ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მიმართულება: კომპიუტერული მეცნიერებები

დოქტორანტის კოლოქვიუმი

ჰოლონომური წირების ჰოლონომური პარამეტრიზაცია

დოქტორანტი: ვიოლეტა აფხაზავა

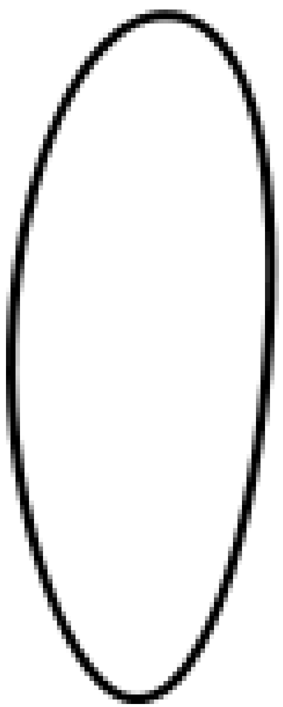
სამეცნიერო ხელმძღვანელი: პროფესორი ალექსანდრე გამყრელიძე

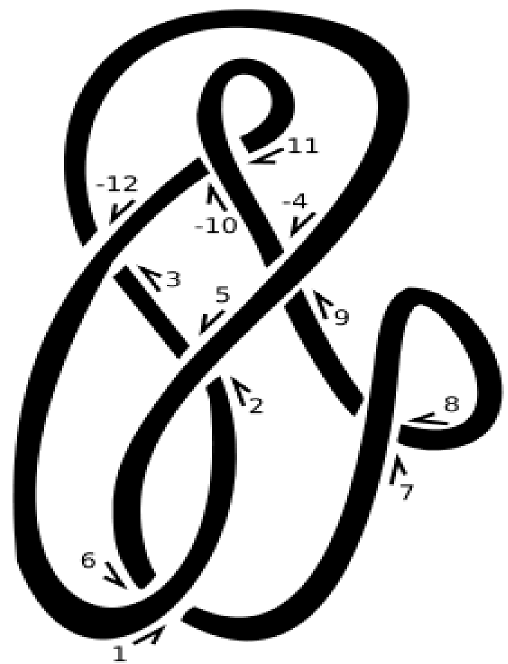
თბილისი

2017 წელი 11 ივლისი

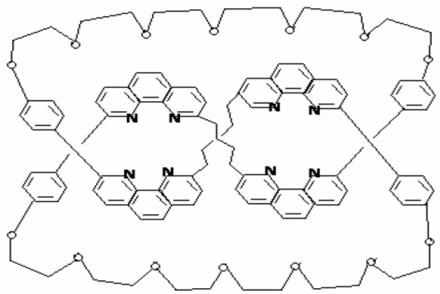
კვანძები მათემატიკაში

$$f\colon S^1 \to R^3, \qquad S^1 \subset R^2$$

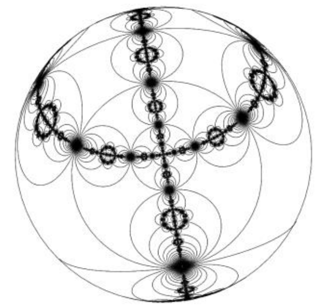


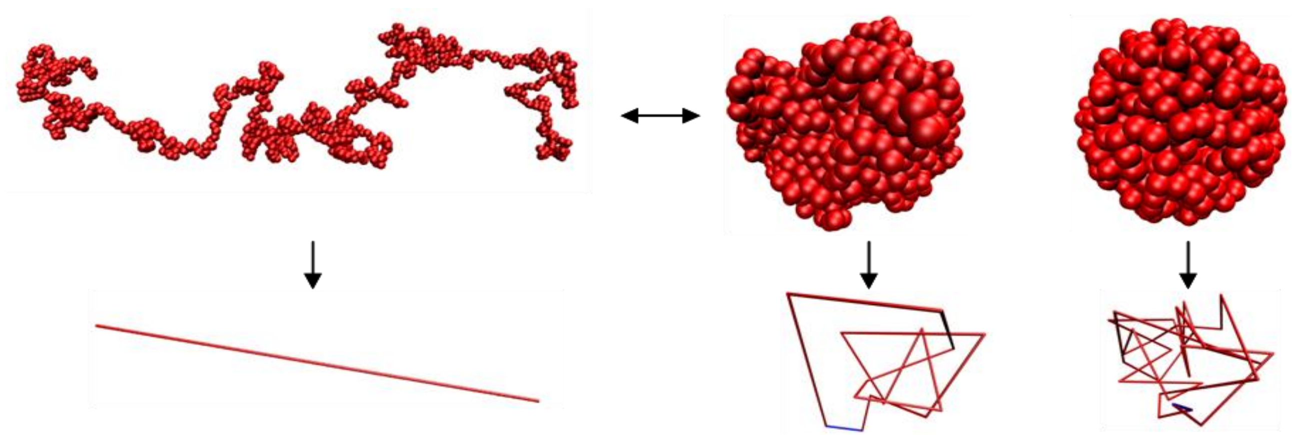


კვანძების გამოყენების სფეროები

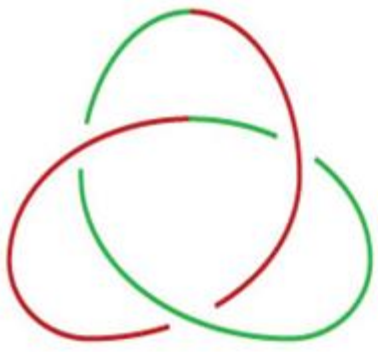


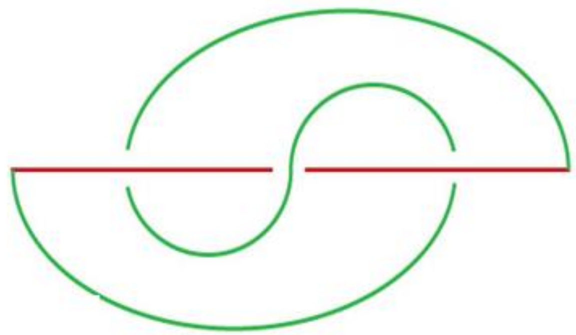
Molecular trefoil knot

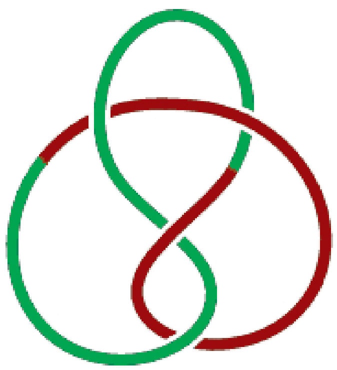


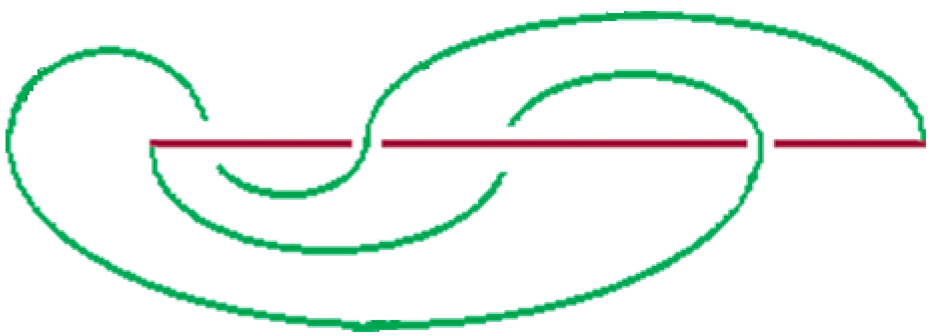


ნებისმიერი შეკრული წირი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ
ორი არათვითგადამკვეთი ნაწილის გაერთიანების
ანუ AFL (Arcade_Faden_Lage) სახით

