

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ეთერ ჩიჩუა

კირხჰოფისა და ტიმოშენკოს ტიპის ზოგიერთი არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური
განტოლების მიახლოებითი ამოხსნა

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

ნაშრომი შესრულებულია მათემატიკის მეცნიერებათა მაგისტრის აკადემიური ხარისხის
მოსაპოვებლად

ხელმძღვანელი - ფიზიკა-მათემატიკის
მეცნიერებათა დოქტორი, ასოცირებული
პროფესორი - ჯემალ ფერაძე

თბილისი

2017

ანოტაცია

სამაგისტრო ნაშრომში განხილულია ზოგიერთი სასაზღვრო და საწყის-სასაზღვრო ამოცანა ძელისა და სიმეტრიული ფირფიტისათვის. ამოცანების ამოსახსნელად გამოყენებულია რიცხვითი ალგორითმები და შესწავლილია მათი სიზუსტე.

I თავში დასმულია არაწრფივი სასაზღვრო ამოცანა კირხჰოფის ტიპის სტატიკური ძელისათვის. გრინის ფორმულის გამოყენებით შესაბამისი დიფერენციალური განტოლება დაყვანილია ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებაზე, რომელიც ამოხსნილია იტერაციული მეთოდით. დამტკიცებულია მეთოდის კრებადობა, შეფასებულია კრებადობის სიჩქარე. ამოხსნილია მაგალითი.

II თავში განხილულია სასაზღვრო ამოცანა ტიმოშენკოს არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებეთა სისტემისათვის, რომელიც აღწერს სიმეტრიულად დატვირთული ფირფიტის ყოფაქცევას. გალიორკინის მეთოდის გამოყენების შედეგად მიიღება დისკრეტულ განტოლებათა სისტემა, რომლის ამოსახსნელად გამოყენებულია იაკობ-კარდანოს იტერაცია. დამტკიცებულია თეორემა იტერაციული პროცესის სიზუსტის შესახებ. შედგენილია კრებადობის პირობების ცხრილი.

III თავში განხილულია საწყის-სასაზღვრო ამოცანა ტიმოშენკოს დინამიური ძელისათვის. სივრცული ცვლადის მიმართ ამონახსნის მიახლოების მიზნით გამოყენებულია გალიორკინის მეთოდი, შეფასებულია ცდომილება.

Annotation

The following thesis deals with some problems of the beam and the symmetric plate with boundary and initial-boundary value. For the problems numerical methods are used, with their accuracies being examined.

In the first chapter the nonlinear boundary problem for a Kirchhoff type static beam is stated. Corresponding differential equation, by the use of Green's function, is reduced to an integral equation, which is solved with iterational method. The convergence of the method is established, speed of convergence is estimated, example is solved.

In the second chapter boundary value problem, describing symmetrically loaded plate behavior, for a Timoshenko system of nonlinear differential equations is discussed. By the use of Galerkin method system of discrete equations is obtained, incorporating Jacobi-Cardano iteration for its solution. Theorem regarding the accuracy of iterational process is proved. Table of convergence conditions is composed.

The third chapter inspects the initial-boundary problem for Timoshenko dynamic beam. To approximate the solution with respect to a spatial variable, the Galerkin method is used, the error is estimated.

სარჩევი

I თავი.	კირხჰოფის ტიპის სტატიკური ძელისათვის განტოლების მიახლოებითი ამონახსნის შესახებ	5
1.	ამოცანის ჩამოყალიბება	5
2.	დაშვებები	7
3.	ამოხსნის მეთოდი	7
4.	სისტემა მეთოდის ცდომილებისათვის	8
5.	დამხმარე უტოლობები	9
6.	მეთოდის კრებადობა	12
7.	მაგალითი	14
II თავი.	იტერაციული მეთოდი ტიმოშენკოს სიმეტრიული ფირფიტისათვის	19
1.	ამოცანის ჩამოყალიბება	19
2.	სისტემის გარდაქმნა	20
3.	ალგორითმი	22
4.	იტერაციული მეთოდის კრებადობა	23
5.	იტერაციული პროცესის ცდომილება u , w და ψ ფუნქციებისათვის	27
6.	მაგალითები	30
III თავი.	გალიორკინის მეთოდის სიზუსტე დინამიური ძელის არაწრფივი განტოლებისათვის	33
1.	ამოცანის ჩამოყალიბება	33
2.	ამოხსნადობა	35
3.	დაშვებები	37
4.	გალიორკინის მეთოდი და მისი სიზუსტე	38

I თავი. კირხჰოფის ტიპის სტატიკური ძელისათვის განტოლების მიახლოებითი ამონახსნის შესახებ

ამ თავში განხილულია სასაზღვრო ამოცანა ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებისათვის

$$u'''' - m \left(\int_0^l u'^2 dx \right) u'' = f(x, u), \quad m(z) \geq \alpha > 0, \quad 0 \leq z < \infty,$$

რომელიც აღწერს კირხჰოფის ტიპის ძელის სტატიკურ მდგომარეობას. ამოცანა დაყვანილია ინტეგრალურ განტოლებაზე, რომლის ამოსახსნელად გამოყენებულია პიკარდის იტერაციული მეთოდი. დადგენილია იტერაციული პროცესის კრებადობა და შეფასებულია ცდომილება.

1. ამოცანის ჩამოყალიბება

განვიხილოთ ძელის არაწრფივი განტოლება

$$u''''(x) - m \left(\int_0^l u'^2(x) dx \right) u''(x) = f(x, u), \quad 0 < x < l, \quad (1)$$

პირობებით

$$u(0) = u(l) = 0, \quad u''(0) = u''(l) = 0. \quad (2)$$

აქ $u = u(x)$ არის l სიგრძის ძელის გადაადგილების ფუნქცია, რომელზე მოქმედი ძალა მოიცემა ფუნქციით $f(x, u)$, ფუნქცია $m(z)$,

$$m(z) \geq \alpha > 0, \quad 0 \leq z < \infty, \quad (3)$$

აღწერს კავშირს ძაბვასა და დეფორმაციას შორის. სახელდობრ, თუ $m(z)$ ფუნქცია წრფივია, მაშინ კავშირი შეესაბამება ჰუკის წრფივ კანონს, ხოლო სხვა შემთხვევაში ეს კავშირი არაწრფივი სახისაა.

(1) განტოლება არის სტაციონარული ამოცანა, რომელიც გამომდინარეობს შემდეგი განტოლებიდან

$$u_{tt} + u_{xxxx} - m\left(\int_0^l u_x^2 dx\right)u_{xx} = f(x, t, u),$$

$$m(z) \geq \text{const} > 0,$$

რომელიც იმ შემთხვევაში, როცა $m(z) = m_0 + m_1 z$, $m_0, m_1 > 0$ და $f(x, t, u) = 0$, შემოთავაზებული იყო ვონოვსკი-კრიეგერის მიერ [13], როგორც ფიქსირებული ბოლოების მქონე დინამიური, ჰიმვადი ძელის მოდელი. არაწრფივი წევრი $\int_0^l u_x^2 dx$ პირველად გამოიყენა კირხჰოფმა [3], რომელმაც განაზოგადა დალამბერის კლასიკური წრფივი მოდელი. ამიტომ (1)-ს უწოდებენ კირხჰოფის ტიპის განტოლებას სტატიკური ძელისთვის.

(1) ტიპის განტოლებების ამოხსნადობა შესწავლილია [4]–[6] და [12]-ში, ხოლო რიცხვითი ალგორითმების აგება და მათი სიზუსტის დადგენა გამოკვლეულია [1], [5], [7], [10] და [11]-ში.

აქ ჩვენ, იმისათვის, რომ მივიღოთ (1), (2) ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნი, გამოყენებული გვაქვს მიდგომა [9], რომელიც განსხვავდება თანდართული ზემოხსენებული წყაროებში განხილული მეთოდებისგან. ეს მიდგომა მდგომარეობს იმაში, რომ გრინის ფუნქციის გამოყენებით (1), (2) ამოცანა დაიყვანება არაწრფივ ინტეგრალურ განტოლებაზე, რომლის ამოსახსნელადაც ვიყენებთ იტერაციულ მეთოდს. დადგენილია მეთოდის კრებადობის პირობა და შეფასებულია მისი სიზუსტე.

შევნიშნოთ, რომ გრინის ფუნქციის მეთოდი იტერაციულ პროცესთან ერთად გამოყენებულია ტიმოშენკოს სიმეტრიული ფირფიტისთვის ამოცანის ამოსახსნელად [8].

2. დაშვებები

დავუშვათ (3)-ის გარდა $m(z)$ ფუნქცია ასევე აკმაყოფილებს პირობას

$$|m(z_2) - m(z_1)| \leq l_1 |z_2 - z_1|, \quad 0 \leq z_1, z_2 < \infty, \quad l_1 = \text{const} > 0. \quad (4)$$

რაც შეეხება $f(x, u)$ ფუნქციას, ვიგულისხმობთ, რომ $f(x, u) \in L_2((0, l); \mathbf{R})$ და, გარდა ამისა სრულდება ტოლობები

$$\begin{aligned} |f(x, u)| &\leq \sigma_1 + \sigma_2 |u|, \quad |f(x, u_2) - f(x, u_1)| \leq l_2 |u_2 - u_1|, \\ 0 < x < l, \quad u, u_1, u_2 &\in \mathbf{R}, \\ \sigma_i = \text{const}, \quad i = 1, 2, \quad \sigma_1 > 0, \quad \sigma_2 &\geq 0, \quad l_2 = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (5)$$

შემოვიღოთ კიდევ ერთი შეზღუდვა ძელის l სიგრძისათვის და α, σ_2 პარამეტრებისათვის (3) და (5)-დან. დავუშვათ, რომ

$$\omega = \alpha + \frac{2}{l^2} - \sigma_2 \frac{l^2}{2} > 0. \quad (6)$$

დავუშვათ, არსებობს (1), (2) ამოცანის ამონახსნი და $u(x) \in W_0^{2,2}(0, l)$ [2].

3. ამოხსნის მეთოდი

გამოვიყენოთ გრინის ფუნქცია ამოცანისათვის $u''''(x) - au''(x) = f(x)$, $0 < x < l$, $u(0) = u(l) = 0$, $u''(0) = u''(l) = 0$, $a = \text{const} > 0$. გარკვეული გარდაქმნების შედეგად (1), (2) ამოცანა დაიყვანება არაწრფივ ინტეგრალურ განტოლებამდე

$$u(x) = \int_0^l G(x, \xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + \frac{1}{\tau} \varphi(x), \quad (7)$$

სადაც

$$G(x, \xi) = \frac{1}{\tau \sqrt{\tau} \sinh(\sqrt{\tau} l)} \begin{cases} \sinh(\sqrt{\tau}(x-l)) \sinh(\sqrt{\tau} \xi), & 0 < \xi \leq x < l, \\ \sinh(\sqrt{\tau}(\xi-l)) \sinh(\sqrt{\tau} x), & 0 < x \leq \xi < l, \end{cases}$$

$$\tau = m\left(\int_0^l u'^2(x)dx\right),$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{l}\left((l-x)\int_0^x f(\xi, u(\xi))d\xi + x\int_x^l (l-\xi)f(\xi, u(\xi))d\xi\right).$$

(7) განტოლება ამოვხსნათ პიკარდის იტერაციული მეთოდის საშუალებით. $u_0(x)$, $0 \leq x \leq l$, ფუნქციის შერჩევის შემდეგ, რომელიც თავის მეორე რიგის წარმომებულთან ერთად ნულის ტოლი ხდება $x=0$ და $x=l$ წერტილებში, ვპოულობთ მომდევნო მიახლოებებს შემდეგი ფორმულის გამოყენებით

$$u_{k+1}(x) = \int_0^l G_k(x, \xi)f(\xi, u_k(\xi))d\xi + \frac{1}{\tau_k}\varphi_k(x), \quad 0 < x < l, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (8)$$

სადაც

$$G_k(x, \xi) = \frac{1}{\tau_k \sqrt{\tau_k} \sinh(\sqrt{\tau_k} l)} \times \begin{cases} \sinh(\sqrt{\tau_k}(x-l)) \sinh(\sqrt{\tau_k} \xi), & 0 < \xi \leq x < l, \\ \sinh(\sqrt{\tau_k}(\xi-l)) \sinh(\sqrt{\tau_k} x), & 0 < x \leq \xi < l, \end{cases}$$

$$\tau_k = m\left(\int_0^l u_k'^2(x)dx\right),$$

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{l}\left((l-x)\int_0^x f(\xi, u_k(\xi))d\xi + x\int_x^l (l-\xi)f(\xi, u_k(\xi))d\xi\right),$$

$$k = 0, 1, \dots,$$

და $u_k(x)$ არის (7) განტოლების ამონახსნის k -ური მიახლოება

4. სისტემა მეთოდის ცდომილებისათვის

ჩვენი მიზანია შევაფასოთ მეთოდის ცდომილება, რის ქვეშაც ჩვენ გვესმის სხვაობა

$$\delta u_k(x) = u_k(x) - u(x), \quad k = 0, 1, \dots \quad (9)$$

ამისათვის, მიზანშეწონილია (8) ფორმულის ნაცვლად გამოვიყენოთ განტოლებები

$$u_{k+1}''''(x) - m \left(\int_0^l u_k'^2(x) dx \right) u_{k+1}''(x) = f(x, u_k(x)), \quad 0 < x < l, \quad (10)$$

$$u_k(0) = u_k(l) = 0, \quad u_k''(0) = u_k''(l) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (11)$$

რომელიც გამომდინარეობს (8) ფორმულიდან .

