepsilon(\lambda)} g_\ell(s,\varepsilon,\lambda)ds\right.\right) > (\ell-1)!(n-\ell-1)!, \quad (4.3_\ell)$$

სადაც g_ℓ, $h_{2,\varepsilon}$ და h_ε განსაზღვრულია შესაბამისად (3.4_ℓ) და (3.3) ტოლობით. მაშინ (1.1) განტოლებას არ აქვს (2.1_ℓ) სახის ამონახსნები.

<u>დამტკიცება:</u> დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ არსებობს $t_0 \in R_+$ და $\ell \in \{1,\dots, \ -1\}$, $\ell+n$ კენტია ($\ell+n$ ლუწია) ისეთი, რომ $U_{\ell,t_0} \neq \varnothing$. ამგვარად (1.1) განტოლებას აქვს წესიერი $u:[t_0;+\infty) \to (0;+\infty)$ ამონახსნი რომელიც აკმაყოფილებს (2.1_ℓ) პირობას. რადგან 3.1 თეორემა და (3.26) პირობა სრულდება, ამიტომ 3.3 თეორემის ძალით არსებობს $\lambda_0 \in [\ell-1;\ell]$ ისეთი, რომ სამართლიანია (3.27_ℓ) პირობა. მივიღეთ წინააღმდეგობა. ე.ი. ჩვენიდაშვება მცდარია.

3.4-3.7 თეორემების გამოყენებით ანალოგიურად მტკიცდება 4.4-4.7 თეორემები, როგორც უკანასკნელი სამი თეორემა

თეორემა 4.4. ვთქვათ $F \in V(\tau)$, (1.2)((1.3)), (2.11), (2.12), (3.7_ℓ) -(3.9), (3.23) და (3.26) პირობები სრულდება, $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$ $\ell + n$ კენტია ($\ell + n$ ლუწია) და ყოველი $\lambda \in [\ell - 1, \ell]$ -თვის

$$\limsup_{\varepsilon \to 0+}\left(\liminf_{k \to +\infty} t^{-\lambda - h_{2,\varepsilon}(\lambda)} \times \left[\int_0^t (t-s)^{\ell-1} s^{h_\varepsilon(\lambda)} g_\ell(s,\varepsilon,\lambda) ds \right.\right) > (\ell-1)!(n-\ell-1)!, \qquad (4.4_\ell)$$

სადაც g_ℓ, $h_{2,\varepsilon}$ და h_ε განსაზღვრულია შესაბამისად (3.4_ℓ) და (3.3) ტოლობებით. მაშინ (1.1) განტოლებას არ აქვს (2.1_ℓ) სახის ამონახსნები.

თეორემა 4.5. ვთქვათ $F \in V(\tau)$, (1.2)((1.3)), (2.11), (2.12), (3.7_ℓ) -(3.9), (3.23) და (3.29) პირობები სრულდება, $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$ $\ell + n$ კენტია ($\ell + n$ ლუწია) და ყოველი $\lambda \in [\ell - 1, \ell]$ -თვის

$$\limsup_{\varepsilon \to 0+}\left(\liminf_{t \to +\infty} \rho_{\ell,3}(t,\varepsilon,\lambda) \right) > 0 \qquad (4.5_\ell)$$

სადაც $\rho_{\ell,3}$ განსაზღვრულია (3.31_ℓ) ტოლობით. მაშინ (1.1) განტოლებას არ აქვს (2.1_ℓ) სახის ამონახსნები.

თეორემა 4.6. ვთქვათ $F \in V(\tau)$, (1.2)((1.3)), (2.11), (2.12), (3.7_ℓ) -(3.9), (3.23) და (3.26) პირობები სრულდება, $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$ $\ell + n$ კენტია ($\ell + n$ ლუწია) და ყოველი $\lambda \in [\ell - 1, \ell]$ -თვის

$$\limsup_{\varepsilon \to 0+}\left(\liminf_{t \to +\infty} \rho_{\ell,4}(t,\varepsilon,\lambda) \right) > \prod_{i=0. i \neq \ell}^{n-1} |\lambda - i|, \qquad (4.6_\ell)$$

სადაც $\rho_{\ell,4}$ განსაზღვრულია (3.34_ℓ) ტოლობით. მაშინ (1.1) განტოლებას არ აქვს (2.1_ℓ) სახის ამონახსნები.

თეორემა 4.7. ვთქვათ $F \in V(\tau)$, (1.2)((1.3)), (2.11), (2.12), (3.7_ℓ) -(3.9), (3.23) და (3.26) პირობები სრულდება, $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$ $\ell + n$ კენტია ($\ell + n$ ლუწია) და ყოველი $\lambda \in [\ell - 1, \ell]$ -თვის

$$\limsup_{\varepsilon\to 0+}\Big(\liminf_{t\to+\infty}\rho_{\ell,5}(t,\varepsilon,\lambda)\Big) > \prod_{i=0.}^{n-1}|\lambda - i|, \qquad (4.7_\ell)$$

სადაც $\rho_{\ell,5}$ განსაზღვრულია (3.25_ℓ) ტოლობით. მაშინ (1.1) განტოლებას არ აქვს (2.1_ℓ) სახის ამონახსნები.

შენიშვნა 4.1. ცხადია, რომ თუ 4.1-4.7 თეორემებიდან ერთ-ერთის პირობები სრულდება, მაშინ დიფერენციალურ უტოლობას

$$u^{(n)}(t)sign(u(t)) + \sum_{i=1}^{m}\int_{\tau_i(t)}^{\sigma_i(t)}|u(s)|^{\mu_i(s)}d_s r_i(s,t) \le 0,$$

$$\left(u^{(n)}(t)sign(u(t)) - \sum_{i=1}^{m}\int_{\tau_i(t)}^{\sigma_i(t)}|u(s)|^{\mu_i(s)}d_s r_i(s,t) \ge 0\right)$$

არ აქვს (2.1_ℓ) სახის ამონახსნი, სადაც $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$ $\ell + n$ კენტია ($\ell + n$ ლუწია).

