ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

სადოქტორო პროგრამა: მათემატიკა

ზვიად ყალიჩავა

სემინარი2

ნიუტონისა და სტეფენსონის იტერაციული მეთოდების ზოგიერთი საკითხი

ნაშრომის ხელმძღვანელი ჯემალ ფერაძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,

თსუ-ს ასოცირებული პროფესორი

ანოტაცია

ნაშრომი შედგება სამი თავისაგან.

I -თავში დამტკიცებულია ოპერატორული განტოლებისათვის ნიუტონის მეთოდის კრებადობის საკითხი, მაშინ როცა განტოლების ოპერატორი დიფერენცირებადია ფრეშეს აზრით. მოყვანილია რიცხვითი მაგალითი იმის საჩვენებლად, რომ შესაძლებელია შედეგის გამოყენება სკალარული განტოლების ამოსახსნელად.

II -თავში ნიუტონისა და სტეფენსონის მეთოდების გამოყენებით აგებულია მესამე რიგის იტერაციული მეთოდი. დამტკიცებულია თეორემა კრებადობის შესახებ. ამოხსნილია რამოდენიმე მაგალითი.

III - თვში განხილულია არაწრფივ განტოლებათა სისტემისათვის ნიუტონის მეთოდით ამოხსნის საკითხი. სახელდობრ, აგებულია ალგორითმი, რომლის გამოყენების შედეგად მიიღება ისეთი საწყისი მიახლოება, რომელიც გარკვეულ პირობებში უზრუნველყოფს იტერაციული პროცესის კრებადობას.

სარჩევი

ლ.ვ კენტოროვიჩის ნიუტონის მეთოდთან დაკავშირებული თეორემის შესახებ

თავი I

1.1 შესავალი

ჩვენ შევისწავლეთ ოპერატორული განტოლების მიახლოებითი ამონახსნის ნიუტონის მეთოდისთ მიღების საკითხი. [2] კარგად ცნობილი კანტოროვიჩის თეორემა შეიცავს ფრეშეს აზრით ოპერატორის მეორე რიგის წარმოებულის საზღვარს ან ლიფშიც-ფრეშეს აზრით ოპერატორის დიფერენცირებადობას საწყისი წერტილის მიდამოში. აქ ჩვენ ვამტკიცებთ თეორემებს ნიუტონის მეთოდის ლოკალურ და ნახევრად ლოკალურ კრებადობის შესახებ იმ დაშვებით, რომ ფრეშეს აზრით, დიფერენცირებადობას აქვს ადგილი მხოლოდ ერთ წერტილში, რაც უფრო სუსტუ მოთხოვნაა.

მოყვანილია მაგალითი, რომელიც ცხადყოფს, რომ ჩვენი შედეგის გამოყენება შესაძლებელია სკალარული განტოლების ამოხსნის შემთხვევაში.

განვიხილოთ $F(x) = 0$, (1) განტოლებისთვის.

x^* ამონახსნისთვის მიახლოების აგების საკითხები. აქ იგულისხმება, რომ F - განსაზღვრულია ბანახის X - სივრცის D - ქვესიმრავლეში მნიშვნელობით ბანახის Y - სივრცეში.

ერთ-ერთი პოპულარული მეთოდი, რომელიც გვაძლევს x^* - სთვის მიახლოებების მიმდევრობას არის ნიუტონის მეთოდი.

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1}F(x_n) \quad (n \geqslant 0) \quad (x_0 \in D). \qquad (2)$$

აქ $F'(x) \in L(x, y)$ წარმოადგენს F- ის ფრეშეს წარმოებულს $x \in D$ - წერტილში. არსებობს უამრავი პუბლიკაცია ნიუტონის მეთოდის კრებადობის თაობაზე. (იხ. [3-8] და იქ მოყვანილი ლიტერატურა. კერძოდ, კანტოროვიჩის კარგად ცნობილი კრებადობის თეორემა (იხ. თეორემები 3, 4 ან [8]) შეიცავს F – ის მეორე რიგის წარმოებულის საზღვარს, ან ფრეშეს აზრით დიფერენცირებადობის x_0 – ის გარკვეულ მიდამოში.

ბევრი პრაქტიკული ამოცანის შემთხვევაში [3] ეს მოთხოვნები არ სრულდება, მაგრამ ნიუტონის მეთოდით კრებადია. სწორედ ამიტომ ჩვენ დავამტკიცეთ თეორემები ნიუტონის მეთოდის ლოკალურ და ნახევრად ლოკალურ კრებადობაზე ზემოთ ჩამოყალიბებულებზე უფრო სუსტ დაშვებებში. კერძოდ, ჩვენ მოვითხოვთ F - ოპერატორისაგან ფრეშეს აზრით, უწყვეტად დიფერენცირებადობას $x = x_0$ წერტილში, ხოლო ლოკალური შედეგის შემთხვევაში, ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ F - არის უწყვეტად დიფერენცირებადი $x = x^*$ წერტილში. და ბოლოს, ჩენ მოგვყავს სამი რიცხვითი მაგალითი, რომელშიც გამოყენებულია ჩვენი შედეგები. კერძოდ, მეორე მაგალითში ჩვენ ვიყენებთ თეორემა 2-ს იმის საჩვენებლად, რომ შესაძლებელია სკალარული განტოლების ამოხსნა, რასაც ვერ გავაკეთებდით წინათ ჩამოყალიბებული შედეგებით.

1.1. კრებადობის ანალიზი

დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა ნიუტონის მეთოდის ნახევარ ლოკალური კრებადობის შესახებ.

თეორემა1. ვთქვათ, უწყვეტი F - ოპერატორი განსაზღვრულია ბანახის X - სივრცის ღია ამოზნექილ D - ქვესიმრავლეში მნიშვნელობებით ბანახის Y - სივრცეში და უწყვეტად დიფერენცირებადია ფრეშეს აზრით $x_0 \in D$ - ში.