თუ (10) and (11) ტოლობებს გამოვაკლებთ (1) და (2)-ს მივიღებთ

$$\begin{aligned} \delta u_k''''(x) - \frac{1}{2} \left(m \left(\int_0^l u_{k-1}'^2(x) dx \right) + m \left(\int_0^l u'^2(x) dx \right) \right) \delta u_k''(x) \\ + \left(m \left(\int_0^l u_{k-1}'^2(x) dx \right) - m \left(\int_0^l u'^2(x) dx \right) \right) (u_k''(x) + u''(x)) \\ = f(x, u_{k-1}(x)) - f(x, u(x)), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\delta u_k(0) = \delta u_k(l) = 0, \quad \delta u_k''(0) = \delta u_k''(l) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (13)$$

(12) სისტემა და (13) პირობები არის მეთოდის ცდომილების შეფასების გამოსავალი წერტილი. მანამდე უნდა მივიღოთ რამდენიმე აპრიორული შეფასება. შემოვიღოთ ნორმა $W_0^{2,2}(0, l)$ -ში

$$\|u(x)\|_p = \left(\int_0^l \left(\frac{d^p u}{dx^p}(x) \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad p = 0, 1, 2, \quad \|u(x)\| = \|u(x)\|_0.$$

(·, ·) სიმბოლო აღნიშნავს სკალარულ ნამრავლს $L_2(0, l)$ -ში.

5. დამხმარე უტოლობები

მივიღოთ რამდენიმე შეფასება.

ლემა 1. $u(x) \in W_0^{2,2}(0, l)$ -სთვის სამართლიანია შეფასებები

$$\frac{\sqrt{2}}{l} \|u(x)\| \leq \|u(x)\|_1 \leq \frac{l}{\sqrt{2}} \|u(x)\|_2. \quad (14)$$

დამტკიცება. $u(x) = \int_0^x u'(\xi) d\xi$ ტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$\|u(x)\|_1 \leq \left(\int_0^x d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x u'^2(\xi) d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \leq x^{\frac{1}{2}} \|u(x)\|_1.$$

რაც შეესაბამება (14) უტოლობის მარჯვენა მხარის დამტკიცებას გამოვიყენოთ ბოლო უტოლობა. მხედველობაში მივიღოთ, რომ

$$\|u(x)\|_1^2 = u(x)u'(x) \Big|_0^l - (u(x), u''(x)) = -(u(x), u''(x)) \leq \|u(x)\| \cdot \|u(x)\|_2.$$

ლემა დამტკიცებულია. ■

ლემა 2. $u(x) \in W_0^{2,2}(0, l)$ -სთვის სრულდება უტოლობა

$$\|f(x, u(x))\| < \sigma_1 l^{\frac{1}{2}} + \sigma_2 \frac{l}{\sqrt{2}} \|u(x)\|_1. \quad (15)$$

დამტკიცება. (5)-ის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\|f(x, u(x))\| \leq \sigma_1 \left(\int_0^l dx\right)^{\frac{1}{2}} + \sigma_2 \|u(x)\|.$$

გარდა ამისა გავითვალისწინოთ (14). შედეგად მივიღებთ (15).

ლემა დამტკიცებულია. ■

ლემა 3. (1), (2) ამოცანის ამონახსნისთვის სრულდება უტოლობა

$$\|u(x)\|_1 \leq c_1, \quad (16)$$

სადაც

$$c_1 = \frac{1}{\omega} \sigma_1 l \left(\frac{l}{2}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

დამტკიცება. (1) განტოლება გავამრავლოთ $u(x)$ -ზე და მიღებული ტოლობა ვაინტეგრიროთ x -ის მიმართ 0-დან l -მდე. (2)-ის გამოყენებით გვექნება

$$\|u(x)\|_2^2 + m(\|u(x)\|_1^2)\|u(x)\|_1^2 = (f(x, u(x)), u(x)).$$

(14) და (3) -დან მივიღებთ

$$\left(\alpha + \frac{2}{l^2}\right)\|u(x)\|_1^2 \leq \frac{l}{\sqrt{2}}\|f(x, u(x))\|\|u(x)\|_1.$$

ამიტომ (15) -ის გამო

$$\left(\alpha + \frac{2}{l^2} - \frac{1}{2}\sigma_2 l^2\right)\|u(x)\|_1 \leq \sigma_1 l \left(\frac{l}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

ამ გამოსახულებისა და (6)-დან გამომდინარეობს (16).

ლემა დამტკიცებულია. ■

ლემა 4. (8) იტერაციული მეთოდის მიახლოება აკმაყოფილებს უტოლობას

$$\|u_k(x)\|_1 \leq c_2, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (18)$$

სადაც

$$c_2 = \begin{cases} c_1, & \sigma_2 = 0, \\ c_1 + a^{-1} \max(0, \|u_0(x)\|_1 - c_1), & a = 1 + \frac{2\omega}{\sigma_2 l^2}, \quad \text{if } \sigma_2 \neq 0. \end{cases} \quad (19)$$

დამტკიცება. (10)-განტოლებაში k ჩავანაცვლოთ $k-1$ -ით, მიღებული გამოსახულება გავამრავლოთ $u_k(x)$ -ზე და ვაინტეგრიროთ x -ის მიმართ 0-დან l -მდე. (11)-ის გათვალისწინებით გვექნება

$$\|u_k(x)\|_2^2 + m(\|u_{k-1}(x)\|_1^2)\|u_k(x)\|_1^2 = (f(x, u_{k-1}(x)), u_k(x)), \quad k = 1, 2, \dots$$

(3) და (14)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\left(\alpha + \frac{2}{l^2}\right) \|u_k(x)\|_1^2 \leq \frac{l}{\sqrt{2}} \|f(x, u_{k-1}(x))\| \|u_k(x)\|_1,$$

რის გამოც

$$\left(\alpha + \frac{2}{l^2}\right) \|u_k(x)\|_1 \leq \frac{l}{\sqrt{2}} \|f(x, u_{k-1}(x))\|.$$

აქედან (15)-ის გამოყენებით დავასკვნით, რომ

$$\|u_k(x)\|_1 \leq \frac{1}{\alpha + \frac{2}{l^2}} l \left(\frac{l}{2}\right)^{\frac{l}{2}} (\sigma_1 + \sigma_2 \left(\frac{l}{2}\right)^{\frac{l}{2}} \|u_{k-1}(x)\|_1).$$

ამიტომ (17), (6) და (19)-დან მივიღებთ (18)-ს $\sigma_2 = 0$ შემთხვევისთვის. იმ შემთხვევაში, როცა $\sigma_2 \neq 0$, ხელახლა ვიყენებთ (17), (6) და (19) -ს. მივიღებთ უტოლობას

$$\|u_k(x)\|_1 \leq c_1(1 - a^{-k}) + a^{-k} \|u_0(x)\|_1 = c_1 + a^{-k} (\|u_0(x)\|_1 - c_1),$$

რომელსაც მივყავართ (18)-მდე. ■

6. მეთოდის კრებადობა

(12) გავამრავლოთ $\delta u_k(x)$ -ზე, ვაინტეგრირებთ მიღებული განტოლება x -ის მიმართ 0-დან l -მდე და გამოვიყენოთ (13). შედეგად მივიღებთ გამოსახულებას

$$\begin{aligned} & \|\delta u_k(x)\|_2^2 + \frac{1}{2} ((m \|u_{k-1}(x)\|_1^2) + m \|u(x)\|_1^2) \|\delta u_k(x)\|_1^2 \\ & + (m \|u_{k-1}(x)\|_1^2 - m \|u(x)\|_1^2) (u_{k'}(x) + u'(x), \delta u_{k'}(x)) \\ & = (f(x, u_{k-1}(x)) - f(x, u(x)), \delta u_k(x)). \end{aligned}$$

(3)-(5) და (14)-დან გამომდინარეობს

$$\begin{aligned}
& \|\delta u_k(x)\|_2^2 + \alpha \|\delta u_k(x)\|_1^2 \\
& \leq \frac{1}{2} l_1 \prod_{p=0}^1 |(u_{k-p}'(x) + u'(x), \delta u_{k-p}'(x))| + l_2 \|\delta u_{k-1}(x)\| \|\delta u_k(x)\| \\
& \leq \frac{1}{2} l_1 \prod_{p=0}^1 (\|u_{k-p}(x)\|_1 + \|u(x)\|_1) \|\delta u_{k-p}(x)\|_1 + \frac{1}{2} l_2 l^2 \prod_{p=0}^1 \|\delta u_{k-p}(x)\|_1.
\end{aligned}$$

(16) და (18)-დნ გამომდინარეობს

$$\|\delta u_k(x)\|_1 \leq \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{2}{l^2} \right)^{-1} (l_1 \prod_{p=0}^1 (\|u_{k-p}(x)\|_1 + \|u(x)\|_1) + l_2 l^2) \|\delta u_{k-1}(x)\|_1 \leq q \|\delta u_{k-1}(x)\|_1,$$

სადაც

$$q = \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{2}{l^2} \right)^{-1} (l_1 (c_1 + c_2)^2 + l_2 l^2).$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში (9), (14), (17) და (19), მივიღებთ შემდეგ შედეგს

თეორემა. დავუშვათ სრულდება (3)–(6) და გარდა ამისა

$$\|u_0(x)\|_1 \leq \frac{1}{\omega} \sigma_1 l \left(\frac{l}{2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$q = \frac{l^2}{\alpha + \frac{2}{l^2}} (l_1 \left(\frac{\sigma_1}{\omega} \right)^2 + \frac{l_2}{2}) < 1$$

მაშინ (8) იტერაციული მეთოდის მიახლოებები იკრიბება (1),(2) ამოცანის ზუსტი ამონახსნისკენ და ცდომილებისათვის მართებულია შემდეგი შეფასება

$$\|u_k(x) - u(x)\|_p \leq \left(\frac{l}{\sqrt{2}} \right)^{1-p} q^k \|u_0(x) - u(x)\|_1, \quad k = 1, 2, \dots, \quad p = 0, 1, \dots$$

7. მაგალითი

განვიხილოთ ამოცანა

$$u''''(x) - \left(1 + \frac{1}{2} \int_0^1 u'^2(x) dx\right) u''(x) = f(x) \quad 0 < x < 1, \quad (20)$$

$$u(0) = u(1) = 0, \quad u''(0) = u''(1) = 0, \quad (21)$$

სადაც $f(x) = -\frac{522}{35}x^2 + \frac{522}{35}x + 24$.

(20), (21) ამოცანის ზუსტი ამონახსნია

$$u(x) = x(x-1)(x^2 - x - 1).$$

გამოვიყენოთ მეთოდი (8). აღვნიშნოთ $a = -\frac{522}{35}$, $b = -a$, $c = 24$ და $\rho_k = \tau_k \sqrt{\tau_k} \sinh(\sqrt{\tau_k})$.