5. დიფერენციალური განტოლებები A თვისებით

მეოთხე თავში მიღებულ შედეგებზე დაყრდნობით 5 და 6 თავში დადგენილია საკმარისი პირობები იმისა, რომ (1.1) განტოლებას ჰქონდეს A და B თვისება.

თეორემა 5.1. ვთქვათ $F \in V(\tau)$, (1.2), (2.11), (2.12) და (3.9) პირობები სრულდება და ყოველი $\ell -$თვის, სადაც $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$ $\ell + n$ კენტია და $\lambda \in [\ell-1,\ell]$ (3.7_ℓ), (3.8_ℓ) და (4.1_ℓ) ძალაშია. უფრო მეტიც, თუ (3.8_0) სრულდება როცა n კენტია და

$$\limsup_{t\to+\infty}\mu_i(t) < +\infty \qquad (i = 1,\dots,m) \qquad (5.1)$$

მაშინ (1.1) განტოლებას აქვს A თვისება.

<u>დამტკიცება:</u> ვთქვათ (1.1) განტოლებას აქვს წესიერი არარხევადი ამონახსნი $u:[t_0;+\infty)\to(0;+\infty)$ ($u(t)<0$ შემთხვევაც ანალოგიურია). (1.1) (1.2) და 2.1 ლემიდან, არსებობს $\ell \in \{0,\dots,n-1\}$ ისეთი, რომ $\ell + n$ კენტია და (4.1_ℓ) პირობა სრულდება. 4.1 თეორემის თანახმად $\ell \notin \{1,\dots,n-1\}$. ამიტომ n კენტია და $\ell = 0$. მოვითხოვოთ, რომ (1.3) შესრულდეს. თუ ასე არაა მაშინ არსებობს $c > 0$ და $t_* \ge t_0$ ისეთი, რომ (5.1)-ის

თანახმად $(u(t))^{\mu_i(t)} \ge c \;\; (i = 1,...,m)$ როცა $t \ge t_*$. მაშინ (2.1_0) და (2.11)-ის თანახმად (1.1) განტოლებიდან გვაქვს

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i-1)\left|u^{(i)}(t)\right| \ge c\int_{t_1}^{t} s^{n-1}\sum_{i=1}^{m}(r_i(\sigma_i(t),t) - r_i(\tau_i(t),t))ds \qquad \text{როცა } t \ge t_1$$

t_1 საკმარისად დიდი რიცხვია.

უკანასკნელი უტოლობა ეწინააღმდეგება (3.8_0) უტოლობას. ეს კი ამტკიცებს, რომ (1.1) განტოლებას აქვს A თვისება.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი 5.2-5.4 თეორემები.

თეორემა 5.2. ვთქვათ $F \in V(\tau)$, (1.2), (2.11), (2.12), (3.9), (3.23) და (5.1) პირობები სრულდება და ყოველი $\ell -$თვის, სადაც $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$ $\ell + n$ კენტია და $\lambda \in [\ell - 1, \ell]$, პირობები (3.7_ℓ), (3.8_ℓ) და (4.2_ℓ) ძალაშია. უფრო მეტიც, თუ (3.8_0) სრულდება როცა n კენტია, მაშინ (1.1) განტოლებას აქვს A თვისება.

თეორემა 5.3. ვთქვათ $F \in V(\tau)$, (1.2), (2.11), (2.12), (3.9), (3.26) და (5.1) პირობები სრულდება და ყოველი $\ell -$თვის, სადაც $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$ $\ell + n$ კენტია და $\lambda \in [\ell - 1, \ell]$, პირობები (3.7_ℓ), (3.8_ℓ) და (4.3_ℓ) ძალაშია. უფრო მეტიც, თუ (3.8_0) სრულდება როცა n კენტია, მაშინ (1.1) განტოლებას აქვს A თვისება.

თეორემა 5.4. ვთქვათ $F \in V(\tau)$, (1.2), (2.11), (2.12), (3.9), (3.26) და (5.1) პირობები სრულდება და ყოველი $\ell -$თვის, სადაც $\ell \in \{1,..., n-1\}$ $\ell + n$ კენტია და $\lambda \in [\ell - 1, \ell]$, პირობები (3.7_ℓ), (3.8_ℓ) და (4.4_ℓ) ძალაშია. უფრო მეტიც, თუ (3.8_0) სრულდება როცა n კენტია, მაშინ (1.1) განტოლებას აქვს A თვისება.

თეორემა 5.5. ვთქვათ $F \in V(\tau)$, (1.2), (2.11), (2.12), (3.9), (3.23) და (3.29) პირობები სრულდება და ყოველი $\ell -$თვის, სადაც $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$ $\ell + n$ კენტია და $\lambda \in [\ell - 1, \ell]$, პირობები (3.8_ℓ) და (4.5_ℓ) ძალაშია. უფრო მეტიც, თუ (3.8_0) სრულდება როცა n კენტია, მაშინ (1.1) განტოლებას აქვს A თვისება.

