ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო
მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მიმართულება: მათემატიკა

სამაგისტრო ნაშრომი თემაზე:

„ფურიეს ჯერადი ტრიგონომეტრიული მწკრივების თანაბრად კრებადობის შესახებ“

ეკატერინე ვეკუა

ხელმძღვანელი:

ასოცირებული პროფესორი

ლერი გოგოლაძე

თბილისი , 2017 წელი

2017 წელი

ანოტაცია

მიღებულია პელის თეორემის ანალოგი მრავალი ცვლადის ფუნქციებისათვის. ორი ცვლადის ფუნქციის კუთხური კერძო ჯამების ფუნქციისაგან გადახრა შეფასებულია. ნაჩვენებია, რომ ორი ცვლადის ფუნქციის კვაზიპოლინომებით საუკეთესო მიახლოებას L_2 ნორმით იძლევა კუთხური კერძო ჯამები.

Annotation

The analogue of Paley’s theorem is proved for several variables functions. Deviation from angular separate sum for functions of two variables is estimated. It’s proved that approximation with polynomials with L_2 norm for functions of two variables is given with angular separate sums.

შესავალი

ნაშრომი შედგება შესავლისაგან და 4 პარაგრაფისგან.

§1. აღნიშვნები და დამხმარე დებულებები.

§2. .შენიშვნები პელის თეორემასთან დაკავშირებით.

§3. რ.პელის თეორემის ანალოგი მრავალი ცვლადის ფუნქციებისათვის.

§4. .ორი ცვლადის ფუნქციათა ფურიეს მწკრივების კუთხური

კერძო ჯამებით აპროსქიმაციის შესახებ.

შესავალში მოცემული არის სამაგისტრო ნაშრომში განხილული საკითხები.

§2-ში განხილულია შენიშვნები პელის თეორემასთან დაკავშირებით.

თეორემა (რ. პელი)- თუ ფუნქცია უწყვეტია და მისი ფურიეს კოეფიციენტები არაუარყოფითია, მაშინ მისი ფურიეს მწკრივი თანაბრად კრებადია ამ ფუნქციისაკენ.

რ.პელის თეორემის თანახმად $f(x)\epsilon C(T)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი თანაბრად კრებადია თუ მისი კოეფიციენტები არაუარყოფითებია ანუ $a_n(f)\geq 0, b_n(f)\geq 0$, $n=0,1,2,\ldots$ ან არადადებითია ანუ $a_n(f)\leq 0, b_n(f)\leq 0, n=0,1,2,\ldots$.

ისმის კითხვა: იქნება თუ არა $f(x)\epsilon C(T)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი თანაბრად კრებადი თუ $a_n(f)\geq 0, b_n(f)\leq 0, n=0,1,2,\ldots$ ან $a_n(f)\leq 0, b_n(f)\geq 0, n=0,1,2,\ldots$

ამ შეკითხვაზე პასუხს იძლევა თეორემა1.

თეორემა1: ვთქვათ $f(x)\epsilon C(T)$ და $a_n(f), b_n(f)$ ეკუთვნის რომელიმე I_k-ს $k=1,2,3,4$ ოქტანტას. მაშინ f ფუნქციის ფურიეს წკრივი იქნება თანაბრად კრებადი f ფუნქციისკენ.

§3-ში შესწავლილია პელის თეორემის ანალოგი მრავალი ცვლადის ფუნქციებისათვის.

ცნობილია, რომ ყოველი ერთჯერადი ტრიგონომეტრიული მწკრივი (იხ. [1]) წარმოადგენს ერთჯერადი ხარისხოვანი მწკრივის ნამდვილ ნაწილს.ამ ფაქტს ადგილი არ აქვს ჯერადი ტრიგონომეტრიული მწკრივისათვის.

ისეთი მრავალი ცვლადის ფუნქციებისათვის რომელთა ჯერადი ტრიგონომეტრიული მწკრივი წარმოადგენს ხარისხოვანი მწკრივის ნამდვილ ნაწინს სამართლიანია პელის თეორემის ასეთი ანალოგი:

ვთქვათ fϵC(T^S) და მის ფურიეს ჯერად ტრიგონომეტრიულ მწკრივს აქვს შემდეგი სახე

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\gamma(n)}(a_n(\mathrm{f})\cos(\sum_{i=1}^{S} n_i\, x_i) + b_n(\mathrm{f})\sin(\sum_{i=1}^{S} n_i x_i)) \quad , \ (6)$$

სადაც $\gamma(n)$ არის n=$(n_1, n_2, \dots . n_s)$ ვექტორის იმ *კოორდინატებისრაოდენობა*, რომლებიც ნულის ტოლია.

თეორემა2 : თქვათ f(x)ϵC(T^S) და მის ფურიეს მწკრივს აქვს

(6)- სახე, თუ (a_n, b_n) ეკუთვნის ერთ-ერთ რომელიმე I_k (k=1,2,3,4) ოქტანტას ,მაშინ მისი ფურიეს მწკრივი იქნება თანაბრად კრებადი.