ა) $F'(x_0)^{-1} \in L(Y, X)$;

ბ) სადაც η არის ისეთი პარამეტრი

$$0 < \|F'(x_0)^{-1}F(x_0)\| \leq \eta$$

გარდა ამისა, ვთქვათ, $\forall \varepsilon > 0$ - სთვის მოიძებნება ისეთი $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ისეთი, რომ

$$x \in U(x_0, \delta) = \{x \in X \,|\, \|x - x_0\| < \delta\}; \tag{5}$$

(c) *set* $c_0 = (1 - \varepsilon)^{-1}\varepsilon$ *and* $c = 2c_0$,

$$\left[\frac{c^2}{1-c} + c_0 + 1\right]\eta < \delta \tag{6}$$

for

$$\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{3}\right); \tag{7}$$

(d) $\bar{U}(x_0, \delta) \subseteq D$.

მაშინ (2) - ით განსაზღვრული ნიუტონის მეთოდი არის კორექტული და $\forall\, U(x_0, \delta)$ - სთვის და $n \geq 2$ - სთვის მართებულია ცდომილების შეფასებები.

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant c^n \|x_1 - x_0\| \leqslant c^n \eta \tag{8}$$

and

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \frac{c^n}{1-c}\|x_1 - x_0\|. \tag{9}$$

დამტკიცება. (6) -ის ძალით, $n = 0$ - სთვის ნიუტონის (2) მეთოდისათვის სრულდება

$$\|x_1 - x_0\| = \|F'(x_0)^{-1}F(x_0)\| \leqslant \eta < \delta. \tag{10}$$

დავუშვათ, რომ $x_1 \in U(x_0, \delta)$. (4) პირობის თანახმად ε - სთვის და შექცეული ოპერატორისათვის ბანახის ლემის ძალით არსებობს $F'(x_1)^{-1}$ და

$$\|F'(x_1)^{-1}F'(x_0)\| \leqslant (1 - \varepsilon)^{-1}. \tag{11}$$

$n = 1$ - სთვის ნიუტონის მეთოდი (2) გვაძლევს

$$x_2 - x_1 = -F'(x_1)^{-1}F(x_1) = -[F'(x_1)^{-1}F'(x_0)]F'(x_0)^{-1}$$

$$\times \left[\int_0^1 F'(x_0 + t(x_1 - x_0)) - F'(x_0)\right](x_1 - x_0)\,\mathrm{d}t, \tag{12}$$

და (4), (6) და (10), (12) – ის ძალით მივიღებთ

$$\|x_2 - x_1\| \leqslant (1-\varepsilon)^{-1}\varepsilon\|x_1 - x_0\| \leqslant c_0\|x_1 - x_0\|,$$

$$\|x_2 - x_0\| \leqslant \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \leqslant (1+c_0)\|x_1 - x_0\| \leqslant (1+c_0)\eta < \delta.$$

შევნიშნოთ, რომ $\|x_0 + t(x_1 - x_0) - x_0\| \leqslant t\|x_1 - x_0\| \leqslant \eta < \delta.$ მაშასადამე

$x_2 \in U(x_0, \delta)$.

დავუშვათ, რომ (8) და $x_k \in U(x_0, \delta)$ სრულდება $\forall k$- სთვის, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

(4) დან გამომდინარეობს, რომ არსებობს $F'(x_k)^{-1}$ და

$$\|F'(x_k)^{-1}F'(x_0)\| \leqslant (1-\varepsilon)^{-1}. \tag{13}$$

ნიუტონის მეთოდის თანახმად (4), (13) - დან ვღებულობთ

$$x_{k+1} - x_k = -[F'(x_k)^{-1}F'(x_0)]F'(x_0)^{-1}\left[\int_0^1 (F'(x_{k-1} + t(x_k - x_{k-1})) - F'(x_0)) + (F'(x_0) - F'(x_{k-1}))\right](x_k - x_{k-1})\,\mathrm{dt},$$

$$\|x_{k-1} + t(x_k - x_{k-1})\| \leqslant (1-t)\|x_{k-1} - x_0\| + t\|x_k - x_0\| \leqslant (1-t)\delta + t\delta = \delta,$$

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leqslant 2(1-\varepsilon)^{-1}\varepsilon\|x_k - x_{k-1}\| = c\|x_k - x_{k-1}\| \leqslant c^k\|x_1 - x_0\|,$$

რომელიც ამტკიცებს (8) - ის მართებულობას $\forall n \geq 0$ - სთვის. ინდუქციის წესის თანახმად დარჩა საჩვენებელი, რომ $x_{k+1} \in U(x_0, \delta)$.

ჩვენ გვაქვს

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x_0\| &\leqslant \|x_{k+1} - x_k\| + \|x_k - x_{k-1}\| + \cdots + \|x_2 - x_0\| \\ &\leqslant c^k\|x_1 - x_0\| + c^{k-1}\|x_1 - x_0\| + \cdots + c^2\|x_1 - x_0\| + c_0\|x_1 - x_0\| + \|x_1 - x_0\| \\ &\leqslant \left[\frac{1 - c^{k-1}}{1-c}c^2 + c_0 + 1\right]\eta < \left(\frac{c^2}{1-c} + c_0 + 1\right)\eta < \delta.\end{aligned}$$

ეს ნიშნავს, რომ $x_n \in u(x_0, \delta)$, $\forall n \geq 0$.