მაშინ $f(x) = ax^2 + bx + c$. გამოთვლების შედეგად მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho_k} \left(\sinh(\sqrt{\tau_k}(x-1)) \int_0^x \sinh(\sqrt{\tau_k}\xi) (a\xi^2 + b\xi + c) d\xi + \sinh(\sqrt{\tau_k}x) \int_x^1 \sinh(\sqrt{\tau_k}(\xi-1)) (a\xi^2 + b\xi + \right. \\ & \left. c) d\xi \right) = \frac{1}{\rho_k} \left\{ \sinh(\sqrt{\tau_k}(x-1)) \left[\frac{a}{\sqrt{\tau_k}} \left(\xi^2 + \frac{2}{\tau_k} \right) \cosh(\sqrt{\tau_k}\xi) - \frac{2\xi a}{\tau_k} \sinh(\sqrt{\tau_k}\xi) + \frac{b}{\sqrt{\tau_k}} \xi \cosh(\sqrt{\tau_k}\xi) - \right. \right. \\ & \left. \frac{b}{\tau_k} \sinh(\sqrt{\tau_k}\xi) + \frac{c}{\sqrt{\tau_k}} \cosh(\sqrt{\tau_k}\xi) \right]_0^x + \sinh(\sqrt{\tau_k}x) \left[\frac{a}{\sqrt{\tau_k}} \left(\xi^2 + \frac{2}{\tau_k} \right) \cosh(\sqrt{\tau_k}(\xi-1)) - \frac{2\xi a}{\tau_k} \sinh(\sqrt{\tau_k}(\xi-1)) - \right. \\ & \left. \left. 1) + \frac{b}{\sqrt{\tau_k}} \xi \cosh(\sqrt{\tau_k}(\xi-1)) - \frac{b}{\tau_k} \sinh(\sqrt{\tau_k}(\xi-1)) + \frac{c}{\sqrt{\tau_k}} \cosh(\sqrt{\tau_k}(\xi-1)) \right]_x^1 \right\} = \\ & \frac{1}{\tau_k^2 \sinh(\sqrt{\tau_k})} \left\{ \left(a \left(1 + \frac{2}{\tau_k} \right) + b + c \right) \sinh(\sqrt{\tau_k}x) - \left(\frac{2a}{\tau_k} + c \right) \sinh(\sqrt{\tau_k}(x-1)) - \left(a \left(x^2 + \frac{2}{\tau_k} \right) + bx + \right. \right. \\ & \left. \left. c \right) \sinh(\sqrt{\tau_k}) \right\}. \end{aligned}$$

გარდა ამისა

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau_k} \left((1-x) \int_0^x \xi f(\xi) d\xi + x \int_x^1 (1-\xi) f(\xi) d\xi \right) \\ & = \frac{1}{\tau_k} \left(-\frac{1}{12} ax^4 - \frac{1}{6} bx^3 - \frac{1}{2} cx^2 + \left(\frac{1}{12} a + \frac{1}{6} b + \frac{1}{2} c \right) x \right) \end{aligned}$$

(8)-ფორმულის საფუძველზე გვექნება

$$u_{k+1}(x) = \frac{1}{\tau_k} \left\{ -\frac{1}{12}ax^4 - \frac{1}{6}bx^3 - \left(\frac{1}{\tau_k}a + \frac{1}{2}c\right)x^2 + \left(\frac{1}{12}a - \frac{1}{\tau_k}b + \frac{1}{6}b + \frac{1}{2}c\right)x - \frac{2}{\tau_k} \left(\frac{1}{\tau_k}a + \frac{1}{2}c\right) + \frac{2}{\tau_k \sinh(\sqrt{\tau_k})} \left[\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\tau_k}\right)a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c\right) \sinh(\sqrt{\tau_k}x) - \left(\frac{1}{\tau_k}a + \frac{1}{2}c\right) \sinh(\sqrt{\tau_k}(x-1)) \right] \right\}. \quad (22)$$

მივიღოთ τ_k პარამეტრის გამოსათვლელი ფორმულა. განსაზღვრების თანახმად

$$\tau_k = 1 + \frac{1}{2} \int_0^1 u_k'^2(x) dx$$

ამ ფორმულიდან τ_k პარამეტრის მიახლოებითი მნიშვნელობის მისაღებად გამოვიყენოთ მართკუთხედების კვადრატული ფორმულა. დავყოთ $[0,1]$ სეგმენტი ათ ნაწილად. გვექნება

$$\tau_k = 1 + \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{10} (u_k'(x_k))^2,$$

სადაც $x_k = 0.05(2k-1), k = 1, 2, \dots, 10$. $u_k'(x_k)$ -ის მნიშვნელობებს გამოვთვლით (22) ფორმულის საშუალებით. შედეგად გვექნება

$$\tau_k = \varphi(\tau_{k-1}), k = 1, 2, \dots \quad (23)$$

დავუშვათ $\tau_0 = 1$. (23) გამოყენებით მივიღებთ τ პარამეტრის მომდევნო მიახლოებებს, ჩავატაროთ ოთხი იტერაცია. τ_k მნიშვნელობებს გამოვიყენებთ (23) ტოლობაში $u_{k+1}(x)$ მიახლოების მისაღებად.

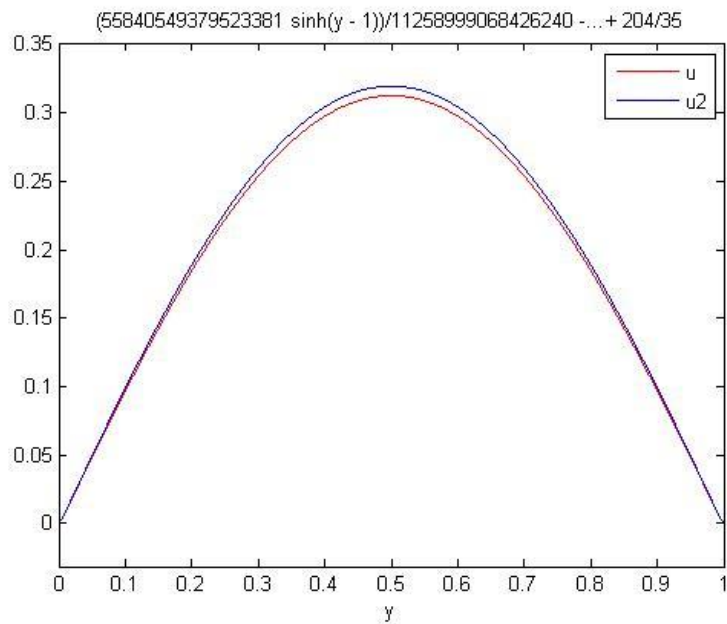
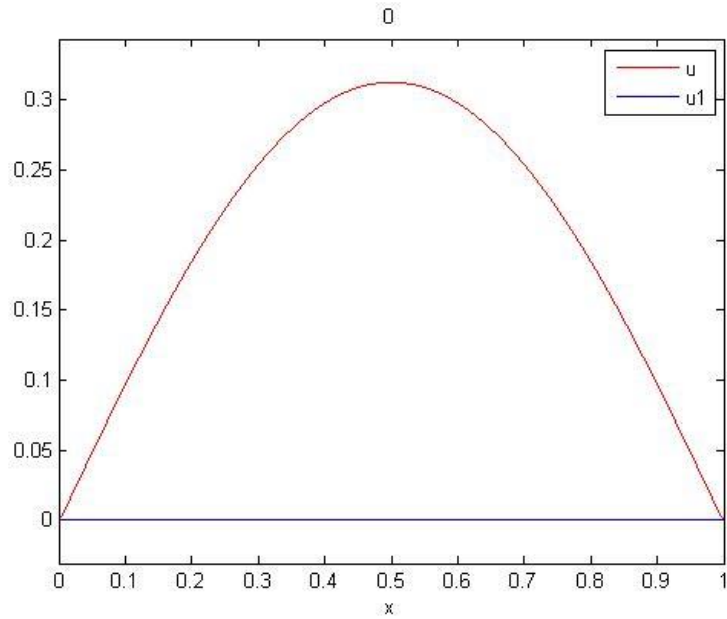
პროგრამა

```
clear;
clc;
a=-522/35;
b=-a;
c=24;
k=1:10;
x(k)=(2*k-1)*0.05;
syms y;
u = sym(zeros(1,5));
u(1) = 0;
tau = zeros(1,4);
for k=1:4
    tau(k)=1+(1/20)*sum(subs(diff(u(k)),x).^2);
    u(k+1) = 1/tau(k)*(-a*(y.^4)/12-b*(y.^3)/6-(a/tau(k)+c/2)*(y.^2)+...
        (a/12-b/tau(k)+b/6+c/2)*y-(2/tau(k))*(a/tau(k)+c/2)+...
        (2/(tau(k)*sinh(sqrt(tau(k)))))*((1/2+1/tau(k))*a+b/2+c/2)*sinh(sqrt(tau(k))
        *y)-...
        (a/tau(k)+c/2)*sinh(sqrt(tau(k))*(y-1)));
end
U = y^4-2*y^3+y;
for k=1:4
    Y=u(k);
    figure;
    ez1 = ezplot(U,[0 1]);
    hold on
    ezplot(Y,[0 1])
    set(ez1,'color',[1 0 0]);
end;
```

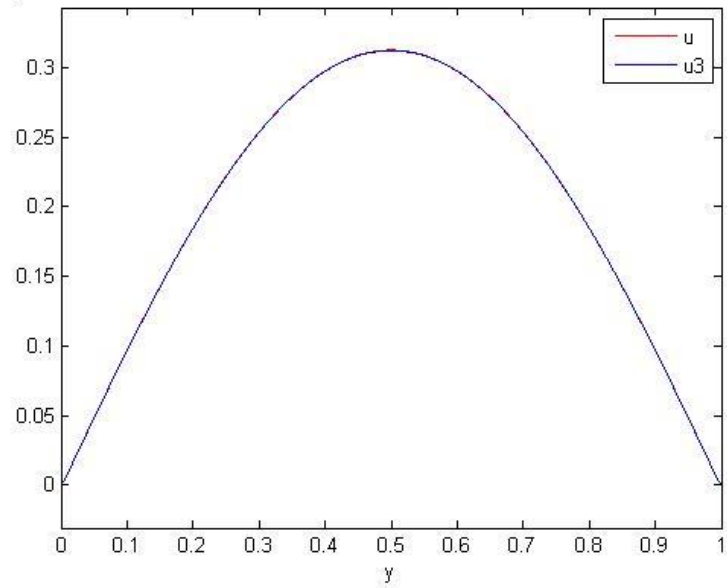

მოციფანოთ გამოთვლების შედეგები

$$\tau_0(x) = 1, \tau_1(x) = 1.2538, \tau_2(x) = 1.2424, \tau_3(x) = 1.2429$$

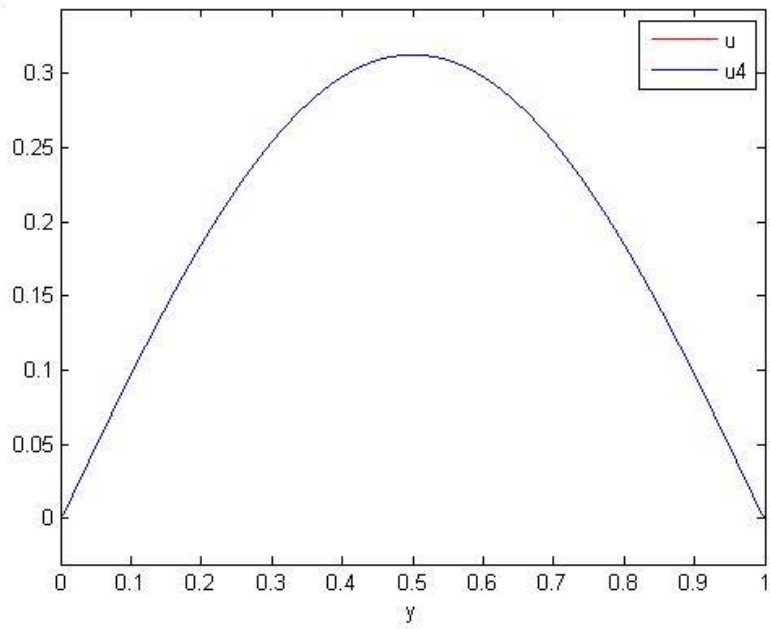
ქვემოთ ნახაზებზე გამოსახულია ზუსტი ამონახსნი (წითელი ფერის რკალი) და მიახლოებითი ამონახსნი (ლურჯი ფერის რკალი)



90125 $y/5070602400912917605986812821504 + \dots - 43329334765635940589640610069653/3245$



1319 $y/5070602400912917605986812821504 + \dots + 62976174399313910848939050087587/10384$



II თავი. იტერაციული მეთოდი ტიმოშენკოს სიმეტრიული ფირფიტისათვის

განხილული იქნება სასაზღვრო ამოცანა სიმეტრიულად დატვირთული ტიმოშენკოს ფირფიტისათვის [7-9,12]. მოცემული ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემიდან გამოვყოფთ ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებას ფირფიტის W დეფორმაციისთვის, რომელიც, დირიხლეს სასაზღვრო პირობასთან ერთად, წარმოადგენს დამოუკიდებელ სასაზღვრო ამოცანას. W -ს პოვნის შემდეგ ვპოულობთ ფირფიტის დეფორმაციის u და ψ მახასიათებლებს. ამოცანის W ამონახსნის საპოვნელად გამოყენებულია გალიორკინის მეთოდი. შედეგად მიღებული განტოლებათა სისტემის ამონახსნელად გამოყენებულია იტერაციული მეთოდი. დადგენილია იტერაციული პროცესის კრებადობა და შეფასებულია ცდომილება. იტერაციული პროცესის კრებადობის პირობების საილუსტრაციოდ მოყვანილია რიცხვითი მაგალითები.

1. ამოცანის ჩამოყალიბება

განვიხილოთ არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

$$u'' + \frac{1}{2}(w'^2)' + p(x) = 0,$$

$$k_0^2 \frac{Eh}{2(1+\nu)}(w'' + \psi') + \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right) w' \right]' + q(x) = 0, \quad (1)$$

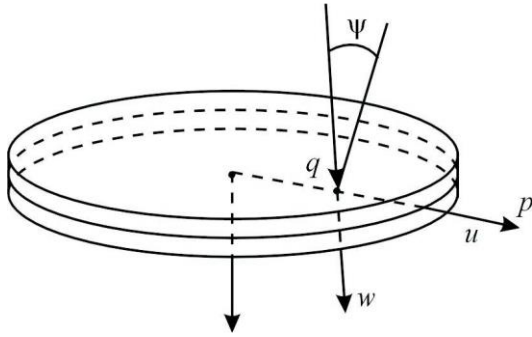
$$\frac{h^2}{6(1-\nu)} \psi'' - k_0^2(w' + \psi) = 0,$$

$$0 < x < 1,$$

სასაზღვრო პირობებით

$$u(0) = u(1) = 0, \quad w(0) = w(1) = 0, \quad \psi'(0) = \psi'(1) = 0. \quad (2)$$

$u = u(x)$, $w = w(x)$ ფირფიტის შუაზედაპირის გადაადგილების, ხოლო $\psi = \psi(x)$ შუაზედაპირის ნორმალის მობრუნების უცნობი ფუნქციებია, $p(x)$ და $q(x)$ მოქმედი ძალების შესაბამისი მოცემული ფუნქციებია (ფიგ. 1). E არის იუნგის მოდული, h არის ფირფიტის სისქე, k_0^2 წანაცვლების კოეფიციენტი და ν პუასონის კოეფიციენტი, $0 < \nu < 0.5$.