ჩვენთვის უცნობია სამართლიანი არის თუ არა პელის თეორემის ანალოგი მრავალი ცვლადის ფუნქციებისათვის , მაშინაც კი როდესაც s=2.

§4-ში შესწავლილი არის ორი ცვლადის ფუნქციის მიახლოება კუთხური კერძო ჯამების საშუალებით.

დამტკიცებულია ლემა1:ვთქვათ $Tn_1n_2(x_1, x_2)$ არის რიგის n_1, n_2 რიგის ტრიგონომეტრიული კვაზიპოლინომი. მაშინ

$\check{S}_{n_1n_2}(T_{n_1n_2}, x_1x_2)$= $Tn_1n_2(x_1, x_2)$.

აგრეთვე დამტკიცებულია თეორემა 3:

ვთქვათ fϵC(T^2) . მაშინ,

$$\|f - \check{S}_{n_1n_2}(f)\| = kH_{n_1n_2}(f)lnn_1lnn_2$$

სადაც k-აბსოლუტური მუდმივია.

აქედან გამოდის შემდეგი შედეგები:

შედეგი1. თუ

$$\lim_{n\to\infty} H_{n_1n_2}(f) = \bar{\bar{o}}(\frac{1}{\ln n_1}\frac{1}{\ln n_2})$$

მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}\|f-\check{S}_{n_1n_2}(f)\|_{C(T^2)} = 0 \qquad (3.7)$$

შედეგი2.ვთქვათ$f \in C(T^2)$. მაშინ,

$$\|f-\check{S}_{n_1n_2}(f)\| \le C\omega\left(f,\frac{1}{n_1+1},\frac{1}{n_2+1}\right)\ln(n_1+1)\ln(n_2+1)$$

სადაც C-აბსოლუტური კონსტანტაა.

შედეგი3. თუ

$$\omega\left(f,\frac{1}{n_1},\frac{1}{n_2}\right) = \bar{\bar{o}}(\frac{1}{\ln n_1}.\frac{1}{\ln n_2})$$

მაშინ f ფუნქციის კუთხური კერძო ჯამები თანაბრად კრებადია f ფუნქციისკენ. ე.ი. სრულდება (3.7).

შედეგი4. თუ

$$\omega^{(1)}\left(f,\frac{1}{n_1}\right) = \bar{\bar{o}}(\frac{1}{ln^2 n_1})$$

ან

$$\omega^{(2)}\left(f,\frac{1}{n_2}\right) = \bar{\bar{o}}(\frac{1}{ln^2 n_2})$$

მაშინ

$$\lim_{(n_1,n_2)\Lambda\to\infty}\|f-\check{S}_{n_1n_2}(f)\|_{C(T^2)} = 0$$

ასევე ამ პარაგრაფში შესწავლილია კუთხური კერძო ჯამების აპროქსიმაციული თვისება L_2 ნორმით.

დამტკიცებულია შემდეგი თორემა.

თეორემა4: ვთქვათ $f(x_1,x_2) \in L_2(T^2)$. მაშინ $f(x_1,x_2)$ ფუნქციის საუკეთესო მიახლოება $T_{n_1n_2}(x_1,x_2)$ რიგის კვაზიპოლინომებით მიიღწევა $f(x_1,x_2)$ ფუნქციის n_1,n_2 რიგის კუთხური კერძო ჯამებით. ე.ი.

$H_{m_1m_2}(f)_{L_2(T^2)}=\left\|f-\check{S}_{n_1n_2}\right\|_{L_2(T^2)}$

§1. აღნიშვნები და დამხმარე დებულებები

ტრიგონომეტრიული სისტემა განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$\frac{1}{2}$, cosx, sinx, cos2x, sin2x,……, cosnx, sinnx,…….

L(T), T=[-π, π], აღინიშნება 2π პერიოდულ ლებეგის აზრით ინტეგრებად ფუნქციათა სივრცე.

ვთქვათ, f∈L(T). მისი ფურიეს კოეფიციენტები განისაზღვრება შემდეგი ტოლობებით:

$a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_T f(x)cosnxdx$ $\qquad$ $b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_T f(x)sinnxdx$

f ფუნქციის ტრიგონომეტრიულ ფურიეს მწკრივს აქვს შემდეგი სახე:

$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\,coskx+b_k sinkx)$ $\qquad$ (1)

ფურიეს კოეფიციენტთა ყოფაქცევა მნიშვნელოვან როლს თამაშობს ფურიეს მწკრივის კრებადობის საკითხებში. მაგალითად, ცნობილი არის რ. პელის შემდეგი თეორემა: (იხ. [1] გვ. 277) თეორემა (რ. პელი)- თუ ფუნქცია უწყვეტია და მისი ფურიეს კოეფიციენტები არაუარყოფითია, მაშინ მისი ფურიეს მწკრივი თანაზრად კრებადია ამ ფუნქციისაკენ.

ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ პელის თეორემის ანალოგს მრავალი ცვლადის ფუნქციებისათვის.