დამტკიცება: თუ გავითვალისწინებთ (4.5) თეორემას, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ (4.5_ℓ) მოიცავს (3.7_ℓ) პირობას, სადაც $\ell \in \{1,..., n-1\}$ $\ell + n$ კენტია. ვივარაუდოთ პირიქით. მაშინ არსებობს $\ell \in \{1,..., n-1\}$ ისეთი, რომ

$$\int_0^{+\infty} t^{n-\ell} \sum_{i=1}^{m} \int_{\tau_i(t)}^{\sigma_i(t)} s^{(\ell-1)\mu_i(s)} d_s r_i(s,t) dt < +\infty . \tag{5.2}$$

სხვა შემთხვევაში, (3.31_ℓ)-ში ავიღოთ $\lambda = \ell - 1$ მივიღბთ

$$\rho_{\ell,3}(t,\varepsilon,\ell-1) = t^{\ell-\lambda_0+h_{1,\varepsilon}(\lambda_0)-\varepsilon} \times \int_t^{+\infty} \xi^{n-\ell-1} \sum_{i=1}^{m} \int_{\tau_i(\xi)}^{\sigma_i(\xi)} \xi_1^{(\lambda_0-h_{1,\varepsilon}(\lambda_0))\mu_i(\xi_1)} d_{\xi_1} r_i(\xi_1,\xi) d\xi.$$

$$\le \int_t^{+\infty} \xi^{n-\ell-\varepsilon} \sum_{i=1}^{m} \int_{\tau_i(\xi)}^{\sigma_i(\xi)} \xi_1^{(\ell-1)\mu_i(\xi_1)} d_{\xi_1} r_i(\xi_1,\xi) d\xi.$$

ამიტომ (5.2) პირობის თანახმად ვაქვს $\lim\limits_{t\to+\infty} \rho_{\ell,3}(t,\varepsilon,\ell-1) = 0,$ რაც ეწინააღმდეგება (4.5_ℓ) პირობას. ეს კი ამტკიცებს (3.8_ℓ) სამართლიანობას. თეორემა დამტკიცებულია.

4.6, 4.7 თეორემების გამოყენებით ანალოგიურად მტკიცდება 5.6 და 5.7 თეორემები.

თეორემა 5.6. . ვთქვათ $F \in V(\tau)$, (1.2), (2.11), (2.12), (3.9), (3.23) და (5.1) პირობები სრულდება და ყოველი $\ell-$თვის, სადაც $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$ $\ell+n$ კენტია და $\lambda \in [\ell-1,\ell]$, პირობები (3.8_ℓ) და (4.6_ℓ) ძალაშია. უფრო მეტიც, თუ (3.8_0) სრულდება როცა n კენტია, მაშინ (1.1) განტოლებას აქვს A თვისება.

თეორემა 5.7. ვთქვათ $F \in V(\tau)$, (1.2), (2.11), (2.12), (3.9), (3.23) და (3.26) პირობები სრულდება და ყოველი $\ell-$თვის, სადაც $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$ $\ell+n$ კენტია და $\lambda \in [\ell-1,\ell]$, პირობები (3.8_ℓ) და (4.7_ℓ) ძალაშია. უფრო მეტიც, თუ (3.8_0) სრულდება როცა n კენტია, მაშინ (1.1) განტოლებას აქვს A თვისება.

შედეგი 5.1. ვთქვათ $F \in V(\tau)$, (1.2) სრულდება და საკმარისად დიდი $t_0 \in R_+$-თვის

$$|F(u)(t)| \ge \sum_{i=1}^{m} p_i(t) \int_{\alpha_i t}^{\beta_i t} s^{\gamma_i} |u(s)|^{1+\frac{d_i}{\ln s}} ds \quad \text{როცა } t \ge t_0, \quad u \in H_{t_0,\tau} \tag{5.3}$$

სადაც

$$0 < \alpha_i < \beta_i, \qquad p_i \in L_{loc}(R_+,R_+), \qquad \gamma_i \in R, \quad d_i \in R \quad (i=1,\dots,m). \tag{5.4}$$

ვთქვათ ყოველი $\ell-$თვის, სადაც $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$ $\ell+n$ კენტია და $\lambda \in [\ell-1,\ell]$

$$\gamma_i \notin [-1-\ell;-\ell] \quad (i=1,...,m) \tag{5.5}$$

და

$$\limsup_{\varepsilon\to 0+}\left(\liminf_{k\to+\infty} t^{\ell-\lambda+h_{1,\varepsilon}(\lambda)} \times \left[\int_t^{+\infty}\sum_{i=1}^{m}\xi^{n-\ell+\gamma_i+\lambda-h_{1,\varepsilon}(\lambda)}p_i(\xi)\frac{\beta_i^{\gamma_i+\lambda+1}-\alpha_i^{\gamma_i+\lambda+1}}{\gamma_i+\lambda+1}e^{\lambda d_i}d\xi\right.\right) >$$

$$> \prod_{i=0,i\neq\ell}^{n-1}|\lambda-i|, \tag{5.6$_\ell$}$$

სადაც $h_{1,\varepsilon}(\lambda)$ განსაზღვრულია (3.3)-ის პირველი პირობით. მაშინ (1.1) დანტოლებას აქვს A თვისება.

დამტკიცება: (5.3)- (5.6_ℓ) პირობების თანახმად მარტივი საჩვენებელია, რომ სრულდება 5.6 თეორემის პირობები, სადაც $\tau_i(t)=\alpha_i t$, $\sigma_i(t)=\beta_i t$, $r_i(s,t)=\dfrac{p_i(t)s^{\gamma_i+1}}{1+\gamma_i}$ $(i=1,...,m)$, რაც ამტკიცებს შედეგის სამართლიანობას.