ფიგ.1 ფირფიტის გადაადგილება და მასზე მოქმედი ძალები

(1) განტოლებათა სისტემა ასახავს ფირფიტის წონასწორობას მასზე სიმეტრიულად მოქმედი ძალების შემთხვევაში და მიიღება ტიმოშენკოს დინამიური განტოლებებიდან გარსისათვის [10, 11]. ამისათვის, ჩვენ უგულებელვყოფთ ცვლადებს y და t და ვუშვებთ, რომ $k_x = k_y = 0$. ამასთანავე, ვინარჩუნებთ კუბური არაწრფივობის მქონე წევრებს. შევნიშნოთ, რომ ეს განტოლებები ასევე შეიძლება მივიღოთ ტიმოშენკოს განტოლებებიდან ფირფიტისათვის [2]-ში.

2. სისტემის გარდაქმნა

თუ გამოვიყენებთ (1)-ის პირველ და მესამე განტოლებებს და გავითვალისწინებთ შესაბამის სასაზღვრო პირობებს (2)-დან, $u(x)$ და $\psi(x)$ ფუნქციებს გამოვსახავთ $w(x)$ -ის საშუალებით

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^1 G_u(x, \xi) w'^2(\xi) d\xi + \int_0^1 G_p(x, \xi) p(\xi) d\xi, \\ \psi(x) &= \int_0^1 G_\psi(x, \xi) w'(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (3)$$

სადაც

$$\begin{aligned}
G_u(x, \xi) &= \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1), & x > \xi, \\ \frac{1}{2}x, & x < \xi, \end{cases} \\
G_p(x, \xi) &= \begin{cases} \xi(1-x), & x > \xi, \\ x(1-\xi), & x < \xi, \end{cases} \\
G_\psi(x, \xi) &= \begin{cases} -\frac{\sigma}{\sinh \sigma} \cosh \sigma(x-1) \cosh \sigma \xi, & x > \xi, \\ -\frac{\sigma}{\sinh \sigma} \cosh \sigma x \cosh \sigma(\xi-1), & x < \xi, \end{cases}
\end{aligned} \tag{4}$$

და

$$\sigma = \frac{k_0}{h} \sqrt{6(1-\nu)}.$$

(1) სისტემის მეორე განტოლებაში (3)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ განტოლებას $w(x)$ ფუნქციისთვის

$$\begin{aligned}
&\frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{1-\nu}{2} k_0^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 w'^2 dx + \int_0^1 (1-x)p(x)dx - \int_0^x p(\xi)d\xi \right) w'' - p(x)w' \right] \\
&- \frac{3Ek_0^4}{h \sinh \sigma} \frac{1-\nu}{1+\nu} (\sinh \sigma(x-1) \int_0^x \cosh \sigma \xi w'(\xi) d\xi \\
&+ \sinh \sigma x \int_x^1 \cosh \sigma(\xi-1) w'(\xi) d\xi) + q(x) = 0,
\end{aligned} \tag{5}$$

(2)-დან კი გამოვეყოფთ სასაზღვრო პირობას

$$w(0) = w(1) = 0. \tag{6}$$

(5),(6) ამოცანის ამოხსნის შემდეგ, ჩავსვამთ $w(x)$ -ს (3)-ში და ვიპოვით დარჩენილ უცნობ $u(x)$ და $\psi(x)$ ფუნქციებს.

3. ალგორითმი

განვიხილოთ (5),(6) ამოცანის ამოხსნის რიცხვითი ალგორითმი, რომელიც იმ შემთხვევაში, როცა $p(x) = 0$ გამოყენებულია [7]-ში. $w(x)$ -ის მიახლოებით ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სახით

$$w_n(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i\pi} w_{ni} \sin i\pi x, \quad (7)$$

სადაც გალიორკინის მეთოდის გამოყენებისას[4], w_{ni} კოეფიციენტები აკმაყოფილებს არაწრფივ განტოლებათა სისტემას

$$(p_{1i} + p_2 + \sum_{j=1}^n w_{nj}^2) w_{ni} + \sum_{j=1}^n p_{3ij} w_{nj} + \frac{1}{i} q_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

გამოვიყენოთ შემდეგი პარამეტრები

$$p_{1i} = \frac{1}{\frac{1}{2k_0^2(1-\nu)} + \frac{3}{(h\pi i)^2}}, \quad p_2 = 4 \int_0^1 (1-x)p(x)dx$$

$$p_{3ij} = 8 \left(-\frac{j}{i} \int_0^1 \left(\int_0^x p(\xi) d\xi \right) \sin i\pi x \sin j\pi x dx + \frac{1}{i\pi} \int_0^1 p(x) \sin i\pi x \cos j\pi x dx \right), \quad (9)$$

$$q_i = -\frac{8(1-\nu^2)}{Eh\pi} \int_0^1 q(x) \sin i\pi x dx - \frac{8(1-\nu^2)}{Eh\pi} \int_0^1 q(x) \sin i\pi x dx.$$

შევნიშნოთ, რომ (8) სისტემის i -ური განტოლების მისაღებად, (5)-ს მარჯვენა მხარეში $w(x)$ უნდა ჩავანაცვოთ $w_n(x)$ -ით, გავამრავლოთ მიღებული განტოლება $\frac{1}{i\pi} \sin i\pi x$ -ზე და ამის შემდეგ გამოვიყენოთ ტოლობები

$$\int_0^1 \sin i\pi x \sin j\pi x dx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \frac{1}{2}, & i = j, \end{cases}$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx),$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx),$$

ვანტეგროთ x -ის მიმართ 0-დან 1-მდე და გავუტოლოთ შედეგი ნულს. (8) სისტემა ამოვხსნათ იტერაციული მეთოდით

$$(p_{1i} + p_2 + w_{ni,k+1}^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n w_{nj,k}^2) w_{ni,k+1} + p_{3ii} w_{ni,k+1} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_{3ij} w_{nj,k} + \frac{1}{i} q_i = 0, \quad (10)$$

$$k = 0, 1, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

სადაც $w_{ni,k+l}$ არის w_{ni} -ს $(k+l)$ -ე მიახლოება, $l = 0, 1$. ეს მეთოდი იაკობის იტერაციული მეთოდია [6]. $w_{ni,k}$, $i = 1, 2, \dots, n$ -ს განსაზღვრის შემდეგ, ჩვენ მას ვიყენებთ (7) ფორმულაში w_{ni} -ის ნაცვლად და, შედეგად, ვპოულობთ $w(x)$ ფუნქციის მიახლოებას, რომლის (3)-ში გამოყენებით ვპოულობთ $u(x)$ და $\psi(x)$ ფუნქციების მიახლოებებს.

შევნიშნოთ, რომ (10) სისტემის ყოველი i -ური განტოლება კუბურია $w_{ni,k+1}$ -ის მიმართ. ამიტომ, კარდანოს ფორმულის გამოყენებით [1], $w_{ni,k+1}$ შეგვიძლია ჩავწეროთ ცხადი სახით

$$w_{ni,k+1} = \sigma_{i,l} - \sigma_{i,2}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (11)$$

სადაც

$$\sigma_{i,l} = \left[(-1)^l \frac{s_i}{2} + \left(\frac{s_i^2}{4} + \frac{r_i^3}{27} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}, \quad l = 1, 2, \quad (12)$$

$$r_i = p_{1i} + p_2 + p_{3ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n w_{nj,k}^2, \quad s_i = \frac{1}{i} q_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_{3ij} w_{nj,k}. \quad (13)$$

4. იტერაციული მეთოდის კრებადობა

გადავწეროთ (11) სისტემა შემდეგი სახით

$$w_{ni,k+1} = \varphi_i(w_{n1,k}, w_{n2,k}, \dots, w_{nn,k}) \quad (14)$$

და განვიხილოთ მისი იაკობის მატრიცი

$$J = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial w_{nj,k}} \right)_{i,j=1}^n. \quad (15)$$

(11)–(14)-ის ძალით დავასკვნით, რომ J მატრიცის დიაგონალური ელემენტები ნულის ტოლია, ხოლო არადიაგონალური ელემენტებისათვის მართებულია

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial w_{nj,k}} = -\frac{1}{6} \sum_{l=1}^2 \frac{1}{\sigma_{i,l}^2} \left[p_{3ij} + (-1)^l \left(\frac{s_i^2}{4} + \frac{r_i^3}{27} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{s_i}{2} p_{3ij} + \frac{2}{9} r_i^2 w_{nj,k} \right) \right]. \quad (16)$$

(12)-დან გამომდინარეობს

$$\sigma_{i,1} \cdot \sigma_{i,2} = \frac{r_i}{3}, \quad \sigma_{i,2}^3 - \sigma_{i,1}^3 = s_i, \quad \left(\frac{s_i^2}{4} + \frac{r_i^3}{27} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sigma_{i,1}^3 + \sigma_{i,2}^3}{2}. \quad (17)$$

ამ ფორმულების (16)-ში გამოყენებით ვიღებთ

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial w_{nj,k}} = -\frac{1}{6} p_{3ij} \frac{1}{\sigma_{i,1}^2 - \frac{r_i}{3} + \sigma_{i,2}^2} + \frac{2}{3} w_{nj,k} s_i \frac{1}{\sigma_{i,1}^4 + \left(\frac{r_i}{3}\right)^2 + \sigma_{i,2}^4}. \quad (18)$$

(17)-ის პირველი განტოლების გათვალისწინებით ვპოულობთ

$$\sigma_{i,1}^2 - \frac{r_i}{3} + \sigma_{i,2}^2 \geq \frac{1}{3} r_i, \quad \sigma_{i,1}^4 + \sigma_{i,2}^4 \geq \frac{2}{9} r_i^2. \quad (19)$$

(18) და (19)-დან გამომდინარე ვწერთ

$$\left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial w_{nj,k}} \right| \leq \phi_{1ij} + \phi_{2ij}, \quad (20)$$

სადაც

$$\phi_{1ij} = \frac{1}{2} |p_{3ij}| \frac{1}{|r_i|}, \quad \phi_{2ij} = 2 |w_{nj,k}| |s_i| \frac{1}{r_i^2}. \quad (21)$$

შევაფასოთ ყოველი ϕ_{lij} , $l = 1, 2$. დავუშვათ (1),(2) ამოცანაში ფუნქცია $p(x)$ და ν , E , h და k_0 კონსტანტები ისეთებია, რომ

$$p_{li} > |p_2 + p_{3ii}| \quad (22)$$

(9)-დან გამომდინარე, (22) ნიშნავს, რომ

$$\left(\frac{1}{2k_0^2(1-\nu)} + \frac{3}{(hi\pi)^2} \right)^{-1} > |4 \int_0^1 (1-x)p(x)dx - 8 \int_0^1 \left(\int_0^x p(\xi)d\xi \right) \sin^2 i\pi x dx + \frac{4}{i\pi} \int_0^1 p(x) \sin 2i\pi x dx|, \quad (23)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

ამ შემთხვევაში, (21) და (12)-ის ძალით გვაქვს

$$\phi_{lij} \leq \frac{1}{2c_i} |p_{3ij}|, \quad (24)$$

სადაც

$$c_i = p_{li} - |p_2 + p_{3ii}|.$$

მეტიც, თუ გამოვიყენებთ (21), (22), (13) და ფაქტს, რომ

$$\max_x \frac{x}{c+x^2} = \frac{1}{2\sqrt{c}}, \quad x > 0, \quad c > 0,$$

მივალთ იმ დასკვნამდე, რომ

$$\begin{aligned} \phi_{2ij} &= 2 \frac{|w_{nj,k}| |s_i|}{|r_i| r_i} \leq 2 \frac{|w_{nj,k}|}{c_i + w_{nj,k}^2} \left(\frac{1}{i} \frac{|q_i|}{c_i} + \frac{1}{c_i + \sum_{l=1, l \neq i}^n w_{nl,k}^2} \left(\sum_{l=1, l \neq i}^n p_{3il}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{l=1, l \neq i}^n w_{nl,k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{c_i}} \left(\frac{1}{i} \frac{|q_i|}{c_i} + \frac{1}{2\sqrt{c_i}} \left(\sum_{l=1, l \neq i}^n p_{3il}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

შემოვიღოთ ვექტორული და მატრიცული ნორმები

$$\sum_{i=1}^n |v_i| \quad v = (v_i)_{i=1}^n \text{-თვის}$$

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |m_{ij}| \quad M = (m_{ij})_{i,j=1}^n \text{-თვის.}$$