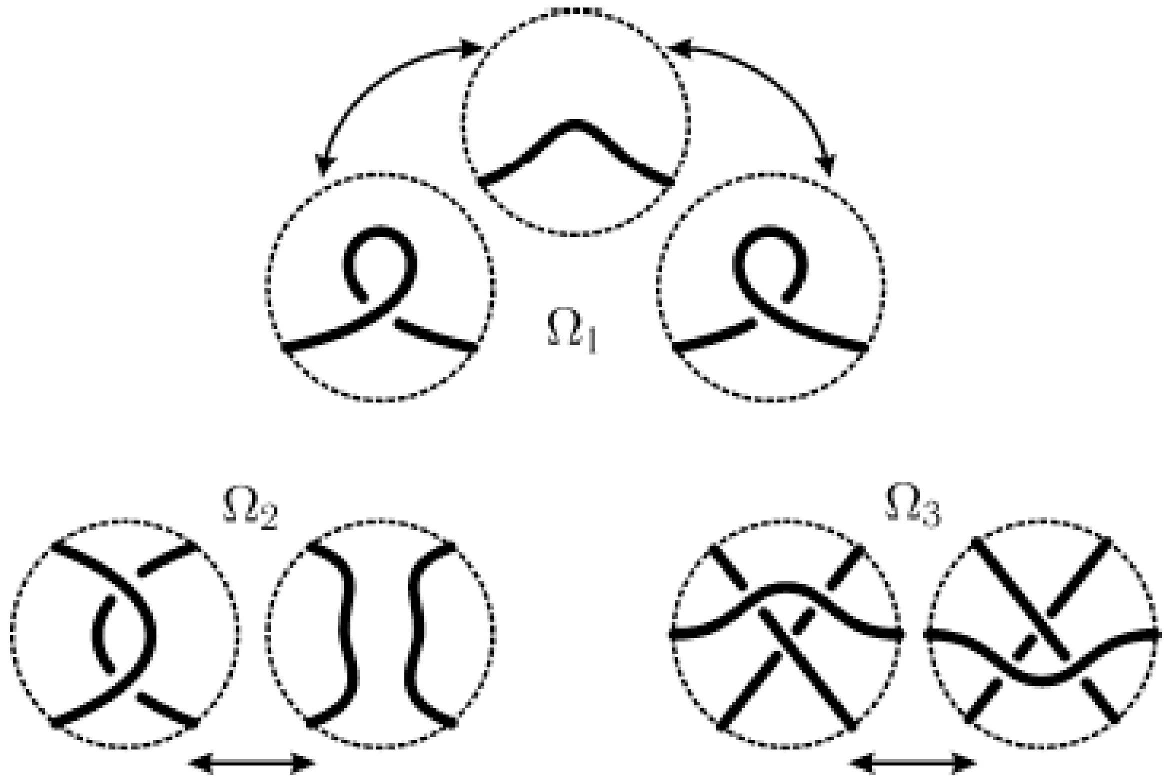




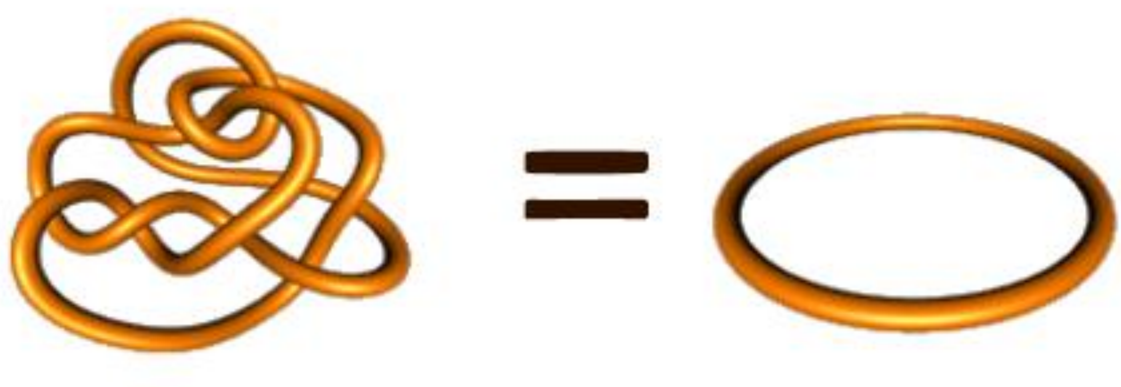




რაიდემაისტერის გარდაქმნები



კვანძების იზოტოპურობა



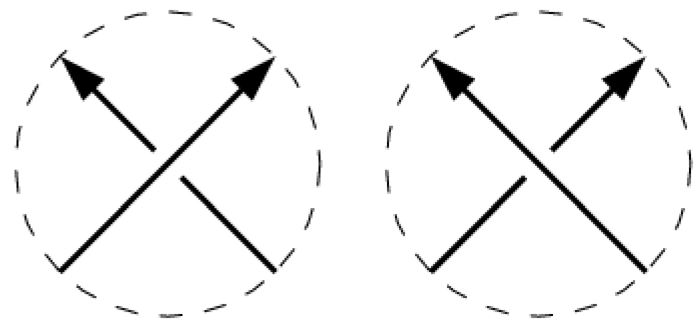
კვანძების ჩაწერა

$Input$: $\{C_i^e \,|\, C = S, T, \;\; e = +1, -1, \; i = 1 \dots m\}$

$Output$: $\{C_i \,|\, C = S^{-1}, T^{+1}, i = 1 \dots n \;\}$

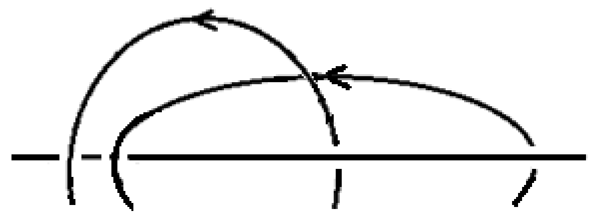
$$Input = \; S_0^{-1} T_1^{+1} S_2^{-1}$$

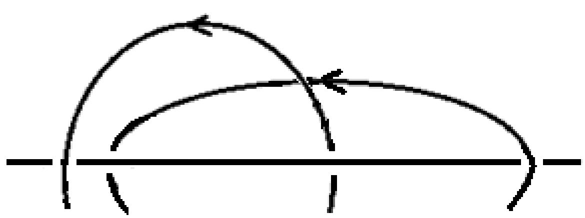
$$Output = \; S_5 \, S_1 S_3 T_2 T_0 T_4$$

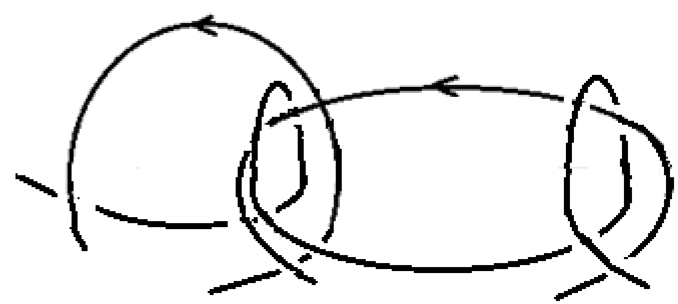


$\epsilon(p) = +1$ $\quad$ $\epsilon(p) = -1$

ჰოლონომური და არაჰოლონომური კვეთები







კვანძების ექვივალენტურობა

ყოველი კვანძი მოცემულ ანბანზე წარმოქმნის მინიმალური სიტყვების უნიკალურ სიმრავლეს (კვანძის ყოველი AFL წარმოდგენისათვის არსებობს ერთადერთი მინიმალური სიტყვა).

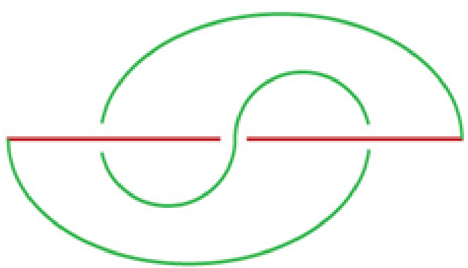
თუ ორი K_1 და K_2 კვანძი წარმოქმნის მინიმალური სიტყვების ორ S_1 და S_2 სიმრავლეს, მაშინ K_1 და K_2 კვანძები ერთმანეთის ექვივალენტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ S_1 და S_2 სიმრავლეებს გააჩნიათ საერთო მინიმალური სიტყვა (საერთო AFL წარმოდგენა)