შედეგი 5.2. ვთქვათ $F\in V(\tau)$, (1.2) და (5.3)-(5.5) პირობები სრულდება და ყოველი $\ell-$ თვის, სადაც $\ell\in\{1,...,n-1\}$ $\ell+n$ კენტია და $\lambda\in[\ell-1,\ell]$

$$\liminf_{t\to+\infty} t\int_t^{+\infty}s^{n-1+\gamma_i}p_i(s)\frac{\beta_i^{\gamma_i+\lambda+1}-\alpha_i^{\gamma_i+\lambda+1}}{\gamma_i+\lambda+1}e^{\lambda d_i}ds > -\lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+1). \tag{5.7$_\ell$}$$

მაშინ (1.1) დანტოლებას აქვს A თვისება.

დამტკიცება: (1.2), (5.3)-(5.5) და (5.7_ℓ) პირობების თანახმად, სრულდება 5.7 თეორემის პირობები, სადაც $\tau_i(t)=\alpha_i t$, $\sigma_i(t)=\beta_i t$, $r_i(s,t)=\dfrac{p_i(t)s^{\gamma_i+1}}{1+\gamma_i}$.

შედეგი 5.3. ვთქვათ $F\in V(\tau)$, (1.2) და (5.3)-(5.5) პირობები სრულდება

$$t^{\gamma_i}p_i(t)=c_i p(t)+o(t^{-1-n}) \ \ (i=1,...,m), \tag{5.8}$$

და

$$\liminf_{t\to+\infty} t\int_t^{+\infty}s^{n-1}p(s)ds > \max\{-\lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+1)\times\left(\sum_{i=1}^{m}c_i e^{\lambda d_i}\frac{\beta_i^{\gamma_i+\lambda+1}-\alpha_i^{\gamma_i+\lambda+1}}{\gamma_i+\lambda+1}\right)^{-1} : \lambda\in[0;n-1]\}, \tag{5.9}$$

სადაც $p \in L_{loc}(R_+, R_+),\ c_i \in (0;+\infty),\ (i = 1,..., m).$ მაშინ (1.1) დანტოლებას აქვს A თვისება.

დამტკიცება: (5.8) და (5.9) პირობებს აკმაყოფილებს (5.7_ℓ) ყოველი ყოველი $\ell \in \{1,..., n-1\}$ -თვის $\ell + n$ კენტია. ამიტომ 5.2 შედეგის თანახმად (1.1) დანტოლებას აქვს A თვისება.

შედეგი 5.4. ვთქვათ $0 < \alpha_i < \beta_i,\quad c_i \in (0;+\infty),\quad \gamma_i \in R,$ და ყოველი $\ell -$ თვის, სადაც $\ell \in \{1,..., n-1\}$-თვის $\ell + n$ კენტია (5.5) პირობა ძალაშია. მაშინ განტოლებას

$$u^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{t^{1+n+\gamma_i}} \int_{\alpha_i t}^{\beta_i t} s^{\gamma_i} |u(s)|^{1+\frac{d_i}{\ln s}} sign(u(s))ds = 0,\ t \geq \alpha > 1, \tag{5.10}$$

რომ ჰქონდეს A თვისება, აუცილებელია და საკმარისია, რომ

$$\max\{-\lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+1)\left(\sum_{i=1}^{m} c_i e^{\lambda d_i}\ \frac{\beta_i^{\gamma_i+\lambda+1} - \alpha_i^{\gamma_i+\lambda+1}}{\gamma_i + \lambda + 1}\right)^{-1} : \lambda \in [0; n-1]\} < 1 \tag{5.11}$$

დამტკიცება: ვაჩვენოთ საკმარისობა. ვთქვათ (5.11) პირობა დარღვეულია. მაშინ არსებობს $\ell \in \{1,..., n-1\}$ $\ell + n$ კენტია და $\lambda_0 \in [\ell - 1, \ell]$ ისეთი, რომ

$$-\lambda_0(\lambda_0 - 1)...(\lambda_0 - 1 + n) = \sum_{i=1}^{m} c_i e^{\lambda_0 d_i}\ \frac{\beta_i^{\gamma_i+1+\lambda} - \alpha_i^{\gamma_i+\lambda+1}}{\gamma_i + \lambda + 1}.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\ell + n$ კენტია, უკანასკნელი განტოლებიდან ვნახავთ, რომ $u(t) = t^{\lambda_0}$ არის (2.1_ℓ) სახის ამონახსნი (5.10) განტოლების, რაც ამტკიცებს აუცილებლობას.

6. ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებები B თვისებით

თეორემა 6.1. ვთქვათ $F \in V(\tau)$, (1.3), (2.11), (2.12) და (3.9) პირობები სრულდება და ყოველი $\ell -$ თვის, სადაც $\ell \in \{1,...,n-2\}$ $\ell + n$ ლუწია და $\lambda \in [\ell - 1, \ell]$ (3.7_ℓ), (3.8_ℓ) და (4.1_ℓ) ძალაშია. უფრო მეტიც, თუ (3.8_n) სრულდება და (3.8_n) და (5.1) ძალაშია როცა n ლუწია მაშინ (1.1) განტოლებას აქვს B თვისება.