დავუშვათ J მატრიცის ნორმა ნაკლებია Δ -ზე, $0 < \Delta < 1$. (15), (20), (24) და (25)-ის გათვალისწინებით, ეს მოთხოვნა სრულდება, თუ

$$\frac{1}{2} \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{1}{c_i} |p_{3ij}| + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} \left(2 \frac{|q_i|}{i \sqrt{c_i}} + \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_{3ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) < \Delta < 1. \quad (26)$$

მაშინ, ბანახის კუმშვის პრინციპიდან გამომდინარე [3] არსებობს (8) სისტემის ერთადერთი ამონახსნი w_{ni} , $i = 1, 2, \dots, n$, რომლისკენაც იკრიბება $w_{ni,k}$ მიახლოებების მიმდევრობა, როცა $k \rightarrow \infty$, ხოლო ცდომილება მცირდება გეომეტრიული პროგრესიის სიჩქარით

$$\sum_{i=1}^n |w_{ni} - w_{ni,k}| \leq \frac{\Delta^k}{1 - \Delta} \sum_{i=1}^n |w_{ni,1} - w_{ni,0}|, \quad k = 0, 1, \dots \quad (27)$$

ახლა (23) და (26) პირობები ჩავანაცვლოთ უფრო უხეში, მაგრამ ადვილად შესამოწმებელი პირობებით. ამისათვის, (22)-ის ნაცვლად მოვითხოვოთ $p_{li} > |p_2| + |p_{3ii}|$ პირობის შესრულება, შემდეგ გამოვიყენოთ (8), (9) და კომი-ბუნიაკოვსკის უტოლობა. გვექნება

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 (1-x)p(x)dx \right| &\leq \frac{1}{\sqrt{3}} p_0, & \left| \int_0^1 \left(\int_0^x p(\xi)d\xi \right) \sin i\pi x \sin j\pi x dx \right| &\leq \frac{1}{2\sqrt{2}} p_0, \quad i \neq j, \\ \left| \int_0^1 \left(\int_0^x p(\xi)d\xi \right) \sin^2 i\pi x dx \right| &\leq \frac{\sqrt{3}}{4} p_0, & \left| \int_0^1 p(x) \sin i\pi x \cos j\pi x dx \right| &\leq \frac{1}{2} p_0, \quad i \neq j, \\ \left| \int_0^1 p(x) \sin i\pi x \cos i\pi x dx \right| &\leq \frac{1}{2\sqrt{2}} p_0, & \left| \int_0^1 q(x) \sin i\pi x dx \right| &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} q_0, \end{aligned}$$

სადაც

$$p_0 = \left(\int_0^1 p^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad q_0 = \left(\int_0^1 q^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (28)$$

შედეგად, (23) მოთხოვნის ნაცვლად შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$c = \left(\frac{1}{k_0^2(1-\nu)} + \frac{6}{(h\pi)^2} \right)^{-1} - \left(\frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \right) p_0 > 0. \quad (29)$$

(26) ჩანაცვლება შემდეგი პირობით

$$\frac{1}{2c} \left(\left(\frac{1}{\pi} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\pi} \right) n + \sqrt{2}(n-1)n \right) p_0 + 8\sqrt{\frac{2}{c}} \frac{1-\nu^2}{Eh\pi} q_0 \right) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} < \Delta < 1. \quad (30)$$

არაა რთული იმის გადამოწმება, რომ (23) და (26) პირობები, ისევე, როგორც (29) და (30) სამართლიანია საკმარისად მცირე $p(x)$ და $q(x)$ ფუნქციებისათვის.

5. იტერაციული პროცესის ცდომილება u , w და ψ ფუნქციებისათვის

შევაფასოთ იტერაციული პროცესის ცდომილება $w(x)$ ფუნქციისათვის. ცდომილების ქვეშ ვგულისხმობთ სხვაობას (7) -სა და $w_{n,k}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i\pi} w_{ni,k} \sin i\pi x$ ფუნქციას შორის, რომელიც მიიღება (11) იტერაციული პროცესის ჩატარების შედეგად, ანუ ფუნქცია

$$w_n(x) - w_{n,k}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i\pi} (w_{ni} - w_{ni,k}) \sin i\pi x. \quad (31)$$

(27)-ის ძალით, ამ ცდომილობის $L_2(0,1)$ ნორმისთვის გვექნება

$$\left\| \frac{d^l}{dx^l} (w_n(x) - w_{n,k}(x)) \right\|_{L_2(0,1)} \leq \frac{\Delta^k}{\sqrt{2}\pi^{1-l}(1-\Delta)} \sum_{i=1}^n |w_{ni,1} - w_{ni,0}|, \quad l = 0,1, \quad k = 0,1,\dots \quad (32)$$

თუ გამოვიყენებთ $w_n(x)$, $w_{n,k}(x)$ და (3) ფორმულებს, ავაგებთ $u_n(x)$ და $\psi_n(x)$ ფუნქციებს

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \int_0^1 G_u(x, \xi) w_n'^2(\xi) d\xi + \int_0^1 G_p(x, \xi) p(\xi) d\xi, \\ \psi_n(x) &= \int_0^1 G_\psi(x, \xi) w_n'(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (33)$$

და მათ მიახლოებებს

$$\begin{aligned} u_{n,k}(x) &= \int_0^1 G_u(x, \xi) w_{n,k}'^2(\xi) d\xi + \int_0^1 G_p(x, \xi) p(\xi) d\xi, \\ \psi_{n,k}(x) &= \int_0^1 G_\psi(x, \xi) w_{n,k}'(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (34)$$

(31)-ის ანალოგიურად, განვსაზღვრავთ იტერაციის ცდომილებებს $u(x)$ და $\psi(x)$ ფუნქციებისთვის, როგორც $u_n(x) - u_{n,k}(x)$ და $\psi_n(x) - \psi_{n,k}(x)$ სხვაობებს და შევაფასებთ მათ $L_2(0,1)$ ნორმით. (33) და (34)-დან გვაქვს

$$u_n(x) - u_{n,k}(x) = \int_0^1 G_u(x, \xi) (w_n'^2(\xi) - w_{n,k}'^2(\xi)) d\xi \quad (35)$$

და

$$\psi_n(x) - \psi_{n,k}(x) = \int_0^1 G_\psi(x, \xi) (w_n(\xi) - w_{n,k}(\xi)) d\xi. \quad (36)$$

(35) და (4)-დან მივიღებთ

$$(u_n(x) - u_{n,k}(x))^2 = \frac{1}{4} [(x-1)^2 \left(\int_0^x H(\xi) d\xi \right)^2 + 2x(x-1) \int_0^x H(\xi) d\xi \int_x^1 H(\xi) d\xi + x^2 \left(\int_x^1 H(\xi) d\xi \right)^2],$$

სადაც

$$H(\xi) = w_n'^2(\xi) - w_{n,k}'^2(\xi).$$

მაშინ

$$(u_n(x) - u_{n,k}(x))^2 \leq \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 \left(\int_0^1 |H(\xi)| d\xi \right)^2. \quad (37)$$

შევაფასოთ $\int_0^1 |H(\xi)| d\xi$. ვინაიდან

$$w_{n,k}(\xi) = w_n(\xi) + (w_{n,k}(\xi) - w_n(\xi))$$

ამიტომ

$$\int_0^1 |H(\xi)| d\xi \leq \left\| (w_n(x) - w_{n,k}(x)) \right\|_{L_2(0,1)} \left(2 \left\| w_n'(x) \right\|_{L_2(0,1)} + \left\| (w_n'(x) - w_{n,k}'(x)) \right\|_{L_2(0,1)} \right). \quad (38)$$

უნდა მივიღოთ $w'_n(x)$ -ის ნორმის შეფასება. გავამრავლოთ (8) გამოსახულება w_{ni} -ზე და ავჯამოთ $i = 1, 2, \dots, n$ -ს მიმართ, მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^n p_{1i} w_{ni}^2 + (p_2 + \sum_{i=1}^n w_{ni}^2) \sum_{i=1}^n w_{ni}^2 + \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n p_{3ij} w_{nj}) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} q_i w_i = 0.$$

ამიტომ, (9)-ის გათვალისწინებით დავასკვნით, რომ

$$\left(\sum_{i=1}^n w_{ni}^2\right)^2 + (\omega_1 - \varepsilon) \sum_{i=1}^n w_{ni}^2 - \frac{1}{4\varepsilon} \omega_2 \leq 0,$$

სადაც

$$\omega_1 = \left(\frac{1}{2k_0^2(1-\nu)} + \frac{3}{(h\pi)^2} \right)^{-1} - (|p_2| + \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{3ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}), \quad \omega_2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i} q_i\right)^2,$$

ხოლო ε არის ნებისმიერი დადებითი რიცხვი. აქედან (7)-ის გათვალისწინებით ვპოულობთ

$$\|w'_n\|_{L_2(0,1)} \leq \frac{1}{4} \left[\left((\omega_1 - \varepsilon)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \omega_2 \right)^{\frac{1}{2}} - (\omega_1 - \varepsilon) \right].$$

გამოვიყენოთ ეს უტოლობა (38) და (32)-თან ერთად (37)-ში, მივიღებთ იტერაციის ცდომილობის შეფასებას $u(x)$ ფუნქციისათვის

$$\begin{aligned} \|u_n(x) - u_{n,k}(x)\|_{L_2(0,1)} &\leq \\ &\leq \frac{1}{4\sqrt{6}} \sum_{l=0}^1 2^{\frac{l}{2}} \left[\left((\omega_1 - \varepsilon)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \omega_2 \right)^{\frac{1}{2}} - (\omega_1 - \varepsilon) \right]^l \left(\frac{\Delta^k}{1-\Delta} \sum_{i=1}^n |w_{ni,1} - w_{ni,0}| \right)^{2-l}, \end{aligned} \quad (39)$$

$$k = 0, 1, \dots$$

შემდეგ, (36) და (4) განაპირობებს (4)-ის თანახმად

$$\begin{aligned} (\psi_n(x) - \psi_{n,k}(x))^2 &= \frac{\sigma^2}{\sinh^2 \sigma} (\cosh \sigma(x-1) \int_0^x \cosh \sigma \xi (w_n(\xi) - w_{n,k}(\xi)) d\xi \\ &\quad + \cosh \sigma x \int_x^1 \cosh \sigma(\xi-1) (w_n(\xi) - w_{n,k}(\xi)) d\xi)^2. \end{aligned}$$

ამიტომ

$$\|\psi_n(x) - \psi_{n,k}(x)\|_{L_2(0,1)} \leq \omega_0 \|w_n(x) - w_{n,k}(x)\|_{L_2(0,1)}, \quad (40)$$

სადაც

$$\omega_0 = \left(\int_0^1 F(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (41)$$

და

$$F(x) = \frac{2\sigma^2}{\sinh^2 \sigma} (\cosh^2 \sigma (x-1) \int_0^x \cosh^2 \sigma \xi d\xi + \cosh^2 \sigma x \int_x^1 \cosh^2 \sigma (\xi-1) d\xi). \quad (42)$$

გამოვიყენოთ (32) უტოლობა (40)-ში. გამოვთვალოთ (42) და (41) ფორმულებში შემავალი ინტეგრალები. ამის შედეგად მივდივართ $\psi(x)$ ფუნქციისათვის იტერაციის პროცესის ცდომილების შეფასებამდე

$$\|\psi_n(x) - \psi_{n,k}(x)\|_{L_2(0,1)} \leq \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \frac{\Delta^k}{1-\Delta} \sum_{i=1}^n |w_{ni,1} - w_{ni,0}|, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (43)$$

სადაც

$$\omega_0 = \frac{1}{\sinh \sigma} \left(\frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma}{4} \sinh 2\sigma + \sinh^2 \sigma \right)^{\frac{1}{2}}.$$

6. მაგალითები

ქვემოთ, მოვიყვანოთ რამდენიმე რიცხვით მაგალითს, იმის საჩვენებლად, რომ (29) და (30) შეზღუდვები, რომლებიც განაპირობებს იტერაციის მეთოდის კრებადობას, შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ ძალის $p(x)$ და $q(x)$ მდგენელებზე პირობების სახით.

განვიხილოთ სხვადასხვა მასალის 1მ რადიუსიანი წრიული ფორმის ფირფიტები, $h = 0.005 \cdot 2^i$ მ, $i = 0, 1, 2$, სისქით. [5, 9]-ის თანახმად, $k_0^2 = 0.847$. ვინაიდან, პროექციულ მეთოდებში, როგორც წესი, კარგი მიახლოება მიღწევადია ბაზისური ფუნქციების არც თუ ისე დიდი რაოდენობის გამოყენებით, ჩავთვალოთ, რომ $n = 5$.