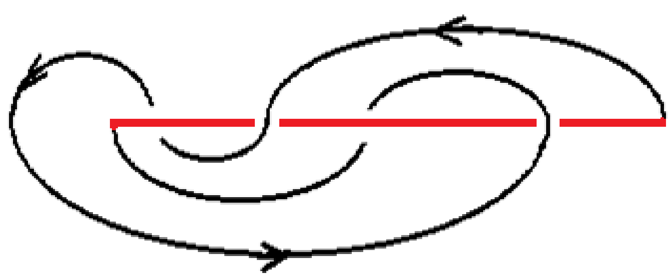
AFL წირების გარდაქმნა ჰოლონომურ სახეზე

$AFL \to Holonomic$ ალგორითმი

1. თავიდან პირობითად ვუშვებთ, რომ ARCADE არის სწორი ხაზი, რომელიც დევს აბსცისთა ღერძზე. ამ პირობას ვიყენებთ FADEN-ის შედარებით ადვილად გარდასაქმნელად.

2. ვამატებთ “კიდურა” კვანძებს, ანუ იმ წერტილებს, სადაც FADEN გადადის ARCADE-ში. თუ AFL ჩანაწერში კვანძები ისეა განლაგებული, რომ “კიდურა” კვანძების ჩამატების შემთხვევაში FADEN თვითგადამკვეთი გამოდის, AFL-ის კონსტრუირებისათვის ვიქცევით შემდეგნაირად: რკალში, რომელიც გადაკვეთს მასზე ადრე გავლებულ რკალს, საწყისი *i* წერტილის შემდეგ ვამატებთ ARCADE-ს გარეთ ახალ წერტილს იმის გათვალისწინებით, თუ რომელ მხარესაა AFL -ის საბოლოო წერტილი – *i*-ს მარცხნივ თუ მარჯვნივ, და აქედან გადავდივართ რკალის საბოლოო *i+1* წერტილზე, რომელიც გადაინომრება და გახდება *i+2.* შესაბამისად გადაინომრება მომდევნო წერტილებიც. (O(n)).