დამტკიცება: ვთქვათ (1.1) განტოლებას აქვს წესიერი არარხევადი ამონახსნი $u : [t_0;+\infty) \to (0;+\infty)$ ($u(t) < 0$ შემთხვევაც ანალოგიურია). (1.1) (1.3) და 2.1 ლემიდან,

არსებობს $\ell \in \{0,...,n\}$ ისეთი, რომ $\ell+n$ ლუწია და (2.1_ℓ) პირობა სრულდება. ყოველი $\ell \in \{0,...,n-2\}$-თვის $\ell+n$ ლუწია (4.1_ℓ) პირობა სრულდება, 4.1 თეორემის თანახმად $\ell \notin \{1,...,n-2\}$. რადგან $\ell+n$ ლუწია, ამიტომ $\ell = n$ ან n ლუწია და $\ell = 0$. უკანასკნელი შემთხვევა, როგორც 5.1 თეორემის დამტკიცებისას ვაჩვენეთ, (3.8_0) და (3.9) პირობებიდან მარტივად ვაჩვენებთ, რომ სრულდება (1.4). სხვა შემთხვევაში, თუ $\ell = n$, მაშინ (2.1_n)-დან არსებობს $c>0$ და $t_1 \ge t_0$ ისეთი, რომ $u(t) \ge ct^{n-1}$ როცა $t \ge t_1$. ამიტომ (2.1_n), (2.11) და (3.8_n)-დან, (1.1) განტოლება აკმაყოფილებს

$$u^{(n-1)}(t) \ge u^{(n-1)}(t_*) + c_0 \int_{t_*}^{t} \sum_{i=1}^{m} \int_{\tau_i(\xi)}^{\sigma_i(\xi)} s^{(n-1)\mu_i(s)} d_s r_i(\xi,s) d\xi \to +\infty \qquad \text{როცა } t \to +\infty$$

სადაც $c_0 > 0$ და $t_* > t_1$ არის საკმარისად დიდი რიცხვი. ამგვარად თუ n ლუწია და $\ell = 0$, მაშინ (1.4)პირობა ძალაშია. ხოლო თუ $\ell = n$, მაშინ (1.5) პრობა ძალაშია. ეს კი იშნავს, რომ (1.1) განტოლებას აქვს B თვისება. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

4.2-4.7 თეორემების გამოყენებით ანალოგიურად მტკიცდება 6.2-6.7 თეორემები.

თეორემა 6.2. ვთქვათ $F \in V(\tau)$, (1.3), (2.11), (2.12), (3.9) და (3.23) პირობები სრულდება და ყოველი $\ell-$თვის, სადაც $\ell \in \{1,\dots,n-2\}$ $\ell+n$ ლუწია და $\lambda \in [\ell-1,\ell]$ (3.7_ℓ), (3.8_ℓ) და (4.2_ℓ) ძალაშია. უფრო მეტიც, თუ (3.8_n) სრულდება და (3.8_0) და (5.1) ძალაშია როცა n ლუწია მაშინ (1.1) განტოლებას აქვს B თვისება.

თეორემა 6.3. ვთქვათ $F \in V(\tau)$, (1.3), (2.11), (2.12), (3.9) და (3.26) პირობები სრულდება და ყოველი $\ell-$თვის, სადაც $\ell \in \{1,\dots,n-2\}$ $\ell+n$ ლუწია და $\lambda \in [\ell-1,\ell]$ (3.7_ℓ), (3.8_ℓ) და (4.3_ℓ) ძალაშია. უფრო მეტიც, თუ (3.8_n) სრულდება და (3.8_0) და (5.1) ძალაშია როცა n ლუწია მაშინ (1.1) განტოლებას აქვს B თვისება.

თეორემა 6.4. ვთქვათ $F \in V(\tau)$, (1.3), (2.11), (2.12), (3.9), (3.23 და (3.26) პირობები სრულდება და ყოველი $\ell-$თვის, სადაც $\ell \in \{1,..n,-2\}$ $\ell+n$ ლუწია და $\lambda \in [\ell-1,\ell]$ (3.7_ℓ), (3.8_ℓ) და (4.4_ℓ) ძალაშია. უფრო მეტიც, თუ (3.8_n) სრულდება და (3.8_0) და (5.1) ძალაშია როცა n ლუწია მაშინ (1.1) განტოლებას აქვს B თვისება.

თეორემა 6.5. ვთქვათ $F \in V(\tau)$, (1.3), (2.11), (2.12), (3.9), (3.23) და (3.26) პირობები სრულდება და ყოველი $\ell-$თვის, სადაც $\ell \in \{1,..n,-2\}$ $\ell+n$ ლუწია და $\lambda \in [\ell-1,\ell]$ (3.8_ℓ) და (4.5_ℓ) ძალაშია. უფრო მეტიც, თუ (3.8_n) სრულდება და (3.8_0) და (5.1) ძალაშია როცა n ლუწია მაშინ (1.1) განტოლებას აქვს B თვისება.

თეორემა 6.6. ვთქვათ $F \in V(\tau)$, (1.3), (2.11), (2.12), (3.9), (3.23) და (3.26) პირობები სრულდება და ყოველი $\ell -$ თვის, სადაც $\ell \in \{1,..n,-2\}$ $\ell + n$ ლუწია და $\lambda \in [\ell - 1, \ell]$ (3.8_ℓ) და (4.6_ℓ) ძალაშია. უფრო მეტიც, თუ (3.8_n) სრულდება და (3.8_0) და (5.1) ძალაშია როცა n ლუწია მაშინ (1.1) განტოლებას აქვს B თვისება.

თეორემა 6.7. ვთქვათ $F \in V(\tau)$, (1.3), (2.11), (2.12), (3.9), (3.23 და (3.26) პირობები სრულდება და ყოველი $\ell -$ თვის, სადაც $\ell \in \{1,..n,-2\}$ $\ell + n$ ლუწია და $\lambda \in [\ell - 1, \ell]$ (3.8_ℓ) და (4.7_ℓ) ძალაშია. უფრო მეტიც, თუ (3.8_n) სრულდება და (3.8_0) და (5.1) ძალაშია როცა n ლუწია, მაშინ (1.1) განტოლებას გააჩნია B თვისება.

შედეგი 6.1. ვთქვათ $F \in V(\tau)$, (1.3), (5.3)-(5.5) პირობები სრულდება და ყოველი $\ell -$ თვის, სადაც $\ell \in \{1,..n,-2\}$ $\ell + n$ ლუწია და $\lambda \in [\ell - 1, \ell]$, (5.6_ℓ) ძალაშია, მაშინ (1.1) განტოლებას გააჩნია B თვისება.