დავწეროთ ფორმულები h -ის განხილული სამი მნიშვნელობისათვის. (29) პირობასა და p_0 პარამეტრს (28)-დან მივყავართ უტოლობამდე

$$\left(\int_0^1 p^2(x) dx\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon_1. \quad (44)$$

აღვნიშნოთ

$$c = \varepsilon_2 - 3.3370 \left(\int_0^1 p^2(x) dx\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (45)$$

წინა უტოლობის ძალით $c > 0$. გამოვიყენოთ C -ს ეს მნიშვნელობა (30) პირობაში. თუ, გარდა ამისა, q_0 პარამეტრს (28)-დან გამოვიყენებთ (30)-ში, მაშინ ეს პირობა შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$\frac{1}{c} (43.9614 \left(\int_0^1 p^2(x) dx\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \varepsilon_3 \left(\int_0^1 q^2(x) dx\right)^{\frac{1}{2}}) < \Delta < 1. \quad (46)$$

შემოღებულია დამხმარე ε_i , $i = 1, 2, 3$ კოეფიციენტები, რომელთა საშუალებებით ედება შეზღუდვები $p(x)$ და $q(x)$ ფუნქციებს.

(44)–(46) გამოსახულებებიდან გამომდინარეობს, რომ სხვადასხვა მასალისგან დამზადებული ფირფიტებისათვის ε_i , $i = 1, 2, 3$ კოეფიციენტებისთვის მიიღება შემდეგი მონაცემები

ფოლადი			E = 210 ν = 0.30
h	$\varepsilon_1 \cdot 10^4$	$\varepsilon_2 \cdot 10^4$	ε_3
0.005	0.1231	0.4107	3.5651
0.010	0.4922	1.6428	1.7825
0.020	1.9675	6.5658	0.8913

რკინა			E = 210 ν = 0.26
h	$\varepsilon_1 \cdot 10^4$	$\varepsilon_2 \cdot 10^4$	ε_3
0.005	0.1231	0.4108	3.6528
0.010	0.4923	1.6428	1.8264
0.020	1.9676	6.5662	0.9132

თითბერი			E = 115 ν = 0.36
h	$\varepsilon_1 \cdot 10^4$	$\varepsilon_2 \cdot 10^4$	ε_3
0.005	0.1231	0.4107	6.2268
0.010	0.4923	1.6428	3.1134
0.020	1.9673	6.5651	1.5567

ბრინჯაო			E = 108 ν = 0.34
h	$\varepsilon_1 \cdot 10^4$	$\varepsilon_2 \cdot 10^4$	ε_3
0.005	0.1231	0.4108	6.737
0.010	0.4923	1.6428	3.3685
0.020	1.9674	6.5653	1.6843

III თავი. გალიორკინის მეთოდის სიზუსტე დინამიური ძელის არაწრფივი განტოლებისათვის

ამ თავში განხილულია არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლება სასაზღვრო პირობით, რომელიც აღწერს ტიმოშენკოს ტიპის ძელის დინამიურ მდგომარეობას. სივრცული ცვლადის ამონახსნთან მიახლოებისათვის გამოყენებულია გალიორკინის მეთოდი, შეფასებულია მისი ცდომილობა.

1. ამოცანის ჩამოყალიბება

განვიხილოთ არაწრფივი დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) - h \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}(x, t) - \left(\lambda + \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi, t) \right)^2 d\xi \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad (1)$$

$$0 < x < L, \quad 0 < t \leq T,$$

საწყის-სასაზღვრო პირობებით

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u^0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u^1(x), \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t \leq T,$$

სადაც h და λ არაუარყოფითი მუდმივებია, $u^0(x)$ და $u^1(x)$ მოცემული ფუნქციებია, ხოლო $u(x, t)$ საძიებელი ფუნქციაა.

(1) განტოლება აღწერს ძელის დინამიურ მდგომარეობას. ის განხილულია ჰენრიკო დე ბრიტოს მიერ [3] და მიეკუთვნება ტიმოშენკოს თეორიაზე [14] დაფუძნებულ განტოლებათა კლასს. $\lambda = 0$ შემთხვევისათვის, (1) განტოლება მიიღეს მენზელამ და ზუაზუამ [8, 9] ერთგანზომილებიანი კარმანის სისტემაში ზღვარზე გადასვლით. კარმანის სისტემა აღწერს

ერთგვაროვანი პრიზმული ძელის მოძრაობას. უფრო ზუსტად, გამოყენებულია განტოლებათა სისტემა [6]

$$v_{tt} - \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)_x = 0,$$

$$w_{tt} + w_{xxxx} - hw_{xxt} - \left[w_x \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) \right]_x = 0,$$

ამ სისტემის პირველ განტოლებაში შემავალ v_{tt} წევრს ვამრავლებთ $\varepsilon > 0$ კოეფიციენტზე, გადავდივართ ზღვარზე, როცა $\varepsilon \rightarrow 0$ და სრულდება პირობა $v(0, t) = v(L, t)$.

[10]-ში განხილულია ძელის განტოლება, რომელიც წარმოადგენს (1) განტოლების გარკვეულ განზოგადებას.

კიდევ ერთ ტიმოშენკოს მოდელს ძელისათვის აქვს შემდეგი სახე [4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (cd - a + b \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 d\xi) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - cd \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= c \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - c^2 d \left(\psi - \frac{\partial u}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

(1)-სა და (3)-ის შედარებით აღმოვაჩინეთ, რომ ორივე მოდელს აქვს ერთი და იგივე არაწრფივი წევრი $\left(\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, რომელიც პირველად 1876 წელს გამოიყენა კირხჰოფმა სიმის განტოლებაში [5]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\alpha_0 + \alpha_1 \int_0^\pi \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

და რომელსაც ეწოდა K -კორექცია [2]. შევნიშნოთ, რომ K -კორექცია თანდაყოლილია ძელებისა და ფირფიტების მრავალ მოდელში. ბევრ ნაშრომში შესწავლილია (4) განტოლების ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის საკითხი, აგებულია და გამოკვლეულია მიახლოებითი ალგორითმები. რამდენიმე პუბლიკაცია მიძღვნილია

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varphi \left(\int_0^\pi \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (5)$$

განტოლებას. ასევე რამდენიმე ნაშრომში განხილულია (1) განტოლებების მიახლოებითი ამონახსნის პოვნის ალგორითმები და შეფასებულია მათი ცდომილობა. ბიბლიოგრაფია ამ თემასთან დაკავშირებით ნაწილობრივ მოყვანილია [13]-ში .

(3) სისტემის ამოხსნადობა გამოკვლეულია [15]-ში, ხოლო [1]-ის ავტორი იხილავს ამონახსნის არსებობის საკითხს უფრო ზოგადი სახის განტოლებათა სისტემისთვის. [11]-ში აგებულია (3)-ის მიახლოებითი ამონახსნის პოვნის ალგორითმი და შეფასებულია მისი ცდომილება. ტიმოშენკოს გაწრფივებული სისტემის რიცხვითი ამოხსნა განხილულია [7]-ში.

შევნიშნოთ, რომ [3]-ში დამტკიცებულია ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა. უფრო ზოგადი განტოლებისთვის ვიდრე (1). მოცემული თავი მიძღვნილია მიახლოებითი ამონახსნის პოვნის საკითხს. აქ ჩვენ ვიყენებთ მეთოდს, რომელიც [11,12]-ში და [13]-ში გამოყენებულია (3)-(5) განტოლებებისათვის. აღნიშნული მეთოდი მდგომარეობს იმაში, რომ ვახორციელებთ X -ით მიახლოებას გალიორკინის მეთოდით. ცდომილების შეფასებაში შემავალი ყველა კოეფიციენტი გამოსახულია ცხადი სახით ამოცანის პარამეტრების საშუალებით.

2. ამოხსნადობა

[3]-ში დამტკიცებულია კოშის განზოგადებული ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა

$$(I + hA)u'' + A^2u + \left[\lambda + M \left(|A^{\frac{1}{2}}u|^2 \right) \right] Au = f$$

განტოლებისათვის, რომლის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს (1) განტოლება. გამოვიყენოთ [3]-ის შედეგი.

(\cdot, \cdot) სიმბოლოთი აღვნიშნავთ სკალარულ ნამრავლს $L_2(0, L)$ -ში. ვთქვათ $\overset{\circ}{W}_2(0, L)$ შედგება $W_2^2(0, L)$ სივრცის ფუნქციებისაგან, რომლებიც საზღვარზე ნოლის ტოლი ხდება. [3]-ის გათვალისწინებით, თუ

$$u^0(x) \in \overset{\circ}{W}_2(0, L), \quad u^1(x) \in W_2^1(0, L), \quad (6)$$

მაშინ არსებობს ერთადერთი ამონახსნი $u = u(x, t)$,

$$u \in L^\infty(0, T; \overset{\circ}{W}_2(0, L)), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0, T; W_2^1(0, L)), \quad (7)$$

ისეთი, რომ u იქნება (1), (2) ამოცანის სუსტი ამონახსნი, ანუ ყოველი $v = v(x) \in \overset{\circ}{W}_2(0, L)$, u აკმაყოფილებს

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right) + h \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \\ + \left(\lambda + \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

ტოლობასა და სასაზღვრო პირობებს

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u^1(x). \quad (9)$$

აქედან გავაკეთოთ თემის გაგრძელებისათვის საჭირო დასკვნები. (7)-ის გათვალისწინებით, ამოცანის ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(t) \sin \frac{i\pi x}{L}, \quad (10)$$

სადაც (8)-დან გამომდინარე, v ფუნქციის $\sin \frac{i\pi x}{L}$, $i=1, 2, \dots, n$ ფუნქციებით ჩანაცვლების

შედეგად, $u_i(t)$ კოეფიციენტები აკმაყოფილებს განტოლებათა სისტემას

$$\left(1 + h\left(\frac{\pi i}{L}\right)^2\right) u_i'(t) + \left(\frac{\pi i}{L}\right)^4 u_i(t) + \left(\lambda + \frac{L}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\pi j}{L}\right)^2 u_j^2(t)\right) \left(\frac{\pi i}{L}\right)^2 u_i(t) = 0, \quad (11)$$

$$i = 1, 2, \dots, \quad 0 < t \leq T.$$

(8) სისტემას დავამატებთ (7) და (6)-დან გამომდინარე პირობებს

$$u_i(0) = a_i^{(0)}, \quad u_i'(0) = a_i^{(1)}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

სადაც

$$a_i^{(l)} = \frac{2}{L} \int_0^L u^l(x) \sin \frac{i\pi x}{L} dx, \quad l = 0, 1.$$

(10)-სა და (7)-ის გათვალისწინებით დავასკვნით, რომ შემდეგი ჯამები კრებადია

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^4 u_i^2(t), \quad \sum_{i=1}^{\infty} i^2 u_i'^2(t). \quad (13)$$

3. დაშვებები

დავუშვათ, რომ საწყისი ფუნქციები მოცემულია შემდეგი სახით

$$u^0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(0)} \sin \frac{i\pi x}{L}, \quad u^1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(1)} \sin \frac{i\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (14)$$

და

$$a_i^{(0)2} \leq \frac{\omega_0}{i^{p_0+5}}, \quad a_i^{(1)2} \leq \frac{\omega_1}{i^{p_1+3}}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

სადაც P_0, P_1, ω_0 და ω_1 დადებითი რიცხვებია.

შენიშნოთ, რომ ამ პირობის შესრულებადობა დამოკიდებულია (6)-ის განხორციელებაზე. როგორც დავინახავთ, (15) უტოლობების შესრულება გაგვიმარტივებს ცდომილების გარკვეული პარამეტრების დათვლას. მოცემული თავის ბოლოს, მოყვანილია ფორმულები იმ შემთხვევისთვის, როდესაც ეს შეზღუდვა არ სრულდება.