დავუშვათ, $k \geq 2$, $m \geq 0$ მაშინ გვაქვს

$$\begin{aligned}\|x_{k+m} - x_k\| &\leqslant \|x_{k+m} - x_{k+m-1}\| + \|x_{k+m-1} - x_k\| \\ &\leqslant \cdots \leqslant (c^{k+m-1} + \cdots + c^k)\|x_1 - x_0\| \\ &= \frac{1-c^m}{1-c}c^k\|x_1 - x_0\|.\end{aligned} \tag{14}$$

შეფასება (14) -დან გამომდინარეობს, რომ $\{x_n\}$ კოშის მიმდევრობაა ბანახის X სივრცეში, ამიტომ მიისწრაფვის $x^* \in \bar{U}(x_0, \delta)$ - სკენ. (სადაც, $\bar{U}(x_0, \delta)$ არის ჩაკეტილი სიმრავლე) (2)- ში $n \to \infty$ გადასვლის შედეგად და F -ის უწყვეტობის ძალით, ჩვენ ვღებულობთ $F(x^*) = 0$. შეფასება (9) გამომდინარეობს (14) -დან ზღვარზე გადასვლით, როცა $m \to \infty$.

და ბოლოს, ერთადერთობის დასამტკიცებლად დავუშვათ, რომ $x^*, y^* \in \bar{U}(x_0, \delta)$, რომლისთვისაც $F(x^*) = F(y^*) = 0$. წინა მსჯელობის მსგავსად მიიღება, რომ

$$x^* + t(y^* - x^*) \in \bar{u}(x_0, \delta)$$

გვასვს,

$$0 = F(y^*) - F(x^*) = \int_0^1 F'(x^* + t(y^* - x^*))(y^* - x^*)\,\mathrm{dt} = L(y^* - x^*).$$

ვინაიდან L არის შექცევადი ოპერატორი აქედან გამომდინარეობს, რომ $x^* = y^*$. რ.დ.გ.

თეორემა (1) - ის საილუსტრაციო მაგალითი მოვიყვანოთ.

მაგალითი 1.

ვთქვათ, $X = Y = R, D = [-1, 1], x_0 = 0{,}04$, და განვსაზღვროთ ფუნქცია F $D -$ ზე შემდეგნაირად

$$F(x) = e^x - 1.$$

ავირჩიოთ $\varepsilon = 0{,}19$ მაშინ გვექნება $\eta = 0{,}039210561$, მაშინ და $c = 0{,}469135802$. მარტივი გამოთვლები აჩვენებს, რომ თეორემა1-ის ყველა მოთხოვნა სრულდება. ამის გამო, არსებობს განტოლება (15) -ის ამონახსნი $x^* \in U(x_0, \delta)$ და $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$. შევნიშნოთ, რომ $x^* = 0$.

იმისათვის, რომ შევადაროთ თეორემა1 კანტოროვიჩის თეორემასთან, მოვიყვანოთ თეორემა1-ის ანალოგი უფრო მკაცრ პირობებში.

თეორემა2

ვთქვათ, F, x_0, η აკმაყოფილებს იგივე პირობებს, რაც თეორემა1-ში. გარდა ამისა, დავუშვათ, რომ არსებობს ისეთი $l > 0$, რომ

$$\|F'(x_0)^{-1}[F'(x) - F'(x_0)\| \leq l\|x - x_0\| \text{ ყოველი } x \in D - \text{სთვის} \tag{16}$$

და

$$h_l = \frac{2}{\eta} \leq 2(5 - 2\sqrt{6}). \tag{17}$$

მაშინ თეორემა1- ის შედეგები სრულდება $\forall\ \varepsilon \in I = [\varepsilon_0,\ \varepsilon_1]$, თუ $\forall\ \bar{U}(x_0, \delta) \subseteq D$, მაშინ

$\delta \in \mathrm{I}_0 = \left[c_1, \frac{\varepsilon}{l}\right]$ (18)

სადაც,

$$c_1 = \frac{\eta}{1-c} \quad (19)$$

და $\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ (\varepsilon_0 \le \varepsilon_1)$ *არის* $g(\varepsilon) = 0,$ (20) განტოლების ამონახსნები

სადაც,

$$g(\varepsilon) = 6\varepsilon^2 - (2 + h_l)\varepsilon + h_l \quad (21)$$

დამტკიცება

(3), (6), (7) და (16) - ის გამოყენებით, ჩვენ მივალთ იმ დასკვნამდე, რომ $c_1 \le \varepsilon/l,$ რაც ნიშნავს, რომ $g(\varepsilon) \le 0.$ ამიტომ ეს უტოლობა მართებულია ε, δ არჩევისა და (17) - ის ძალით.

ამით დასრულდა თეორემა2 - ის დამტკიცება.

თეორემა2 ან თეორემა1 - ის კანტოროვიჩის თეორემასთან შედარების მიზნით მოვიყვანოთ თეორემები [2, 3, 7] -დან.

თეორემა3

ვთქვათ $F: X \to Y$ არის ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფრეშეს აზრით, რაღაც ღია ამოზნექილ D ქვესიმრავლეში X - დან. x_0 წერტილისათვის D-დან არსებობს $F'(x_0)^{-1}$.

აღვნიშნოთ $L_1 = \sup_{x\in D} \|F'(x_0)^{-1}F''(x_0)\|.$ (22)

თუ $\mathrm{h}_{\mathrm{L}_1} = 2\eta \mathrm{L}_1 \le 1$ (23)

და $U(x_0, r_1^*) \subseteq D$

სადაც,

$$r_1^* = \frac{2\eta}{1 + \sqrt{1 - h_{L_1}}}\,, \quad (24)$$

მაშინ ნიუტონის $\{x_n\}$ $(n \ge 0)$ იტერაცია კორექტულია, მაშინ ყოველი $x_n \in U(x_0, r_1^*)$ და $\{x_n\}$ მიმდევრობა მიისწრაფვის $F(x) = 0$ განტოლების x^* ერთადერთი ამონახსნისკენ.