<u>დამტკიცება:</u> საკმარისია შევნიშნოთ, რომ (1.3), (5.3)- (5.6_ℓ) პირობების თანახმად სრულდება 6.6 თეორემის ყველა პირობა, სადაც $\tau_i(t) = \alpha_i t$, $\sigma_i(t) = \beta_i t$, $r_i(s,t) = \dfrac{p_i(t) s^{1+\gamma_i}}{1+\gamma_i}$ $(i = 1,..., m)$.

შედეგი 6.2. ვთქვათ $F \in V(\tau)$, (1.3), (5.3)-(5.5) პირობები სრულდება და ყოველი $\ell -$ თვის, სადაც $\ell \in \{1,..., n-2\}$ $\ell + n$ ლუწია და $\lambda \in [\ell - 1, \ell]$, (5.7_ℓ) ძალაშია, მაშინ (1.1) განტოლებას გააჩნია B თვისება.

<u>დამტკიცება:</u> (1.3), (5.3)-(5.5) და (5.7_ℓ) პირობების თანახმად სრულდება 6.7 თეორემის ყველა პირობა, სადაც $\tau_i(t) = \alpha_i t$, $\sigma_i(t) = \beta_i t$, $r_i(s,t) = \dfrac{p_i(t) s^{1+\gamma_i}}{1+\gamma_i}$ $(i = 1,..., m)$.

შედეგი 6.3. ვთქვათ $F \in V(\tau)$, (1.3), (5.3)-(5.5) და (5.8) პირობები სრულდება, სადაც $p \in L_{loc}(R_+, R_+)$, $c_i \in (0, +\infty)$ $(i = 1,..., m)$. მაშინ საკმარისია შესრულდეს პირობა

$$\liminf_{t \to +\infty} t \int_t^{+\infty} s^{n-\ell} p(s) ds > \max \left\{ \lambda(\lambda - 1) \cdots (\lambda - n + 1) \times \left(\sum_{i=1}^m c_i e^{\lambda d_i} \, \frac{\beta_i^{\gamma_i + \lambda + 1} - \alpha_i^{\gamma_i + \lambda + 1}}{\gamma_i + \lambda + 1} \right)^{-1} : \lambda \in [0, n-1] \right\}, \tag{6.1}$$

რომ (1.1) განტოლებას ჰქონდეს B თვისება.

დამტკიცება: (5.8) და (6.1) პირობები ცხადია, რომ აკმაყოფილებს (5.7_ℓ) პირობას ყოველი $\ell \in \{1,..., n-2\}$ $\ell + n$ ლუწია. ამიტომ 5.2 შედეგის თანახმად განტოლებას აქვს B თვისება.

შედეგი 6.4. ვთქვათ $0 < \alpha_i < \beta_i$, $c_i \in (-\infty,0)$, $\gamma_i \in R$, $(i = 1,..., m)$ და ყოველი $\ell -$თვის, სადაც $\ell \in \{1,..., n-2\}$ $\ell + n$ ლუწია სრულდება (5.5) პირობა. მაშინ იმისათვის, რომ (5.10) გაანტოლებას ჰქონდეს B თვისება აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$\max\left\{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)\left(\sum_{i=1}^{m}|c_i|e^{\lambda d_i}\ \frac{\beta_i^{\gamma_i+\lambda+1}-\alpha_i^{\gamma_i+\lambda+1}}{\gamma_i+\lambda+1}\right)^{-1} : \lambda \in [0, n-1]\right\} < 1. \qquad (6.2)$$

დამტკიცება: საკმარისობა გამომდინარეობს 6.3 შედეგიდან. ვთქვათ (6.2) პირობა არ სრულდება. მაშინ არსებობს $\ell \in \{1,..., n-2\}$ $\ell + n$ ლუწია და $\lambda_0 \in [\ell -1, \ell]$ ისეთი, რომ

$$\lambda_0(\lambda_0-1)\cdots(\lambda_0-n+1) = -\sum_{i=1}^{m} c_i e^{\lambda d_i}\ \frac{\beta_i^{\gamma_i+\lambda+1}-\alpha_i^{\gamma_i+\lambda+1}}{\gamma_i+\lambda+1}.$$

ამიტომ (5.10) განტოლებას აქვს (2.1_ℓ) სახის ამონახსნი $u(t) = t^{\lambda_0}$, სადაც $\ell \in \{1,\ldots,n-2\}$ $\ell + n$ ლუწია, ეს ამტკიცებს აუცილებლობას.

7. ,,თითქმის წრფივი'' ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები A და B თვისებებით

ამ თავში მიღებულია საკმარისი პირობები იმისათვის, რომ განტოლებას

$$u^{(n)}(t) + p(t)|u(t)|^{1+\frac{d}{\ln t}} sign(u(t)) = 0 \qquad t \ge a > 1, \qquad (7.1)$$

ჰქონდეს A და B თვისება, სადაც $p \in L_{loc}(R_+; R)$ და $d \in R$.

თეორემა 7.1. ვთქვათ $p \in L_{loc}(R_+; R_+)$ და

$$\liminf_{t\to+\infty} \int_t^{+\infty} s^{n-2} p(s)ds > \max\{-\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)e^{-\lambda d} : \lambda \in [0; n-1]\}.$$

მაშინ (7.1) განტოლებას აქვს A თვისება.