AFL წირების გარდაქმნა ჰოლონომურ სახეზე

$AFL \rightarrow Holonomic$ ალგორითმი

3. ვადგენთ არაჰოლონომური გადასვლების მქონე რკალების (ARCADE-ს ზემოთ მარჯვნივ მიმართული, ARCADE-ს ქვემოთ მარცხნივ მიმართული) არსებობას. თუ ასეთი არ არის, გადავდივართ კვეთების ჰოლონომურობის შემოწმებაზე (პ. 6) (O(n)).

4. ჰოლონომური გადასვლების გარდასაქმნელად ვიქცევით შემდეგნაირად :

ა. თუ შემოსულ სიტყვაში არაჰოლონომური გადასვლა რაიდემაისტერის პირველი მოძრაობის შესაბამისია, მას იქვე გადავანაცვლებთ: (O(n)).

ბ. თუ რომელიმე კვანძის შესაბამისი კვეთაც და გადასვლაც არაჰოლონომურია, ეს კვანძი შეგვიძლია “გავიტანოთ” ARCADE-ს გარეთ ჰოლონომურობის გათვალისწინებით (შესაბამისად მარცხნივ ან მარჯვნივ). (O(n)).

AFL წირების გარდაქმნა ჰოლონომურ სახეზე

$AFL \to Holonomic$ ალგორითმი

გ. დანარჩენი არაჰოლონომური გადასვლების ჰოლონომურად გარდასაქმნელად გამოვყოფთ ცალ-ცალკე მარჯვნივ და მარცხნივ გადასვლებს. ვიწყებთ უკიდურესად მარჯვნივ მდებარე საბოლოო წერტილის მქონე რკალით, რკალის დასაწყისიდან გადავდივართ მარცხნივ, ვამატებთ ახალ (S^{-1}) წერტილს ARCADE-ს გარეთ (ვაგრძელებთ წარმოსახვით ხაზს), ვკვეთთ და “ვუხვევთ” მარჯვნივ, ვამატებთ რკალის საბოლოო წერტილის უშუალოდ გვერდით მარჯვნივ ახალ T^{+1} წერტილს და გადავდივართ თავდაპირველი რკალის საბოლოო წერტილში (↓). ასე ვიქცევით ყველა არაჰოლონომური მარჯვნივ გადასვლის გასაჰოლონომურებლად. (O(n)).

დ. ანალოგიურად ვიქცევით არაჰოლონომური მარცხნივ გადასვლების შემთხვევაშიც: ვიწყებთ უკიდურესად მარცხნივ მდებარე საბოლოო წერტილის მქონე რკალით, რკალის დასაწყისიდან გადავდივართ მარჯვნივ, ვამატებთ ახალ (T^{+1}) წერტილს ARCADE-ს გარეთ (ვაგრძელებთ წარმოსახვით ხაზს), ვკვეთთ და “ვუხვევთ” მარცხნივ, ვამატებთ რკალის საბოლოო წერტილის უშუალოდ გვერდით მარცხნივ ახალ S^{-1} წერტილს და გადავდივართ თავდაპირველი რკალის საბოლოო წერტილში (↑). ასე ვიქცევით ყველა არაჰოლონომური მარცხნივ გადასვლის გასაჰოლონომურებლად. (O(n)).

AFL წირების გარდაქმნა ჰოლონომურ სახეზე

$AFL \rightarrow Holonomic$ ალგორითმი

5. მე-4 პუნქტში აღწერილი გარდაქმნების შემდეგ ვამოწმებთ, ხომ არ გაჩნდა "ზედმეტი" რკალები, ანუ ისეთი, რომლებიც ARCADE-ს არ კვეთს და მუდმივად ერთ-ერთ ნახევარსიბრტყეშია განლაგებული. ასეთი ნაწილების მოსაშორებლად ვამოწმებთ შემდეგ პირობებს:

   ა. ვეძებთ გვერდიგვერდ განლაგებულ ერთნაირი კვეთის (S ან T) მქონე რკალებს და "ვხსნით" (რაიდემაისტერის პირველი მოძრაობა); (O(n)).

   ბ. ვეძებთ ისეთ რკალებს, რომლის ორივე ბოლო ARCADE-ს გარეთაა და "ვხსნით" (რაიდემაისტერის მესამე მოძრაობა); (O(n)).

   ც. ვეძებთ ისეთ რკალებს, რომლის ერთ-ერთი ბოლო ARCADE-ს გარეთაა და მთლიანად რკალი არ კვეთს სხვა რკალებს და "ვხსნით" (რაიდემაისტერის მეორე მოძრაობა); (O(n)).

   დ. ა, ბ, გ პუნქტებს ვიმეორებთ მანამ, სანამ არ აღმოვფხვრით ასეთ "ზედმეტ" რკალებს.