თეორემა4

ვთქვათ $F: X \to Y$ არის ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფრეშეს აზრით, რაღაც ღია ამოზნექილ D ქვესიმრავლეში X - დან. დავუშვათ,

(ა) არსებობს ისეთი $x_0 \in D$ - დან წერტილი რომ

$$F'(x)^{-1} \in L(y; x);$$

(ბ) არსებობს ლიფშიცის $\mathrm{L} > 0$ კონსტანტა, ისეთი რომ

$$\|F'(x_0)^{-1}[F'(x) - F'(x_0)\| \leq L\|x - x_0\| \tag{25}$$

(გ) ყოველი $x, y \in D$ - დან

$$h_L = 2\eta \mathrm{L} \leq 1 \tag{26}$$

და

$$u(x_0,\, r^*) \subseteq D,$$

სადაც r^* არის იგივე, რაც r_1^* და L იგივეა, რაც L_1 .

მაშინ ნიუტონის $\{x_n\}$ $(n \geq 0)$ იტერაცია კორექტულია, მაშინ ყოველი $x_n \in U(x_0, r^*)$ და $\{x_n\}$ მიმდევრობა მიისწრაფვის $F(x) = 0$ განტოლების x^* ერთადერთი ამონახსნისკენ.

შენიშვნა1

როცა ჩვენ (19)-ს ვადარებთ (23)-ს ან (26)-ს, ვხედავთ, რომ უკანასკნელი გვაძლევს „h'' -ის არჩევის უფრო მეტ შესაძლებლობას. ვინაიდან $l \leq L$ - დან ან $l \leq L_1$ – დან, ზოგად შემთხვევაში დავრწმუნდებით, რომ

(1) უფრო ადვილი გამოსათვლელია l ვიდრე L ან L_1.
(2) L ან L_1 ნიშნავს არსებობდეს l, მაგრამ არა პირიქით.
(3) L_1 ვერ გამოითვლება იმ შემთხვევაში, როცა x_0 - ის მიდამო შეიცავს სულ მცირე ერთ წერტილს, რომელზეც F – არ არის ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფრეშეს აზრით.
(4) თეორემა3 მოითხოვს, რომ F იყოს დიფერენცირებადი მთელ D- სიმრავლეში ან სულ ცოტა $U(x_0, r^*)$- ზე, იმ დროს როცა თეორემა2-ის (16) პირობა მოითხოვს ფრეშეს უწყვეტად დიფერენცირებადობას $F'(x)$ მხოლოდ $x = x_0$ -ში.
(5) $\mathrm{h}_{\mathrm{L}_1}/h_l$ ან h_L/h_l შეიძლება იყოს ნებისმიერად დიდი, როგორც ამას ადასტურებს შემდეგი მაგალითი2.

მაგალითი2

ვთქვათ $X = Y = R$, $x_0 = 0$ და განვსაზღვროთ ფუნქცია F R-ზე ასე:

$$F(x) = p_0(x) + p_1 + p_2 \sin e^{p_3 x}, \tag{27}$$

სადაც p_i მოცემული პარამეტრია.

თუ გამოვიყენებთ (27)-ს ჩვენ ადვილად დავინახავთ, რომ დიდი p_3 -სთვის და საკმარისად მცირე p_2 -სთვის $\mathrm{h}_{\mathrm{L}_1}/h_l$ ან h_L/h_l შეიძლება იყოს ნებისმიერად დიდი. მიუხედავად იმ

ფაქტისა, რომ h_l არის უფრო მცირე ვიდრე $\mathrm{h}_{\mathrm{L}_1}/h_l$ ან h_L/h_l შესაძლებელია 1 და 2 თეორემების გამოყენება სადაც შეუძლებელია 3 და 4 თეორემების გამოყენება.

ჩამოვაყალიბოთ თეორემა ნიუტონის მეთოდის ლოკალურ კრებადობაზე

თეორემა5

ვთქვათ F არის უწყვეტი ოპერატორი განსაზღვრული ბანახის X - სივრცის ღია ამოზნექილ D ქვესიმრავლეში მნიშვნელობებით ბანახის Y - სივრცეში და უწყვეტად დიფერენცირებადი ფრეშეს აზრით, და $F(x)=0$ განტოლების მარტივ x^* ფესვში. დაშვებები F -ზე იწვევს, რომ ყოველი $\varepsilon^*>0$ -სთვის არსებობს ისეთი $\delta^*=\delta^*(\varepsilon^*)>0$ ისეთი, რომ

$$\|F'(x^*)^{-1}[F'(x^*)-F'(x)\| \leq \varepsilon^*, \tag{28}$$

ყოველი $x \in u(x^*;\ \delta^*)$.

დავუშვათ , $\varepsilon^* \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$,

$$x \in \bar{U}(x^*;\ \delta^*),$$

$$\bar{U}(x^*;\ \delta^*) \subseteq D,$$

აღვნიშნოთ $d=2\varepsilon^*(1-\varepsilon^*)^{-1}$.

(2) -ით განსაზღვრული ნიუტონის მეთოდი კორექტულია მაშინ ნიუტონის $\{x_n\}$-ები $(n \geq 0)$ ეკუთვნის $\bar{U}(x^*,\ r^*)$ –ს ყოველი $n \geq 0$ -სთვის და x_n მიისწრაფვის x^* -სკენ. მეტიც, ნებისმიერი $n \geq 0$ -სთვის მართებულია ცდომილების შემდეგი შეფასება

$$\|x_{n+1}-x^*\| \leq d\|x_n-x^*\| \qquad (n \geq 0) \tag{29}$$

დამტკიცება.