4. გალიორკინის მეთოდი და მისი სიზუსტე

მივუახლოვდეთ ამონახსნს x ცვლადის მიმართ. ამისათვის გამოვიყენოთ გალიორკინის მეთოდი. ამონახსნს ვეძებთ სასრული ჯამის სახით

$$u_n(x, t) = \sum_{i=1}^n u_{ni}(t) \sin \frac{i\pi x}{L}, \quad (16)$$

სადაც $u_{ni}(t)$ კოეფიციენტები არის შემდეგი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნები

$$\left(1 + h \left(\frac{\pi i}{L}\right)^2\right) u_{ni}''(t) + \left(\frac{\pi i}{L}\right)^4 u_{ni}(t) + \left(\lambda + \frac{L}{2} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\pi j}{L}\right)^2 u_{nj}^2(t)\right) \left(\frac{\pi i}{L}\right)^2 u_{ni}(t) = 0, \\ 1, 2, \dots, n, \quad 0 < t \leq T, \quad (17)$$

საწყისი პირობებით

$$u_{ni}(0) = a_i^{(0)}, \quad u_{ni}'(0) = a_i^{(1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (18)$$

ახლა ჩვენი მიზანია დავადგინოთ გალიორკინის მეთოდის ცდომილება. განვსაზღვროთ ეს ცდომილება. (10) კოეფიციენტების გაშლის საშუალებით შემოვიღოთ ფუნქცია

$$\pi_n u(x, t) = \sum_{i=1}^n u_i(t) \sin \frac{i\pi x}{L}. \quad (19)$$

გალიორკინის მეთოდის ცდომილების ქვეშ გვესმის სხვაობა $u_n(x, t)$ და $\pi_n u(x, t)$ ფუნქციებს შორის

$$\delta_n(x, t) = u_n(x, t) - \pi_n u(x, t). \quad (20)$$

(20), (16) და (19) -დან გამომდინარეობს

$$\delta_n(x, t) = \sum_{i=1}^n \delta_{ni}(t) \sin \frac{i\pi x}{L}, \quad (21)$$

სადაც

$$\delta_{ni}(t) = u_{ni}(t) - u_i(t). \quad (22)$$

ქვემოთ $\|\cdot\|$ -ით აღვნიშნავთ ნორმას $L_2(0, L)$ სივრცეში. მივიღოთ განტოლებები $\delta_{ni}(t)$ -სთვის. გამოვიყენოთ (11) სისტემის პირველი n განტოლება და პირველი n ტოლობა ყოველი საწყისი (12) პირობიდან, გამოვავლოთ შესაბამისი განტოლებები (17) სისტემიდან და (18) პირობებიდან. შედეგად, (22), (16) და (19)-ის გამოყენებით, მივიღებთ განტოლებათა სისტემას $\delta_{ni}(t)$ -ისათვის

$$\begin{aligned} & \left(1 + h\left(\frac{\pi i}{L}\right)^2\right) \delta_{ni}''(t) + \left(\left(\frac{\pi i}{L}\right)^4 + \left(\lambda + \|u_{nx}(x, t)\|^2\right)\left(\frac{\pi i}{L}\right)^2\right) \delta_{ni}(t) \\ & + \left(\|u_{nx}(x, t)\|^2 - \|(\pi_n u)_x(x, t)\|^2\right) \left(\frac{\pi i}{L}\right)^2 u_i(t) = \frac{L}{2} \beta_n(t) \left(\frac{\pi i}{L}\right)^2 u_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (23)$$

საწყისი პირობებით

$$\delta_{ni}(0) = 0, \quad \delta_{ni}'(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (24)$$

აქ

$$\beta_n(t) = \frac{2}{L} \|u_x(x, t) - (\pi_n u)_n(x, t)\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{\pi i}{L}\right)^2 u_i^2(t). \quad (25)$$

(23) სისტემა და (24) პირობები არის მეთოდის სიზუსტის შეფასების საწყისი წერტილი.

ლემა 1. მართებულია შეფასება

$$\left\| \frac{\partial^l}{\partial x^l} \pi_n u(x, t) \right\|^2 \leq c_{l-1}, \quad l = 1, 2, \quad (26)$$

სადაც C_0 და C_1 არაა დამოკიდებული n და t -ზე.

დამტკიცება. გავამრავლოთ (11) $2u_i'(t)$ -ზე და ავჯამოთ მიღებული გამოსახულება $i = 1, 2, \dots$ მიმართ. თუ გამოვიყენებთ (10), (13)-ს და აღვნიშნავთ

$$\Phi(t) = \frac{2}{L} \left(\|u_t(x,t)\|^2 + h \|u_{xt}(x,t)\|^2 + \|u_{xx}(x,t)\|^2 \right) + \frac{1}{L} \left(\lambda + \|u_x(x,t)\|^2 \right)^2, \quad (27)$$

მაშინ შედეგად დავწერთ $\Phi'(t) = 0$, რაც ნიშნავს, რომ $0 < t \leq T$ -სთვის

$$\Phi(t) = \Phi(0). \quad (28)$$

(27), (10) და (19)-ის გათვალისწინებით (28)-დან გამომდინარეობს

$$\frac{2}{L} \left(\|(\pi_n u)_t(x,t)\|^2 + h \|(\pi_n u)_{xt}(x,t)\|^2 + \|(\pi_n u)_{xx}(x,t)\|^2 \right) + \frac{1}{L} \left(\lambda + \|(\pi_n u)_x(x,t)\|^2 \right)^2 \leq \Phi(0). \quad (29)$$

გამოვთვალოთ $\Phi(0)$. (27) და (9) -ის საფუძველზე

$$\Phi(0) = \frac{2}{L} \left(\|u^1(x)\|^2 + h \|u'^1(x)\|^2 + \|u''^0(x)\|^2 \right) + \frac{1}{L} \left(\lambda + \|u'^0(x)\|^2 \right)^2.$$

(29)-დან, იმის გათვალისწინებით, რომ (19)-ის ძალით $\|(\pi_n u)_{xx}(x,t)\| \geq \frac{\pi}{L} \|(\pi_n u)_x(x,t)\|$,

$l = 1$ -სთვის მივიღებთ (26)-ს, სადაც

$$c_0 = \left(\left(\frac{\pi}{L} \right)^4 + 2\lambda \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + L\Phi(0) \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 - \lambda \quad (30)$$

და შემდეგ დავადგენთ, რომ (26) სრულდება $l = 2$ -სთვის, სადაც

$$c_1 = \frac{L}{2} \Phi(0).$$

ლემა დამტკიცებულია ■

ლემა 2. სამართლიანია უტოლობა

$$\|u_{nx}(x,t)\|^2 \leq c_2, \quad (31)$$

სადაც c_2 არაა დამოკიდებული t -ზე.

დამტკიცება. (17) გავამრავლოთ $2u'_{ni}(t)$ და ავჯამოთ მიღებული გამოსახულება $i = 1, 2, \dots, n$.

(16)-ის გამოყენებით შედეგი შეიძლება ჩაიწეროს $\Phi'_n(t) = 0$ ფორმით, სადაც

$$\Phi_n(t) = \frac{2}{L} \left(\|u_{nt}(x,t)\|^2 + h \|u_{nxt}(x,t)\|^2 + \|u_{nxx}(x,t)\|^2 \right) + \frac{1}{L} \left(\lambda + \|u_{nx}(x,t)\|^2 \right)^2. \quad (32)$$

მივიღებთ ტოლობას

$$\Phi_n(t) = \Phi_n(0). \quad (33)$$

(33) ტოლობა (32)-თან და $\|u_{nxx}(x,t)\| \geq \frac{\pi}{L} \|u_{nx}(x,t)\|$ -თან ერთად, რომელიც გამომდინარეობს

(16)-დან, განაპირობებს (31)-ის სამართლიანობას, სადაც

$$c_2 = \left(\left(\frac{\pi}{L} \right)^4 + 2\lambda \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + L\Phi_n(0) \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 - \lambda. \quad (34)$$

ლემა დამტკიცებულია. ■

თუ მოთხოვნილია c_2 -ის დათვლა ან შეფასება, შეგვიძლია გამოვიყენოთ შემდეგი ფორმულები $\Phi_n(0)$ -თვის

$$\begin{aligned} \Phi_n(0) &= \sum_{i=1}^n \left(1 + h \left(\frac{\pi i}{L} \right)^2 \right) a_i^{(1)^2} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\pi i}{L} \right)^4 a_i^{(0)^2} \\ &\quad + \frac{1}{L} \left(\lambda + \frac{L}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\pi i}{L} \right)^2 a_i^{(0)^2} \right)^2 \leq \Phi(0), \\ \Phi_n(0) &\leq \frac{1}{L} \left[\lambda + \frac{L}{2} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \omega_0 \sum_{l=0}^1 \left(\frac{1}{p_0 + 2} \left(1 - \frac{1}{n^{p_0+2}} \right) \right)^l \right]^2 \\ &\quad + \sum_{l=0}^1 \sum_{m=0}^l \omega_l h^{l(1-m)} \left(\frac{\pi}{L} \right)^{4-2(l+m)} \left[1 + \frac{1}{p_l + 2m} \left(1 - \frac{1}{n^{p_l+2m}} \right) \right], \end{aligned} \quad (35)$$

რომლებიც (32), (16), (18)-ის (27), (10), (12), (15)-თან და მწკრივის კრებადობის ინტეგრალურ ნიშნებთან ერთად გამოყენების შედეგია.

(30)-სა და (34)-ის შედარებით და (35)-ის გამოყენებით, დავინახავთ რომ

$$c_2 \leq c_0. \quad (36)$$

შევაფასაოთ $\beta_n(t)$ რომელიც განსაზღვრულია (25) ტოლობით.

ლემა 3. სამართლიანია უტოლობა

$$\beta_n(t) \leq c_3 \left(\frac{1}{n^{p_0}} \left(c_4 + \frac{c_5}{n^2} \right) + \frac{1}{n^{p_1}} \left(c_6 + \frac{c_7}{n^2} \right) \right), \quad (37)$$

სადაც $c_l, l = 3, 4, \dots, 7$, სიდიდეები არაა დამოკიდებული n და t -ზე.

დამტკიცება. (13)-ის გამოყენებით, შემოვიღოთ ფუნქცია

$$\Psi_n(t) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(1 + h \left(\frac{\pi i}{L} \right)^2 \right) u_i'^2(t) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{\pi i}{L} \right)^4 u_i^2(t) + \left(\lambda + \|u_x(x, t)\|^2 \right) \beta_n(t). \quad (38)$$

შევაფასოთ მისი სიდიდე $t = 0$ შემთხვევისთვის. (12), (9) და (25) -დან გვაქვს

$$\Psi_n(0) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(1 + h \left(\frac{\pi i}{L} \right)^2 \right) a_i^{(1)2} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{\pi i}{L} \right)^4 a_i^{(0)2} + \left(\lambda + \|u^0(x)\|^2 \right) \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{\pi i}{L} \right)^2 a_i^{(0)2}. \quad (39)$$

(15)-ს გამოყენება და მწკრივის კრებადობის ინტეგრალური ნიშანი გვაძლევს

$$\begin{aligned} \Psi_n(0) &\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \left\{ \omega_1 \left(1 + h \left(\frac{\pi i}{L} \right)^2 \right) \frac{1}{i^{p_1+3}} + \omega_0 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left[\left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \frac{1}{i^{p_0+1}} + \left(\lambda + \|u^0(x)\|^2 \right) \frac{1}{i^{p_0+3}} \right] \right\} \leq \\ &\leq \omega_1 \frac{1}{n^{p_1}} \left(\frac{1}{(p_1+2)n^2} + h \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \frac{1}{p_1} \right) + \omega_0 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \frac{1}{n^{p_0}} \left[\left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \frac{1}{p_0} + \left(\lambda + \|u^0(x)\|^2 \right) \frac{1}{(p_0+2)n^2} \right]. \end{aligned} \quad (40)$$

მეტიც, (25)-სა და (38)-ის შედარებით დავასკვნით, რომ

$$\beta_n(t) \leq \left(\lambda + \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \right)^{-1} \Psi_n(t). \quad (41)$$

ახლა შევაფასოთ $\Psi_n(t)$ ფუნქცია. (11)-ის $2u_i'(t)$ -ზე გამრავლებით, მიღებული გამოსახულების აჯამვით $i = n+1, n+2, \dots$ მიმართ, და (38)-სა და (25)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\Psi'_n(t) = \left(\|u_x(x,t)\|^2 \right)_t \beta_n(t). \quad (42)$$

(10), (27) და (28)-დან გამომდინარე გვაქვს

$$\begin{aligned} \left(\|u_x(x,t)\|^2 \right)_t &\leq \frac{2}{L} \alpha \left[(\|u_t(x,t)\|^2 + \|u_{xx}(x,t)\|^2) \right. \\ &\left. + (h\|u_{xt}(x,t)\|^2 + 2\lambda\|u_x(x,t)\|^2) \right] \leq \alpha \Phi(t) = \alpha \Phi(0), \end{aligned} \quad (43)$$

სადაც

$$\alpha = \frac{L}{2} \left(1 + (2\lambda h)^{\frac{1}{2}} \right)^{-1}.$$

(41)–(43)-ის ძალის, (38) და გროუნვოლის უტოლობის თანახმად

$$\Psi_n(t) \leq \Psi_n(0) \exp \left[\alpha \left(\lambda + \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \right)^{-1} \Phi(0)t \right]. \quad (44)$$

(41), (44) და (40) გამოსახულებების თანმიმდევრული გამოყენებით, დავინახავთ, რომ (37) სამართლიანია და ასევე

$$\begin{aligned} c_3 &= \left(\lambda + \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \right)^{-1} \exp \left[\alpha \left(\lambda + \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \right)^{-1} \Phi(0)T \right], \quad c_4 = \frac{1}{p_0} \omega_0 \left(\frac{\pi}{L} \right)^4, \\ c_5 &= \frac{1}{p_0 + 2} \omega_0 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left(\lambda + \|u^{0'}(x)\|^2 \right), \quad c_6 = \frac{1}{p_1} \omega_1 h \left(\frac{\pi}{L} \right)^2, \quad c_7 = \frac{1}{p_1 + 2} \omega_1. \end{aligned} \quad (45)$$

ლემა დამტკიცებულია. ■

ჩამოვყალიბოთ საბოლოო შედეგი.

თეორემა 1. გალიორკინის მეთოდის ცდომილებისათვის სამართლიანია უტოლობა

$$\left(\|\delta_{nt}(x,t)\|^2 + h\|\delta_{nxt}(x,t)\|^2 + \|\delta_{nxx}(x,t)\|^2 + \lambda\|\delta_{nx}(x,t)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c(t) \left(\frac{1}{n^{p_0}} \left(c_4 + \frac{c_5}{n^2} \right) + \frac{1}{n^{p_1}} \left(c_6 + \frac{c_7}{n^2} \right) \right), \quad (46)$$

სადაც $c(t)$ ზევითაა განსაზღვრული.