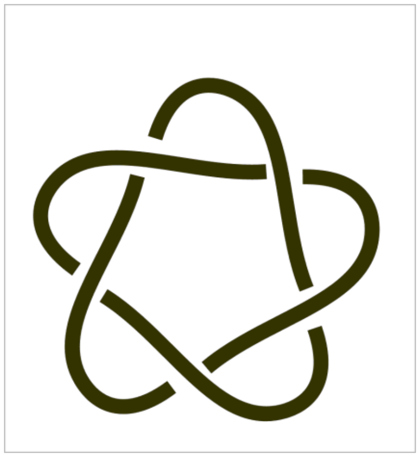
AFL ᲬᲘᲠᲔᲑᲘᲡ ᲒᲐᲠᲓᲐᲥᲛᲜᲐ ᲰᲝᲚᲝᲜᲝᲛᲣᲠ ᲡᲐᲮᲔᲖᲔ

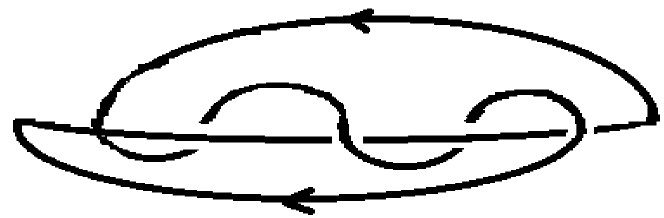
$AFL \rightarrow Holonomic$ ᲐᲚᲒᲝᲠᲘᲗᲛᲘ

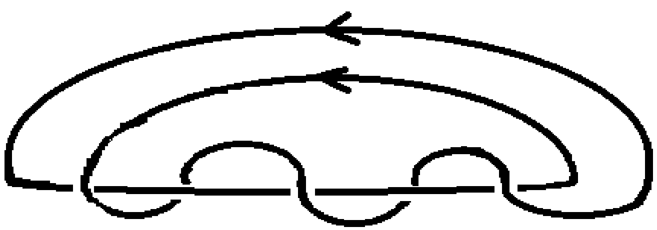
6. მე-4, მე-5 პუნქტები ასრულებს FADEN ნაწილის მთლიან გარდაქმნას. თუ მიღებულ ჩანაწერში არ დარჩება არაჰოლონომური კვეთები, ARCADE ნაწილს, რომელიც თავიდან ჩავთვალეთ აბსცისათა ღერძის თანხვდენილად, ვცვლით მცირე სიმაღლის რკალით, ხოლო თუ მიღებულ ჩანაწერში ისევ დარჩება არაჰოლონომური კვეთები, საჭირო ხდება ARCADE-ს გარდაქმნა. ვადგენთ, ჰოლონომურ გადასვლაზე არაჰოლონომური კვეთების რაოდენობას და AFL წარმოდგენაში ARCADE -ს ვამატებთ იმდენივე ხვიას, ანუ, თუ წირის ჩანაწერში არის k ცალი რკალი, რომელთა შესაბამისი გადასვლა ჰოლონომურია და კვეთა – არაჰოლონომური, წირს ARCADE ნაწილში უნდა დაემატოს $2k$ ცალი რკალი. (ნახ. ა, ბ).

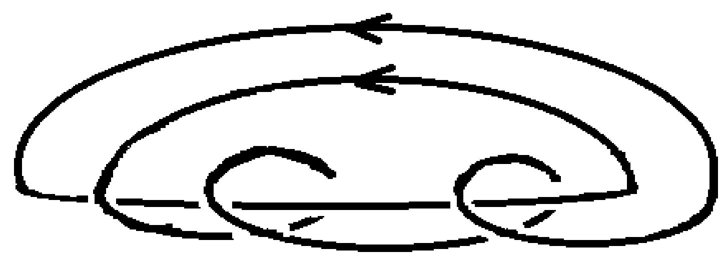
AFL წირების გარდაქმნა ჰოლონომურ სახეზე

$AFL \to Holonomic$ ალგორითმი









პარამეტრიზაციის ფუნქციის თვისებები

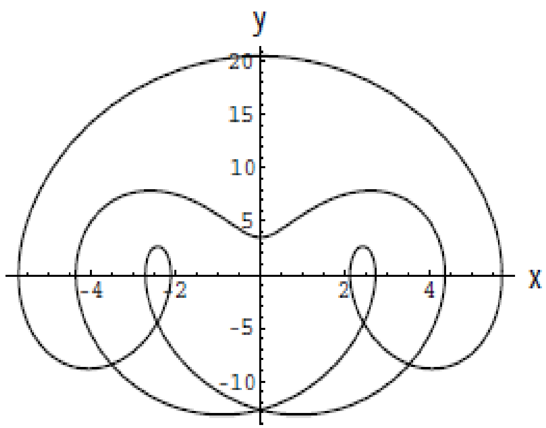
$f: R \to R \in \boldsymbol{C}^{\infty}$ $\qquad S^1 \subset R^3$