დამტკიცება გამომდინარეობს თეორემა1-ის ერთ-ერთი დებულების გამოყენების შედეგად

$$x_{n+1}-x^* = -[F'(x_n)^{-1}F'(x^*)]\int_0^1 F'(x^*)^{-1}\left[F'\left(x^*+t(x_n-x^*)\right)-F'(x^*)\right)+(F'(x^*)-F'(x_n))](x_n - x^*)dt. \tag{30}$$

შენიშვნა2

პირობა (28) შეიძლება შეიცვალოს მოთხოვნით, რომელიც არ საჭიროებს x^* -ის ცოდნას.

დავუშვათ, რომ F ოპერატორი აკმაყოფილებს განტოლობას [1, 2, 7]

$$F'(x) = P\big(F(x)\big), \tag{31}$$

სადაც P ცნობილი ოპერატორია. მაშინ ჩვენ მივიღებთ

$$F'(x^*) = P\big(F(x^*)\big) = P(0)$$

აქედან გამომდინარე, (28)- ს შეგვიძლია ისეთი სახე მივცეთ, რომ არ იყოს x^* -ის ცოდნა საჭირო.

მოვიყვანოთ მაგალითი.

მაგალითი3

ვთქვათ, $X = Y = R$ F განისაზღვრება ასე:

$$F(x) = e^x - a, \qquad a > 0.$$

შევარჩიოთ $P(x) = x + a.$

მაშინ (31) სრულდება, შევარჩიოთ $D = U(0,1)$, $a = 1$ და $\varepsilon^* = 0{,}3$. მაშინი ადვილად შესაძლებელია დავინახოთ, რომ თეორემა5-ის ყველა მოთხოვნა სრულდება. $\delta^* = 0{,}1$.

მაშასადამე, მეხუთე თეორემემის დასკვნები შესაძლებელია გამომდინარეობდეს განტოლებიდან

$e^x - 1 = 0.$

თავი II

2.1 შესავალი

ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი პრობლემა მდგომარეობს $f(x) = 0$ განტოლების ნამდვილი ფესვის პოვნაში

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

ასეთი განტოლების ამოხსნის ანალიზური მეთოდი იშვიათად არსებობს, ამიტომ ერთადერთ გამოსავლად გვრჩება მიახლოებული ამონახსნის პოვნა იტერაციული მეთოდით. არსებობს სახელმძგვანელოები, სადაც აღწერილია მნიშვნელოვანი ალგორითმები [2; 3; 5] ნიუტონის მეთოდი (NM) ალბათ არის ყველაზე ცნობილი და გამოყენებადი. ზოგიერთმა მკვლევარმა მოახდინა ამ მეთოდის მოდიფიცირება სხვადასხვა მიმართულებით. ერთ-ერთ ასეთი სახის მეთოდად, რომელიც მიღებულია ნიუტონის მეთოდიდან. წარმოებული შეცვლილია არაწარმოებადი წევრით წარმოადგენს სტეფენსონის მეთოდი. (SM) [4, 7]. ამ მეთოდში გამოიყენება ფუნქციის ორი მნიშვნელობა და ამ მეთოდის კრებადობის რიგი არის 2.

ამ სტატიაში ავტორმა ააგო მესამე რიგის მეთოდი. ამ მეთოდში მოითხოვება ორი ფუნქციის მნიშვნელობა და წარმოებულის ერთი წევრი. აქედან გამომდინარე, გვაქვს იმის საფუძველი ვუწოდოთ ამ მეთოდს ნიუტონ-სტეფენსონის მეთოდი.

2.2 მეთოდი და მისი კრებადობა

(1) განტოლების მარტივი ფესვის სტეფენსონის მეთოდით საპოვნელად იყენებენ ფორმულას

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{g(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots, \qquad (2)$$

სადაც $g(x_n) = \frac{f\left(x_n + f(x_n)\right) - f(x_n)}{f(x_n)}$, წარმოადგენს $f'(x_n)$ -ის წარმოებულის მნიშვნელობას x_n წერტილში. ამას ეწოდება ნაზრდის კოეფიციენტი.

(2) მეთოდი არის კვარდატულად კრებადი (მეორე რიგით), თუ $f'(x_n) \neq 0$. ე.ი $f\left(x_n + f(x_n)\right) - f(x_n) \neq 0$ ფესვის მახლობლობაში. (2) მეთოდის გამოყენებით განვიხილოთ შემდეგი სახის იტერაციული სქემა

$$h(x_n) = \frac{f\left(x_n + a(x_n) f(x_n)\right) - f(x_n)}{a(x_n) f(x_n)}, \qquad (3)$$

წარმოადგენს წარმოებულის ახალ მიახლოებას. აქ $a(x_n)$ არის ისეთი ფუნქცია, რომელიც უნდა განვსაზღვროთ.

ჩვენ დავამტკიცებთ შემდეგ თეორემას:

თეორემა 1.

ვთქვათ, $f(x)$ საკმარისად გლუვი ფუნქციაა α ფესვის მიდამოში და $f(\alpha) \neq 0$. ვთქვათ $f''(x)$ უწყვეტია მიდამოში, მაშინ ფორმულა (3) კუბურად (3-რიგით) კრებადია α -სკენ თუ $a(x) = \frac{1}{f'(x)}$.

დამტკიცება.