თეორემა 7.2. ვთქვათ $p \in L_{loc}(R_+; R_+)$, $d \in (-\infty;0]$ და

$$\liminf_{t\to+\infty} t\int_t^{+\infty} s^{n-2}p(s)ds > \max\{-\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)e^{-\lambda d} : \lambda\in[n-2;n-1]\}.$$

მაშინ (7.1) განტოლებას აქვს A თვისება.

შენიშვნა 7.1. $d=0$ შემთხვევისთვის ეს თეორემა იღებს ჭანტურიას თეორემის სახეს [6], რომელიც არის კონდრატიევის შედეგის [17] ინტეგრალური განზოგადება.

თეორემა 7.3. ვთქვათ $p\in L_{loc}(R_+;R_+)$, $d\in[0;+\infty)$ და

$$\liminf_{t\to+\infty} t\int_t^{+\infty} s^{n-2}p(s)ds > \max\{-\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)e^{-\lambda d} : \lambda\in[0,1]\}$$

როცა n ლუწია და

$$\liminf_{t\to+\infty} t\int_t^{+\infty} s^{n-2}p(s)ds > \max\{-\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)e^{-\lambda d} : \lambda\in[1,2]\cup[n-2,n-1]\}$$

როცა n კენტია. მაშინ (7.1) განტოლებას აქვს A თვისება.

თეორემა 7.4. ვთქვათ $p\in L_{loc}(R_+;R_-)$ და

$$\liminf_{t\to+\infty} t\int_t^{+\infty} s^{n-2}|p(s)|ds > \max\{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)e^{-\lambda d} : \lambda\in[0;n-1]\}.$$

მაშინ (7.1) განტოლებას აქვს B თვისება.

შენიშვნა 7.2. $d=0$ შემთხვევისთვის ეს შედეგი მიიღება კოპლატაძის [25] თეორემიდან, რომელიც არის განზოგადება ჭანტურიას შედეგის [6].

თეორემა 7.5. ვთქვათ $p\in L_{loc}(R_+;R_-)$, $d\in[0;+\infty)$ და

$$\liminf_{t\to+\infty} t\int_t^{+\infty} s^{n-2}|p(s)|ds > \max\{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)e^{-\lambda d} : \lambda\in[n-3;n-2]\}$$

როცა n ლუწია და

$$\liminf_{t\to+\infty} t\int_t^{+\infty} s^{n-2}p(s)ds > \max\{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)e^{-\lambda d} : \lambda\in[0,1]\cup[n-3,n-2]\}$$

როცა n კენტია. მაშინ (7.1) განტოლებას აქვს B თვისება.

თეორემა 7.6. ვთქვათ $p \in L_{loc}(R_+; R_-)$ და

$$\liminf_{t\to+\infty} t\int_t^{+\infty} s^{n-2}|p(s)|ds > \max\{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)e^{-\lambda d} : \lambda \in [1,2]\}$$

როცა n ლუწია და

$$\liminf_{t\to+\infty} t\int_t^{+\infty} s^{n-2}p(s)ds > \max\{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)e^{-\lambda d} : \lambda \in [0,1]\}$$

როცა n კენტია. მაშინ (7.1) განტოლებას აქვს B თვისება.

თეორემა 7.7. ვთქვათ $c \in (0,+\infty)$ $(c \in (-\infty,0))$, $d \in R.$ მაშინ იმისათვის, რომ განტოლებას

$$u^{(n)}(t) + \frac{c}{t^n}|u(t)|^{1+\frac{d}{\ln t}} sign(u(t)) = 0, \qquad t \ge a > 1$$

ჰქონდეს A(B) თვისება აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$c > \max\{-\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)e^{-\lambda d} : \lambda \in [0, n-1]\}$$

$$\left(|c| > \max\{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)e^{-\lambda d} : \lambda \in [0, n-1]\}\right).$$

შენიშვნა 7.3. განსხვავებისა და მსგავსების სანახავად, წრფივ და ,,თითქმის წრფივ'' დიფერენციალურ განტოლებებს შორის, განვიხილათ მარტივ მაგალითს. განვიხილოთ განტოლება

$$u^{(n)}(t) + \frac{M_n}{t^n}u(t) = 0, \qquad t \ge a > 1$$

სადაც M_n კონდრატიევის მუდმივია $\left(M_n = \max\{-\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1) : \lambda \in [0, n-1]\}\right)$. ცხადია, რომ ამ განტოლებას არ აქვს A თვისება, მაგრამ ყოველი $d > 0-$ თვის განტოლებას

$$u^{(n)}(t) + \frac{M_n}{t^n}|u(t)|^{1+\frac{d}{\ln t}} sign(u(t)) = 0, \qquad t \ge a > 1$$

აქვს A თვისება.

სხვა შემთხვევაში, ყოველი $d > 0-$ თვის, არსებობს $\varepsilon = \varepsilon(d) > 0$ ისეთი, რომ განტოლებას

$$u^{(n)}(t) + \frac{M_n + \varepsilon}{t^n} u(t) = 0, \qquad t \ge a > 1$$

აქვს A თვისება და განტოლებას

$$u^{(n)}(t) + \frac{M_n + \varepsilon}{t^n} |u(t)|^{1-\frac{d}{\ln t}} sign(u(t)) = 0, \quad t \ge a > 1$$

არ აქვს A თვისება.

ლიტერატურა

[1] Agarwal R.P., O'Regan D. Oscillation Theory for second order linear, Helf-linear, Superlinear and Sublinear dynamic equations. Kluwer Academic, Dordricht, 2002.

[2] Anan'eva G.V. and *Balaghanskiĭ* V.I. On oscillations of solutions of some differential equations of higher order. (Russian) Uspekhi Mat. Nauk 14 (1959), No. 1(95), 135-140.

[3] Atkinson F.V. On second-order nonlinear oscillations.Pacific J. Math. 5 (1955), No. 1, 643-647.