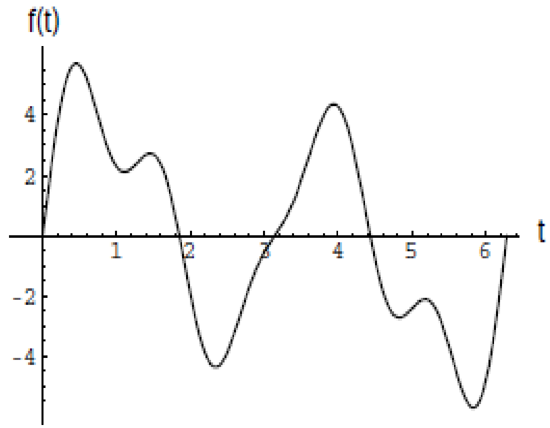
$f^{\sim}: S^1 \to R^3$

$$f^{\sim} = \big(-f(t), f'(t), -f''(t)\big)$$

$$\big(X(t), Y(t), Z(t)\big) = \big(-f(t), f'(t), -f''(t)\big)$$

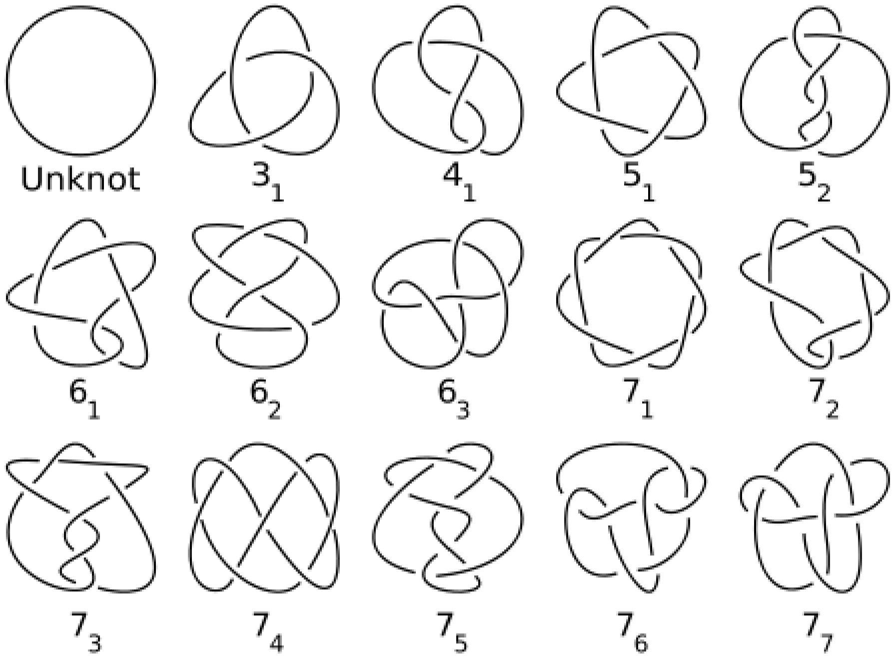
პარამეტრიზაციის ფუნქციის მაგალითი





ფუნქცია $f(t) = sin\, t + 4 * sin\, 2 * t + sin\, 4 * t + 1.5 * sin\, 5 * t$ *განსაზღვრავს დადებით სამყურას*

ზოგადად ნებისმიერი ჰოლონომური სახის წირისთვის მახასიათებელი ფუნქცია უცნობია



$$f = ?$$

პარამეტრიზაციის იდეა

$[0, 2\pi]$ შუალედს ვყოფთ n მონაკვეთად კვანძებში კვეთის წერტილების რაოდენობის შესაბამისად.

$$[0, 2\pi] \;:\; \{0 \le t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_i < \cdots < t_{n-1} < t_n \le 2\pi\}$$

კვანძის თითოეული i-ური რკალი შეიძლება აღიწეროს $\boldsymbol{f_i}$ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მეშვეობით.

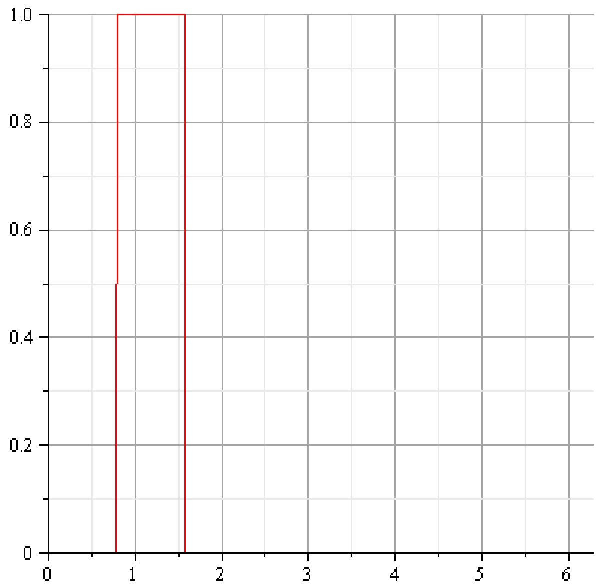
მთელი კვანძი წარმოადგენს $\boldsymbol{f_i}$ ფუნქციების ინტერპოლაციას სპეციალური კოეფიციენტებით, რომლებიც პერიოდული, უბან-უბან მუდმივი ფუნქციებია

$$f = \sum_{i=1}^{i=n} f_i * coef_i$$

$$f(t) = f_i(t), \quad f'(t) = f_i'(t), \quad f''(t) = f_i''(t), \quad \forall\, i = 1..n\,, \qquad \mathrm{t} \in [\mathrm{t_{i-1}}, \mathrm{t_i}]$$

საინტერპოლაციო კოეფიციენტები

$$S_{(A,T),i} = \frac{1}{2} * \left(1 + (-1)^{\frac{\lfloor t - t_{i-1} \rfloor}{T}}\right) * \frac{1}{2} * \left(1 + (-1)^{\frac{\left\lfloor t - \left(t_i - \frac{T}{2}\right)\right\rfloor}{T}}\right)$$



$$\left(f * S_{(A,T)}\right)' = f' * S_{(A,T)} \qquad \left(f * S_{(A,T)}\right)'' = f'' * S_{(A,T)}$$

პარამეტრიზაციის f ფუნქციის თვისებები

$$f_i(t) = f_i(\alpha_i * t), \qquad \forall\, i = 1..n$$

$$\mathrm{t} \in [\mathrm{t_{i-1}}, \mathrm{t_i}] \;, \quad \mathrm{t_0} = 0, \quad \mathrm{t_i} = \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n-1}} \frac{1}{\alpha_{\mathrm{j}}}, \;\; \forall\, \mathrm{i} = 1..\mathrm{n}$$

$$0 \le \alpha_i * (t - t_{i-1}) \le \pi, \qquad \forall\; t \in [t_{i-1}, t_i]$$

$$\alpha_i > 0, \qquad \forall\, i = 1..n$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\alpha_i} = 2$$

$$f_i(t_i) = f_{i+1}(t_i)$$
$$f_i{}'(t_i) = f_{i+1}{}'(t_i)$$
$$f_i{}''(t_i) = f_{i+1}{}''(t_i)$$
$$f_1(0) = f_n(2\pi)$$
$$f_1{}'(0) = f_n{}'(2\pi)$$
$$f_1{}''(0) = f_n{}''(2\pi)$$

შედეგები

- რკალების რაოდენობისგან დამოუკიდებლად, ჰოლონომურად გარდაქმნილ წირში ARKADE და FADEN ნაწილების აღწერას სჭირდება თანაბარი დრო – სრული პერიოდის ნახევარი.

- თუ შემომავალ წირში თავიდანვე მხოლოდ ჰოლონომური კვეთებია წირის რკალების აღსაწერად გამოყენებულ $f_i(\alpha_i * t)$ პერიოდული ფუნქციაში, FADEN ნაწილის ყველა რკალისთვის $\alpha_i = n - 1$, ARKADE ნაწილში მხოლოდ ერთი რკალია და მისთვის $\alpha_i = 1$.