ვთქვათ e_n არის n -ური იტერაციის ცდომილება, ანუ

$$e_n = x_n - \alpha. \tag{4}$$

(3) - ფორმულაში (4) - ის გამოყენებით მივიღებთ:

$$e_{n+1} = \frac{a(e_n+\alpha)f^2(e_n+\alpha)}{f(e_n+\alpha+a(e_n+\alpha)f(e_n+\alpha)) - f(e_n+\alpha)}. \tag{5}$$

$x = \alpha$ წერტილის მიდამოში ტეილორის გაშლის გამოყენებით (5) გამოსახულება გარდაქმნების შედეგად გვაძლევს

$$\begin{aligned} e_{n+1} = \Big[& e_n^2 a(\alpha) f'(\alpha) f''(\alpha)(1 + a(\alpha)f'(\alpha)) \\ & + e_n^3 \Big\{ (1 + a(\alpha)f'(\alpha))(a(\alpha)f''(\alpha) + 2a'(\alpha)f'(\alpha)) \\ & - a'(\alpha)f'(\alpha)f''(\alpha) + \frac{1}{3}(1 + a(\alpha)f'(\alpha))^3 f'''(\alpha) - \frac{1}{3}(1 + a(\alpha)f'(\alpha))f'''(\alpha) \\ & - \frac{1}{2}a(\alpha)(f''(\alpha))^2 \Big\} + o(e_n^4) \Big] \cdot \Big[2a(\alpha)(f'(\alpha))^2 + e_n \Big\{ a(\alpha)f'(\alpha)f''(\alpha) \\ & + 2a'(\alpha)(f'(\alpha))^2 - f''(\alpha) + (1 + a(\alpha)f'(\alpha))^2 f''(\alpha) \Big\} + o(e_n^2) \Big]^{-1}. \end{aligned} \tag{6}$$

იმისათვის, რომ მივიღოთ მესამე რიგი უნდა დავუშვათ, რომ $1 + a(\alpha)f'(\alpha) = 0$, რასაც მივყავართ ასეთ ტოლობამდე

$$a(\alpha) = -\frac{1}{f'(\alpha)} \tag{7}$$

თუ ჩავსვამთ (7)-ს (6) -ში მივიღებთ განტოლებას ცდომილებისთვის

$$e_{n+1} = e_n^3 \left[\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right]^2 + o(e_n^4). \tag{8}$$

ამრიგად, თუ ჩვენ (7) -ში α -ს შევცვლით x -ით, ჩვენ შევინარჩუნებთ კრებადობას მესამე რიგით. მაშინ მივიღებთ

$$a(\alpha) = -\frac{1}{f'(x)}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მაშასადამე, (3) ფორმულა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f^2(x_n)}{f'(x_n)\big(f(x_n) - f(x_n^*)\big)}, \tag{9}$$

სადაც $\quad x_n^* = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

ფორმულა (9)- ში წარმოებული f' შეუძლებელია შეიცვალოს წარმოებულის სხვა გამოსახულებით, როგორც ეს ხდება სტეფენსონის მეთოდის (2) -ფორმულაში.

Table 1
Numerical Examples

$f(x)$	x_0	Root (α)	Iteration (n) by		
			NSM	NM	SM
$\tan^{-1}(x)$	2	0.00000000000000	4	Failure	Failure
$\sin(x) - x/2$	2	1.89549426703398	4	Not converges to required root	4
$10x\exp(-x^2) - 1$	1	1.67963061042845	3	5	Failure
$x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720$	15	15.98287398060170	4	7	Failure
$x\log 10(x) - 1.2$	2	2.74064609597369	3	5	5

2.3 რიცხვითი შედეგები

შედარებულია არსებული მეთოდის ნსმ განხორციელება ნმ-თან და სმ-თან . შედეგები შეჯამებულია ცხრილში 1 Table 1.
გამოთვლები წარმოებულია ორმაგი არითმეტიკული სიზუსტით. ადვილად შეიძლება იმის დანახვა, რომ ნსმ იყენებს უფრო ნაკლებ ირიტაციას უფრო მაღალი რიგის გამო. აგრეთვე, რიცხვობრივი შედეგებიდან ძალიან გასაგებია, რომ პრობლემებში, სადაც ნმ და სმ მარცხს განიცდიან, ნსმ უახლოვდება ფესვს ძალიან ეფექტურად.

თავი 3

ნიუტონის მეთოდისათვის საწყისი მიახლოების აგების საკითხი

3.1 შესავალი

არაწრფივ განტოლებათა სისტემების ამოსახსნელად ხშირად გამოიყენება ნიუტონის მეთოდი, მაგრამ ისეთი საწყისი მიახლოების შერჩევა, რომელიც აკმაყოფილებს კრებადობის პირობებს დაკავშირებულია გარკვეულ სიძნელეებთან. აქ განიხილება ისეთი იტერაციული პრიცესი, რომელიც არკვეული პირობების შესრულების შემთხვევაში ბიჯების სასრული რაოდენობის შემდეგ იძლევა საშუალებას ვიპოვოთ საჭირო საწყისი მიახლოება. ამასთან რაც მნიშვნელოვანია ამ მიახლოების მიღწევის შემდეგ აღნიშნული პროცესი ავტომატურად გადადის ნიუტონის კლასიკურ ალგორითმში.

3.2 საწყისი მიახლოების აგების ალგორითმი

განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

სადაც

$$x = \{x_i\}_{nX1}, \qquad f = \{f\}_{nX1}, \qquad f_i(x) \in C^{(2)}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i \partial x_k}\right| \le N, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

მისი ამონახსნის საპოვნელად ხშირად გამოიყენება ალგორითმი. [1]

$$x^{(m+1)} = x^{(m)} - f_x^{-1}\left(x^{(m)}\right) f\left(x^{(m)}\right), \; m = 0, 1, \ldots, \qquad (2)$$

სადაც

$$f_x = \left\{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right\}_{nXn}$$

(2) –ის კრებადობა x^* ამონახსნისკენ უზრუნველყოფილია თუ x^0 საკმაოდ ახლოსაა x^* - თან.

$$det f_x\left(x^{(0)}\right) \ne 0, \quad 2nN\left\|f_x^{-1}\left(x^{(0)}\right)\right\|^2 \left\|f\left(x^{(0)}\right)\right\| \le 1, \qquad (3)$$