დამტკიცება. (23)-ის $L\delta'_{ni}(t)$ -ზე გამრავლებით, მიღებული გამოსახულების $i=1,2,\dots,n$ მიმართ აჯამვით და (21)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$F'_n(t) = \left(\|u_{nx}(x,t)\|^2 \right)_t \|\delta_{nx}(x,t)\|^2 + \left[L \left(\|(\pi_n u)_x(x,t)\|^2 - \|u_{nx}(x,t)\|^2 \right) + \frac{L^2}{2} \beta_n(t) \right] \sum_{i=1}^n \left(\frac{\pi i}{L} \right)^2 u_i(t) \delta'_{ni}(t), \quad (47)$$

სადაც

$$F_n(t) = \|\delta_{nt}(x,t)\|^2 + h \|\delta_{nxt}(x,t)\|^2 + \|\delta_{nxx}(x,t)\|^2 + \left(\lambda + \|u_{nx}(x,t)\|^2 \right) \|\delta_{nx}(x,t)\|^2. \quad (48)$$

შევაფასოთ (47)-ის მარჯვენა მხარე. (16), (32) და (33)-ის გამოყენებით, (43)-ის ანალოგიურად მივიღებთ

$$\left| \left(\|u_{nx}(x,t)\|^2 \right)_t \right| \leq \alpha \Phi_n(t) = \alpha \Phi_n(0). \quad (49)$$

გარდა ამისა, (19), (16), (21), (22), (26) და (31)-ის ძალით, გვექნება

$$\begin{aligned} \left| \|(\pi_n u)_x(x,t)\|^2 - \|u_{nx}(x,t)\|^2 \right| &\leq \frac{L}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\pi i}{L} \right)^2 |u_i^2(t) - u_{ni}^2(t)| \\ &\leq \left(\|(\pi_n u)_x(x,t)\| + \|u_{nx}(x,t)\| \right) \|\delta_{nx}(x,t)\| \leq (c_0 + c_2) \|\delta_{nx}(x,t)\|. \end{aligned} \quad (50)$$

საბოლოოდ, (19), (21) და (26)-ის ხელმეორედ გამოყენებით გვექნება

$$\frac{L}{2} \left| \sum_{i=1}^n \left(\frac{\pi i}{L} \right)^2 u_i(t) \delta'_{ni}(t) \right| \leq \|(\pi_n u)_{xx}(x,t)\| \|\delta_{nt}(x,t)\| \leq c_1 \|\delta_{nt}(x,t)\|. \quad (51)$$

თუ გამოვიყენებთ (47)–(51) და (21), (24), (37) ფორმულებს და $\|\delta_{nxt}(x,t)\| \geq \frac{\pi}{L} \|\delta_{nt}(x,t)\|$,

$\|\delta_{nxx}(x,t)\| \geq \frac{\pi}{L} \|\delta_{nx}(x,t)\|$ უტოლობებს მივიღებთ

$$F_n(t) \leq \int_0^t |F_n(\tau)| d\tau \leq c_3^2 T \left[\sum_{l=0}^1 \left(\frac{1}{n^{pl}} \left(c_{2l+4} + \frac{c_{2l+5}}{n^2} \right) \right) \right]^2 + \max(c_8, c_9) \int_0^t F_n(\tau) d\tau,$$

სადაც

$$c_8 = \left(1 + h \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \right)^{-1} \left(c_{10} + \left(c_1 \frac{L}{2} \right)^2 \right), \quad c_9 = \left(\lambda + \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \right)^{-1} (c_{10} + \alpha \Phi_n(0)), \quad (52)$$

$$c_{10} = c_1(c_0 + c_2).$$

გროუნვოლის უტოლობის და (48) განსაზღვრების გამოყენებით, მივიღებთ (46) შეფასებას $c(t)$ კოეფიციენტის ფორმულასთან ერთად

$$c(t) = c_3 \sqrt{T e^{\max(c_8, c_9)t}}.$$

თეორემა დამტკიცებულია. ■

შევნიშნოთ, რომ თუ ჩვენ შევასუსტებთ სიზუსტის მოთხოვნას (52) კავშირები შეგვეძლება გავამარტივოთ. (35) და (36)-ის ძალით, $\Phi_n(0)$ და c_2 (52)-ში შეიძლება ჩავანაცვლოთ $\Phi(0)$ და c_0 -ით.

(15) უტოლობების შესრულება არაა სავალდებულო. შევაფასოთ ცდომილება ზოგად შემთხვევაში, სადაც საწყისი ფუნქციები აკმაყოფილებს მხოლოდ (6) და (14)-ს. ამისათვის, თეორემის დამტკიცებაში მხოლოდ ერთი რამის შეცვლა იქნება საჭირო. (37)-ის ნაცვლად, (41)-ში (44), (39), (45)-ის გამოყენების შედეგი უნდა გამოვიყენოთ. (46)-ში $\beta_n(t)$ -ის შეფასების დროს ვისარგებლოთ უტოლობით

$$\left(\|\delta_{nt}(x, t)\|^2 + h \|\delta_{nxt}(x, t)\|^2 + \|\delta_{nxx}(x, t)\|^2 + \lambda \|\delta_{nx}(x, t)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq c(t) \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} \left(1 + h \left(\frac{\pi i}{L} \right)^2 \right) a_i^{(1)2} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{\pi i}{L} \right)^4 a_i^{(0)2} \right. \\ \left. + \left(\lambda + \|u^0(x)\|^2 \right) \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{\pi i}{L} \right)^2 a_i^{(0)2} \right]. \quad (53)$$

(53)-ის მარჯვენა მხარე მიისწრაფის ნულისკენ, როცა $n \rightarrow \infty$, რაც ნიშნავს, რომ გალიორკინის მეთოდი კრებადია. მეტიც, (53)-ის თანახმად შეგვიძლია მივიღოთ (46)-ის მსგავსი შეფასებები იმ შემთხვევაში, როდესაც $a_i^{(0)}$ და $a_i^{(1)}$ შეიცვლება (15)-ისგან განსხვავებული წესით.

ლიტერატურა

I თავის ლიტერატურა

- [1] C. Bernardi and M. I. M. Copetti, Finite element discretization of a thermoelastic beam. Archive ouverte HALUPMC, 29/05/2013, 23 pp.
- [2] S. Fučík and A. Kufner, Nonlinear differential equations. Studies in Applied Mechanics. 2. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam-Oxford-New York, 1980.
- [3] G. Kirchhoff, Vorlesungenüber mathematische physik, I. Mechanik. Teubner, Leipzig, 1876.
- [4] T. F. Ma, Existence results for a model of nonlinear beam on elastic bearings. Appl. Math. Lett. 13 (2000), No. 5, 11–15.
- [5] T. F. Ma, Existence results and numerical solutions for a beam equation with nonlinear boundary conditions. 2nd International Workshop on Numerical Linear Algebra, Numerical Methods for Partial Differential Equations and Optimization (Curitiba, 2001). Appl. Numer. Math. 47 (2003), No. 2, 189–196.
- [6] T. F. Ma, Positive solutions for a nonlocal fourth order equation of Kirchhoff type. Discrete Contin. Dyn. Syst. 2007, Dynamical Systems and Differential Equations. Proceedings of the 6th AIMS International Conference, 1, 694–703.
- [7] J. Peradze, A numerical algorithm for a Kirchhoff-type nonlinear static beam. J. Appl. Math. 2009, Art. ID 818269, 12 pp.
- [8] J. Peradze, On an iteration method of finding a solution of a nonlinear equilibrium problem for the Timoshenko plate. ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 91 (2011), No. 12, 993–1001.
- [9] J. Peradze, On the approximate solution of a Kirchhoff type static beam equation, Trans. A. Razmadze, Math. Inst; 170(2016),266 271.
- [10] H. Temimi, A. R. Ansari and A. M. Siddiqui, An approximate solution for the static beam problem and nonlinear integro-differential equations. Comput. Math. Appl. 62 (2011), no. 8, 3132–3139.
- [11] S. Y. Tsai, Numerical computation for nonlinear beam problems. M. S. thesis, National Sun Yat-Sen University, Kaohsiung, Taiwan, 2005.
- [12] F. Wang and Y. An, Existence and multiplicity of solutions for a fourth-order elliptic equation. Bound. Value Probl. 2012, 2012:6, 9 pp.
- [13] S. Woinowsky-Krieger, The effect of an axial force on the vibration of hinged bars. J. Appl. Mech. 17 (1950), 35–36.

II თავის ლიტერატურა

- [1] G. Birkhoff and S. Mac Lane, A brief survey of modern algebra, Second edition (The Macmillan Co., New York; Collier-Macmillan Ltd., London, 1965).
- [2] J. Lagnese and J.-L. Lions, Modelling analysis and control of thin plates, *Recherches en Mathematiques Appliquees [Research in Applied Mathematics]*, 6 (Masson, Paris, 1988).
- [3] L. P. Lebedev and I. I. Vorovich, Functional analysis in mechanics. Revised and extended translation of the Russian original. Springer Monographs in Mathematics (Springer-Verlag, New York, 2003).
- [4] G. I. Marchuk, Methods of numerical mathematics, Second edition. (Translated from the Russian) *Applications of Mathematics*, 2 (Springer-Verlag, New York--Berlin, 1982).
- [5] R. D. Mindlin and H. Deresiewicz, Timoshenko's shear coefficient for flexural vibrations of beams, Columbia University, New York, June, 1953, 25p.
- [6] J. M. Ortega and W. C. Rheinboldt, Iterative solution of nonlinear equations in several variables, Reprint of the 1970 original. *Classics in Applied Mathematics*, 30 (Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2000).
- [7] J. Peradze, V. Odisharia, A numerical algorithm for one-dimensional nonlinear Timoshenko system, *Intrn. J. Appl. Math. Inform.*, 2, no. 3, 67-75, 2008.
- [8] J. Peradze, On an iteration method of finding a solution of a nonlinear equilibrium problem for the Timoshenko plate. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 91 (2011), No. 12, 993–1001.
- [9] S. P. Timoshenko, On the correction for shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bar, *Philosophical Magazin* 41, no. 6, 744--746 (1921).
- [10] S. Vol'mir, Nonlinear dynamics of plates and shells (in Russian) (Nauka, Moscow, 1972).
- [11] S. Vol'mir, The shells on the flow of fluid and gas (in Russian) *Problems of Hydroelasticity* (in Russian) (Nauka, Moscow, 1979).
- [12] I. Vorovich, Nonlinear theory of shallow shells, *Applied Mathematical Sciences*, 133 (Springer-Verlag, New York, 1999, translated from Russian edition of 1989).

III თავის ლიტერატურა

- [1] K. Ammari, Global existence and uniform stabilization of a nonlinear Timoshenko beam. *Port. Math. (N.S.)* 2002; 59(2):125–140.
- [2] A. Arosio, Averaged evolution equations. The Kirchhoff string and its treatment in scales of Banach spaces. *Functional analytic methods in complex analysis and applications to partial differential equations (Trieste, 1993)*, 220--254, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995; 220-254.
- [3] E. Henriques de Brito, A nonlinear hyperbolic equation. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* 1980; 3(3):505-520.
- [4] M. Hirschhorn Sapir, EL. Reiss, Dynamic buckling of a nonlinear Timoshenko beam. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 1979; 37(2):290--301.
- [5] G. Kirchhoff, *Vorlesungen Uber mathematische Physik. I. Mechanik*, Teubner, Leipzig, 1876.
- [6] JE. Lagnese, G. Leugering Uniform stabilization of a nonlinear beam by nonlinear boundary feedback. *J. Differential Equations* 1991; 91 (2):355--388.
- [7] Li F, K. Huang, Numerical approximation and error analysis for the Timoshenko beam equations with boundary feedback. *Numer. Math. J. Chin. Univ. (Engl. Ser.)* 2007; 16(3):233–252.
- [8] GP. Menzala, E. Zuazua, The beam equation as a limit of a 1-D nonlinear von Karman model. *Appl. Math. Lett.* 1999; 12(1):47--52.
- [9] GP. Menzala, E. Zuazua, Timoshenko's beam equation as limit of a nonlinear one-dimensional von Karman system. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 2000; 130(4):855--875.
- [10] GP. Menzala, E. Zuazua, On a one-dimensional version of the dynamical Marguerre-Vlasov system. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)* 2001; 32(3):303--319.
- [11] J. Peradze, The existence of a solution and a numerical method for the Timoshenko nonlinear wave system. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 2004; 38(1):1--26.
- [12] J. Peradze, A numerical algorithm for the nonlinear Kirchhoff string equation. *Numer. Math.* 2005; 102(2):311--342.
- [13] J. Peradze, An approximate algorithm for a Kirchhoff wave equation. *SIAM J. Numer. Anal.* 2009; 47(3):2243--2268.
- [14] J. Peradze, On the approximate solution of a Kirchhoff type static beam equation, *Trans. A.Razmadze Math.Inst.*, 170, 266-271, 2016
- [15] SP. Timoshenko, DH. Young, W. Weaver, *Vibration problems on engineering*. John Wiley & Sons, Inc., 1974.

[16] M. Tucsnak, On an initial and boundary value problem for the nonlinear Timoshenko beam. *An. Acad. Brasil. Cienc.* 1991; 63(2):115–125.