- თუ შემომავალ წირში არის არაჰოლონომური კვეთებიც (m ცალი), FADEN ნაწილის რკალების აღმწერი ფუნქციების შესაბამისი პარამეტრი იქნება $\alpha_i = n - (2 * m + 1)$; ARCADE ნაწილის რკალებისთვის გვექნება ორი პარამეტრი: $\alpha_1 = 2 * (m + 1)$ და $\alpha_2 = 2 * m$, სადაც α_1 იქნება ARCADE ნაწილის იმ რკალებისთვის, რომლებიც არ ეხვევა ∩ რკალს, ხოლო α_2– ARCADE ნაწილის იმ რკალებისთვის, რომლებიც ეხვევა ∩ რკალს.

პარამეტრიზაციის ფუნქცია

$$f(t) = a * arctg(q * \cos(\alpha * t)) + b * \cos(\alpha * t) + c$$

სადაც:

$$q > 0$$

$$a = \frac{(x0 - x1)}{2} * \frac{1 + q^2}{q - arctg(1 + q^2)}$$

$$b = -a * \frac{q}{(1 + q^2)}$$

$$c = -\frac{(x0 + x1)}{2}$$

if.cdf if1.cdf if2.cdf

$f(t)$ $f'(t)$ $f''(t)$

დასკვნები

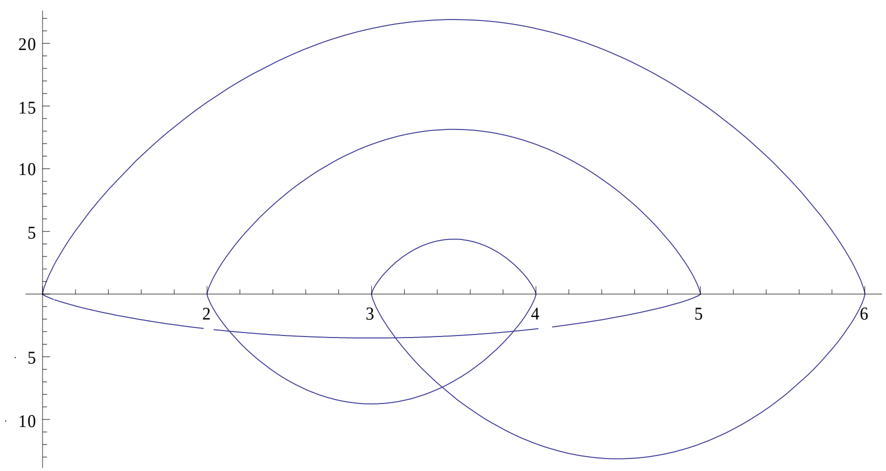
- თუ შემოსულ წირში არის მხოლოდ ჰოლონომური კვეთები, გარდაქმნილ წირში ყველა რკალისათვის $q_i = const$ ერთი და იგივეა
- თუ შემოსულ წირში არის არაჰოლონომური კვეთებიც (m ცალი), გარდაქმნილ წირში FADEN ნაწილის ყველა რკალისთვის q_f ერთი და იგივეა, ARKADE ნაწილში კი არის ორი განსხვავებული q_1 და q_2

ამ შემთხვევაში q_i სიდიდეები გამოითვლება პირობებიდან:

$$\min_{Faden} |x_k - x_{k+1}| * q_f * \alpha_f > \max_{Arkade} |x_l - x_{l+1}| * q_1 * \alpha_1$$

$$\min_{Arkade} |x_l - x_{l+1}| * q_2 * \alpha_2 < h$$

მარჯვენა სამყურა



input trefoil:
-s0+t1-s2

trefoil with endpoints:
+t4-s1+t2-s3+t0

Reduce last nonholonomic move&cut:
+t4-s1+t2-s3+t0

trefoil after Reidemeister I move:
+t4-s1-s3+t2+t0

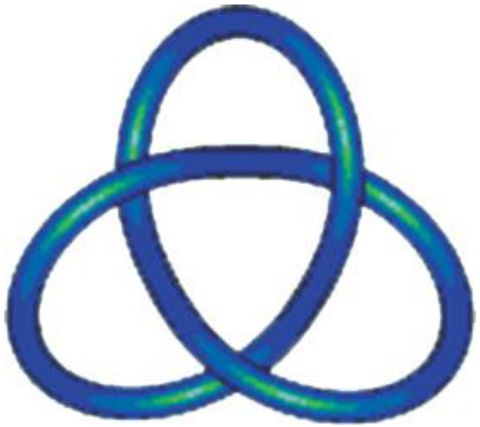
trefoil with performed FADEN:
-s5-s1-s3+t2+t0+t4

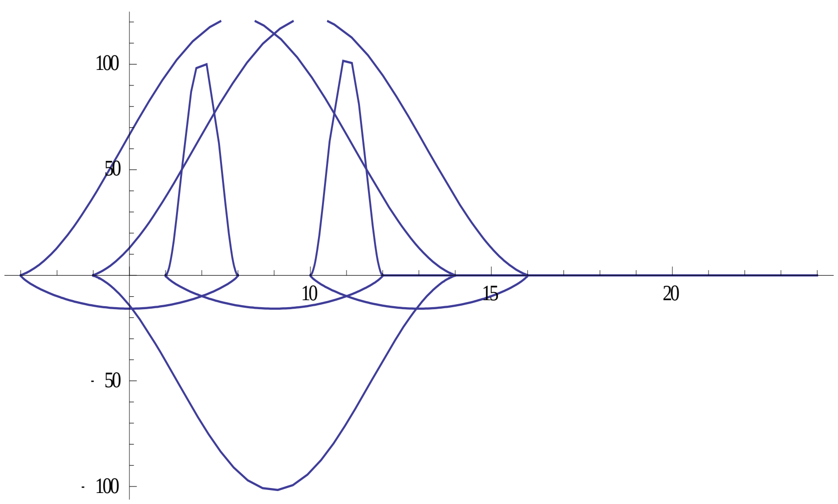
trefoil without extra knots in FADEN:
-s5-s1-s3+t2+t0+t4