სადაც გამოყენებულია $\|\cdot\|_1$ [1]. ისეთი საწყისი მიახლოების შერჩევა, რომელიც აკმაყოფილებს (3) -ს საზოგადოდ რთულია. ამ მიახლოების ასაგებად ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ შემდეგი იტერაციული პროცესი.

$$x^{(m+1)} = x^{(m)} - f_x^{-1}\left(x^{(m)}\right)\left[f\left(x^{(m)}\right) - a_m f(x^0)\right], \; m = 0, 1, \ldots, \qquad (4)$$

სადაც

$$a_m = max\left[0,\ \ 1 - \frac{1}{2nN\|f(x^0)\|}\left(\frac{1}{\left\|f_x^{-1}(x^{(m)})\right\|^2} + \frac{3}{4}\sum_{l<m}\frac{1}{\left\|f_x^{-1}(x^{(l)})\right\|^2}\right)\right]. \qquad (5)$$

m - ფიქსირებულ ბიჯზე (4) ჩვენ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ (6) - სისტემის ამოსახსნელად გამოიყენება ალგორითმი (2) რომელშიც საწყის მიახლოებად აღებულია $x^{(m)}$ - წერტილი. ერთის მხრივ, $f(x) = a_m\, f(x^0), \quad a_m \in [0, 1].$ (6)

ლემა. თუ $detf_x\left(x^{(0)}\right) \neq 0$, მაშინ (4) - დან მიღებული ნებისმიერი $x^{(m)}$ - სთვის (6) სისტემის მიმართ გამოყენებული პირობა (3) სრულდება. ე.ი. $detf_x\left(x^{(m)}\right) \neq 0.$

$$2nN\left\|f_x^{-1}\left(x^{(m)}\right)\right\|^2\left\|f\left(x^{(m)}\right) - a_m f\left(x^{(0)}\right)\right\| \leq 1; \qquad (7)$$

მეორეს მხრივ, a_m მიმდევრობა არაზრდადია, ე.ი. $a_{m+1} < a_m$.

დამტკიცება. გამოვიყენოთ ინდუქციის მეთოდი. $m = 0$ გვაქვს

$detf_x\left(x^{(0)}\right) \neq 0$ და

$$2nN\left\|f_x^{-1}\left(x^{(0)}\right)\right\|^2\left\|f\left(x^{(0)}\right) - a_0 f\left(x^{(0)}\right)\right\| =$$
$$= 2nN\left\|f_x^{-1}\left(x^{(0)}\right)\right\|^2\left\|f\left(x^{(0)}\right)\right\| min\left(1,\quad \frac{1}{2nN\left\|f_x^{-1}(x^{(0)})\right\|^2\left\|f(x^{(0)})\right\|}\right) \leq 1.$$

დავუშვათ, რომ (7) სრულდება, მაშინ $(m+1)$ ბიჯისათვის მივიღებთ

$$\left\|x^{(m+1)} - x^{(m)}\right\| \leq \frac{1}{2nN\left\|f_x^{-1}(x^{(m)})\right\|},$$

$$\left\|E - f_x^{-1}\left(x^{(m)}\right)f_x\left(x^{(m+1)}\right)\right\| \leq \left\|f_x^{-1}\left(x^{(m)}\right)\right\| \cdot \left\|f_x\left(x^{(m+1)}\right) - f_x\left(x^{(m)}\right)\right\|$$
$$\leq\ nN\left\|f_x^{-1}\left(x^{(m)}\right)\right\|\left\|x^{(m-1)} - x^{(m)}\right\| \leq \frac{1}{2}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\det\left[f_x^{-1}\left(x^{(m)}\right)f_x\left(x^{(m+1)}\right)\right] = \frac{\det f_x(x^{(m+1)})}{\det f_x(x^{(m)})}\ \neq 0.$$

ე.ი.

$$\det f_x\left(x^{(m+1)}\right) \neq 0; \qquad (8)$$

$$\left\|f_x^{-1}\left(x^{(m+1)}\right)\right\| \leq \left\|f_x^{-1}\left(x^{(m+1)}\right)f_x\left(x^{(m)}\right)\right\|\left\|f_x^{-1}\left(x^{(m)}\right)\right\| \leq 2\left\|f_x^{-1}\left(x^{(m)}\right)\right\|,$$

$$a_m - a_{m+1} = \frac{1}{2nN\left\|f(x^{(0)})\right\|}\left(\frac{1}{\left\|f_x^{-1}(x^{(m+1)})\right\|^2} - \frac{1}{4\left\|f_x^{-1}(x^{(m+1)})\right\|^2} \geq 0\,,\right)$$

ე.ი.

$$a_{m+1} \leq a_m \, ;$$

$$\left\| f\left(x^{(m+1)}\right) - a_{m+1} f\left(x^{(0)}\right) \right\| \leq \left\| f\left(x^{(m+1)}\right) - f\left(x^{(m)}\right) - f_x\left(x^{(m)}\right)\left(x^{(m+1)} - x^{(m)}\right) \right\| +$$

$$(a_m - a_{m+1}) \left\| f\left(x^{(0)}\right) \right\| \leq \frac{1}{2nN \left\| f_x^{-1}(x^{(m+1)}) \right\|^2} \, , \qquad (9)$$

ე.ი.

$$2nN \left\| f_x^{-1}\left(x^{(m+1)}\right) \right\|^2 \left\| f\left(x^{(m+1)}\right) - a_{m+1} f\left(x^{(0)}\right) \right\| \leq 1. \qquad (10)$$

(8), (9), (10) უტოლობები ამტკიცებს ლემას.