[4] Chanturia T. A. On one comparison theorem for linear differential equations. (Russian) Izu. Akad. Nauk. SSSRS Ser. Mat. 40 (1976), No. 5, 1128-1142.

[5] Chanturia T. A. Integral criteria of oscillation of solutions of higher order leardifferentialequations, I, II. (Russian) differential'nye Uravnenya 16 (1980), No. 3, 470-482; 16(1980), No. 4, 635-644.

[6] Chanturia T. A. On integral comparison theorems of Hille type for higher order defferential equations. (Russian) Soobshch. Akad. Nauk Gruzin. SSr 117 (1985), No.2, 241-244.

[7] DrakhlinM.E. Onoscillatory properties of certain functional differential equations. (Russian) differential'nye uravnenia 22(1986), No. 3,396-402.

[8] Erbe L. H. Kong Q., Zhang B. G. Oscillation theory for functional differential equations. Dekker, New York, 1995.

[9] Fite W. B. Cincerning the zeros of the solutions of certain differential equations. Trans. Amer. Math. SOc. 19 (1918), No. 4, 341-352.

[10] Graef J., KoplatadzeR., Kvinikadze G. Nonlinear functional differential equations with Properties A and B. J. Math. Anal. Appl. 306(2005), 136-160.

[11] *Gyŏri I.*, Ladas G. Oscillation theory of delay diferentialequation with applications. Clarandon Press, Oxford, 1991.

[12] Kartsatos A. G. Recent results on oscillation of solutions of forcedand perturbed nonlinear differential equationsofeven order. Stbility of Dinamical Systems, Dekker, New York, 1977.

[13] Kiguradze I. T.On oscillation of solutions of the equation $d^m u / dt^m + a(t)|u|^n signu = 0$. (Russian) Mat. Sb. 65(107)(1964), No. 2, 172-187.

[14] Kiguradze I. T. On oscillatory of solutions of some ordinary differential equations. Soviet Math. Dokl. 144(1962), 33-36.

[15] Kiguradze I. T., chanturia T. A. Asymptotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations. Kluwer Academic publishers, Dodrecht, Boston, Lonadon, 1993.

[16] Kneser A Untersuchungen uber die reelen nullstelen der integrale linearer differentialgleichungen. Math. Ann. 42(1893), 409-435.

[17] Kondrat'ev V.A. On oscillation of solutions of the equation $y^{(n)} + p(x)y = 0$. (Russian) Trudy Moskov.Mat. Obshch. 10(1961), 419-436.

[18] Koplatadze R Comparison theorems for deviated differential equations with property A. Mem. Differential equations Math. Phys. 15(1998), 141-144.

[19] Koplatadze R. Comparison theorems for deviated differential equations with property B. Mem. Differential equations Math. Phys. 16(1999), 143-147.

[20] Koplatadze R. On some properties on solutions of nonlinear differential inequalities and equations with a delayed argument. (Russian) differential'nye Uravneniya 12 (1976), No. 11, 1971-1984.

[21] Koplatadze R. Chanturia T.A.On Oscillatory Properties of differential equations with a deviating argument (Russian) Izdat. Tbilis. UNiv. Tbilisi, 1977, 1-115.

[22] Koplatadze R.Differential equations with deviating argument that have the properties A and B. (Russian) Differ. Uravn. 25(1989) No. 11, 1897-1909; English transl.: Differ. Equat. 25(1990), No. 11, 1332-1342.

[23] Koplatadze R. , Grammatikopulos M. K., Kvinikadze G. Linear funqtional differential equations with Property A. J. Math. Anal. Appl. 284(2003), No. 1, 294-314.

[24] Koplatadze R., Kvinikadze G., Stavroulakis I. P. Properties A and B on nth order linear differential equations with deviating argument. Georgian Math. J. 6(1999), 553-566.

[25] Koplatadze R., On higher order functional differential equations with Property A. GeorgianMath. J. 11(2004), No. 2,307-336.

[26] Koplatadze R. On oscillatory properties of solutions of functional differential equations. Mem. Differential Equations Math. Phys. 3(1994), 1-179.

[27] Koplatadze R. Generalized ordinary differential equations of Emdem-Fowler type with properties A and B. Proc. A. Razmadze Math. Inst. 136(2004), 145-148.

[28] Koplatadze R., Kvinikadze G. On oscillatory properties of generalized ordinarydifferential equations of Emden-Fowler type. Mem. Differential Equations Math. Phys. 34(2005) 153-156.

[29] Koplatadze R. Quasi-Linear funqtional differential equations with Property A. J. Math. Anal. Appl.330(2007), 483-510.

[30] Ladde G. S., Lakshimikantham V., Zhang B. G. Oscillation Theory of differential equations with deviating arguments. Dekker, New York,1977.

[31] Litsyn E. Stavroulakis I. On the oscillation of solutions of higher order Emden-Fowler state dependent advanced differential equations, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Appl 47(2001) pp. 3877-3883.

[32] Licko I. and Svec M. Le caractere oscillatory des solutions de I'equation $y^{(n)} + f(x)y^{\alpha} = 0,\ n > 1.$ Czech. Math. J. 13 (1963), 481-489.

[33] Mikusinski J.G. Sur I'equation $x^{(n)} + A(t)x = 0.$ Polon. Math. 1(1955), No. 2, 207-221.

[34] Rab M., Kriterien fur die oscillation der losungen der differentialgleichung $[p(x)y']' + q(x)y = 0,$ Casop. Pest. Mat. 84 (1959), No. 3, 335-370.

[35] Sturm C. Surles equations differentielles lineaires du second ordre, J. Math. Pures Appl. 1(1836), 106-186.