trefoil with performed ARKADE:
-s5-s1-s3+t2+t0+t4

output trefoil:
-s5-s1-s3+t2+t0+t4

მარცხენა სამყურა





input trefoil:
-t0+s1-t2

trefoil without local extra knots:
-t0+s1-t2

trefoil with endpoints:
+t4-t1+s2-t3+t0

Reduce last nonholonomic move&cut:
+t0-t1+s2-t3+t4

trefoil after Reidemeister I move:
-t1+t0-t3+s2+t4

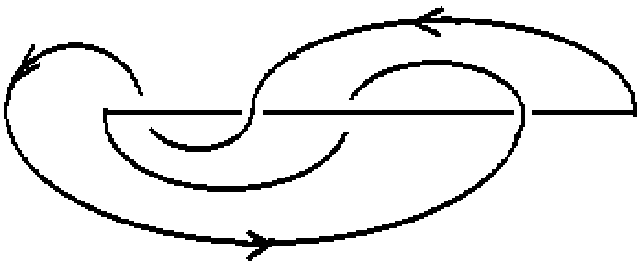
trefoil with performed FADEN:
-t1+t0-t3+s2+t4

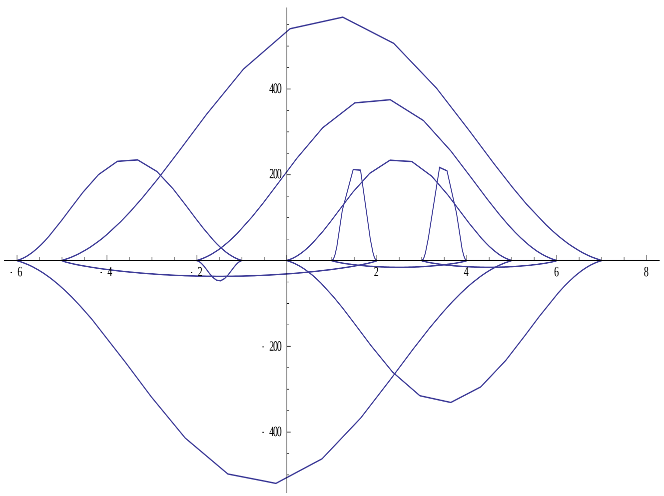
trefoil without extra knots in FADEN:
-s3-t1+s0+t2

trefoil with performed ARKADE:
-s3-s1-s5+t4-s7+t6+t0+t2

output trefoil:
-s3-s1-s5+t4-s7+t6+t0+t2

რვიანი





input eight knot:
-s0+t2+s2

eight knot with endpoints:
-s3+t6+t2-s1-t5+s4+t0

eight knot after Reidemeister I move:
+t4-s1-s3+t2+t0

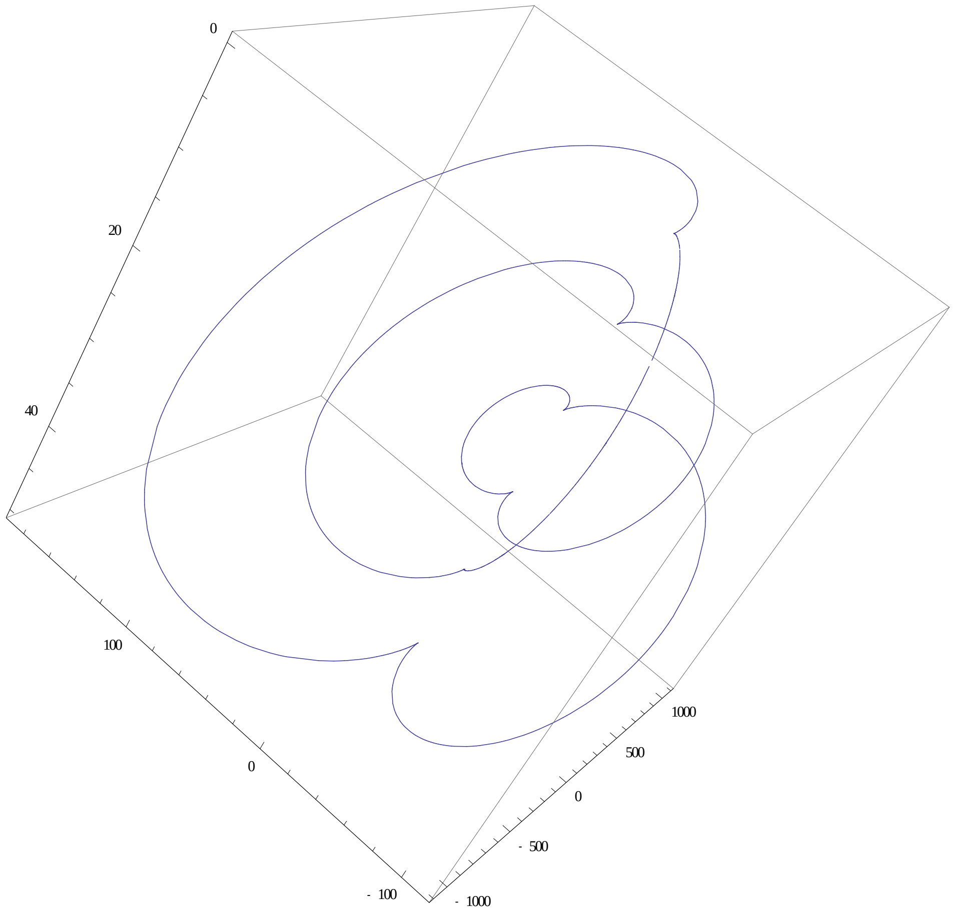
eight knot with performed FADEN:
-s3-s1-s5+t4-s7+t6+t0+t2

eight knot without extra knots in FADEN:
-s3-s1-s5+t4-s7+t6+t0+t2

eight knot with performed ARKADE:
-s3-s7-s1+t2-s5-s9+t8-s11+t10+t4+t0+t6

output eight knot :
-s3-s7-s1+t2-s5-s9+t8-s11+t10+t4+t0+t6

<u>სირთულეები</u>



$$q = ?$$

გმადლობთ
ყურადღებისთვის!