განვიხილოთ რაიმე ამოზნექილი G არე, რომელიც შეიცავს (1) სისტემის x^* ამონახსნს. ვთქვათ, $f(x)$ რეგულარულად ასახულია G არეში. [2] ე.ი. $f(x) \in C^{(2)}(G)$, $det f_x(x) \neq 0 \, , x \in G$ და $f(x^{'}) \neq f(x'')$, მაშინ $x^{'} \neq x''$, $x^{'}$, $x'' \in G$. ცხადია, რომ x^* (1) - ის მარტივი ფესვია და ერთადერთია G არეში.

3.3 თეორემა მეთოდის კრებადობის შესახებ

ადვილია იმის ჩვენება, რომ (2) ნიუტონის ალგორითმისათვის x_0 წერტილი აკმაყოფილებს (3) პირობას მაშინ ეს წერტილი ეკუთვნის ზემოთ აღწერილი თვისების მქონე არეს. ზოგად შემთხვევაში მოცემული დებულების შებრუნებული დებულება საზოგადოდ არაა სამართლიანი, მაგრამ მართებულია:

თეორემა

ნებისმიერი $x_0 \in G$ -სთვის (4) პროცესი სასრული ბიჯების m_0 რაოდენობის ჩატარების შედეგად მივყავართ ისეთ $x^{(m_0)}$ წერტილთან, რომლისთვისაც სამართლიანია ნიუტონის მეთოდის კრებადობის (3) პირობა. ამასთან, $a_m = 0, \ m \geq m_0$.

დამტკიცება

ჯერ ვაჩვენოთ, რომ მიმდევრობა $\left\| f_x^{-1}\left(x^{(m)}\right) \right\|$ შემოსაზღვრულია. დავუშვათ საწინააღმდეგო, როცა $\left\| f_x^{-1}\left(x^{(m)}\right) \right\| \to \infty$ მაშინ $m \to \infty$. ლემის მეორე დებულების ძალით $a_m \to \tilde{a} f\left(x^{(0)}\right)$. G არის

განსაძღვრებიდან და რეგულარული ასახვის თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ $f(G)$ არე ამოზნექილია, ამასთან $f\left(x^{(0)}\right) \in f(G)$, $f\left(x^{(*)}\right) = 0 \in f(G)$, მაშასადამე $\tilde{a} f\left(x^{(0)}\right) \in f(G)$.

ამ წერტილის წინა სახე $\tilde{x} = f^{-1}\left[\tilde{a} f\left(x^{(0)}\right)\right] \in G$, ამრიგად, $x^m \to \tilde{x}$, $\det f_x(\tilde{x}) \neq 0$.

ამრიგად, $\left\| f_x^{+1}\left(x^{(m)}\right) \right\| \to \| f_x^{-1}(\widetilde{x_+}) \| < \infty$, რაც ეწინააღმდეგება საწყის დაშვებას. ამგვარად,

$\left\| f_x^{-1}\left(x^{(m)}\right) \right\| \leq L < \infty$ შემოსაზღვრულია.

ლიტერატურა

თავი I –ის ლიტერატურა
[1] I.K. Argyros, A new semilocal convergence theorem using hypotheses on the second Frecher-derivative, J. Comput. Appl. Math. 130 (2001) 369-373.
[2] I. A. Argyros, On a theorem of L. A. Kantorovich coucerning Newton's method, J. comp. Appl. Math, 155, 223-230, 2003.
[3] I.K. Argyros, F. Szidarovszky, The Theory and Applications of Iteration Methods, CRC. Press, Boca Raton, FL, 1993.
[4] A. Galantai, The Theory of Newton's method, J. Comput. Appl. Math. 124 (2000) 25-44.
[5] J.M. Gutierrez, A new semilocal convergence theorem for Newton's method, J. Comput. Appl.79 (1997)
[6] M.A. Hernandez, Newton's Raphson's method and convexity, Zb. Rad Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat. 22 (1) (1992) 159-166.
[7] Z. Huang, A note on the Kantorovich theorem for Newton iteration, J. comput. Appl. 47 (1993) 211-217
[8] L.V. Kantorovich, G.P. Akilov, Functional Analysis, Pergamon Press, Oxford, 1982.

თავი II – ის ლიტერატურა
[1] S. Amat, S. Busquier, J.M. Gutierrez, Geometric constructions of iteration function to solve nonlinear equations, J.Comput. Appl. Math. 157 (2003) 197-205.
[2] J.E. Dennis, R.B. Schanable, Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.
[3] P. Jarratt, A Review of Methods for solving Nonlinear Algebric Equations, Gordon and Breach Science Publishers, London, 1970.
[4] L.W. Johnson, R.D. Riess, Numerical Analysis, Addison-Wesley, Reading, MA, 1977.
[5] A.M. Ostrowski, Solution of Equations in Euclidean and Banach Space, third edition, Academic Press, New York, 1973.
[6] J.R. Sharma, A composite third order Newton-Steffensen method for solving nonlinear equations, Appl. Math.comp, 169, 242-246, 2005.
[7] I.F. Steffensen, Remarks on iteration, Skand Aktuarietidskr. 16 (1933) 64-72.

თავი III- ის ლიტერატურა
[1] V.P Demidovich, N.A. Foundations of computacional mathematics, Moscow, 1970 (in Russian).
[2] M.K. Grebencha, S.I. Novoselow, A course of mathematical analysis, Visshaya shkola, Moscow, 1961 (in Russian).
[3] L.V. Kantorovich, On Newton's method, Trudy Mat. Inst. An SSSR, 28, 104-147, 1949 (in Russian).
[4] O.Y. Kulchitsky, L.I. Shimilevich, On the finding of a initial approxsimation for Neeton's method, Zh. Vich mat. i Mat. fyz, 14, #1, 1016-1018, 1974, (in Russian).