ცნობილია, რომ ყოველი ერთჯერადი ტრიგონომეტრიული მწკრივი (იხ. [1]) წარმოადგენს ერთჯერადი ხარისხოვანი მწკრივის ნამდვილ ნაწილს. მართლაც, ადვილი შესამოწმებელია, რომ მწკრივი (1) წარმოადგენს

$\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,e^{inx}$,

მწკრივის ნამდვილ ნაწილს,

სადაც

$c_n=a_n-ib_n$, n=1,2..... $c_0=a_0$.

ამ ფაქტს ადგილი არ აქვს ჯერადი ტრიგონომეტრიული მწკრივისათვის. მაგალითად, განვიხილოთ ორჯერადი ტრიგონომეტრიული ფურიეს მწკრივი, რომელიც განიმარტება შემდეგნაირად:

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\mu_{n_1n_2}\,(a_{n_1n_2}cosn_1x_1cosn_2x_2 +$$

$$b_{n_1n_2}sinn_1x_1cosn_2x_2 + +c_{n_1n_2}cosn_1x_1sinn_2x_2 +$$

$$d_{n_1n_2}sinn_1x_1sinn_2x_2) \qquad (2)$$

სადაც,

$$a_{n_1n_2} = \frac{1}{\pi}\int_T f(x_1,x_2)cosn_1x_1cosn_2x_2dx$$

$$b_{n_1n_2} = \frac{1}{\pi}\int_T f(x_1,x_2)sinn_1x_1cosn_2x_2dx$$

$$c_{n_1n_2} = \frac{1}{\pi}\int_T f(x_1,x_2)cosn_1x_1sinn_2x_2dx$$

$$d_{n_1n_2} = \frac{1}{\pi}\int_T f(x_1,x_2)sinn_1x_1sinn_2x_2dx.$$

ხოლო,

$\mu_{n_1n_2} =¼$ თუ n_1=0 n_2=0

$\mu_{n_1n_2} =½$ თუ n_1 =0 n_2≠0 ან n_2=0 n_1≠0

$\mu_{n_1n_2} = 1$ თუn_1≠0 n_2≠0

ორჯერად ხარისხოვან მწკრივს აქვს შემდეგი სახე:

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} c'_{n_1 n_2}\, e^{i(n_1x_1+n_2x_2)}$$

სადაც,

$$c'_{n_1n_2} = a'_{n_1n_2} - ib'_{n_1n_2}$$

ამ მწკრივის ნამდვილ ნაწილს აქვს შემდეგი სახე:

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} (a'_{n_1n_2}\cos(n_1x_1+n_2x_2) +$$

$$b'_{n_1n_2} sin(n_1x_1+n_2x_2)) =$$

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} (a'_{n_1n_2} cosn_1x_1cosn_2x_2 - a'_{n_1n_2} sinn_1x_1sinn_2x_2 +$$

$$b'_{n_1n_2} sinn_1x_1cosn_2x_2 + b'_{n_1n_2} cosn_1x_1sinn_2x_2) \qquad (3)$$

ცხადია, რომ (2) მწკრივი მხოლოდ მაშინ იქნება ხარისხოვანი მწკრივის ნამდვილი ნაწილი, როდესაც:

$$d_{n_1n_2} = -a_{n_1n_2}$$

$$c_{n_1n_2} = b_{n_1n_2}$$

შემდეგში ჩვენ განვიხილავთ ისეთ ჯერად ტრიგონომეტრიულ მწკრივებს, რომლებიც წარმოადგენენ ჯერადი ხარისხოვანი მწკრივების ნამდვილ ნაწილს, ანუ რომელთაც აქვთ სახე:

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_s=0}^{\infty} (a_{n_1 n_2 \dots n_s} \cos(n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_s x_s) +$$

$$b_{n_1 n_2 \dots n_s} sin(n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_s x_s)) \qquad (4)$$

ვთქვათ R^S არის S განზომილებიანი ევკლიდეს სივრცე. ამ სივრცის წერტილებს ჩვენ აღვნიშნავთ შემდეგნაირად

x=$(x_1, x_2, \dots . x_s)$, y=$(y_1, y_2, \dots . y_s)$

ვთქვათ, N^S არის R^S სივრცის მთელ-კოორდინატებიან წერტილთა სიმრავლე.N^S-ის წერტილებს აღვნიშნავთ:

n=$(n_1, n_2, \dots . n_s)$, m=$(m_1, m_2, \dots . m_s)$

შემდეგში გამოვიყენებთ შემდეგ აღნიშვნას:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_s=0}^{\infty} c_{n_1 n_2 \dots n_s}$$

როგორც ყოველთვის სიმბოლოთი C(T^s), T=[-π, π] აღინიშნება S-ცვლადის f(x)=f$(x_1, x_2 \dots, x_s)$ თითოეული ცვლადის მიმართ2π პერიოდულ უწყვეტ ფუნქციათა სივრცე. აგრეთვე ვისარგებლებ აღნიშვნით :

nx=$\sum_{k=1}^{s} n_k x_k$

ამ აღნიშვნით მწკრივი (4) ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\, cosnx + b_n sinnx)$$

ამ მწკრივის m-ური კერძო ჯამები განიმარტებაშემდეგნაირად:

$S_m(f,x) = \sum_{n=0}^{m}(a_n\, cosnx + b_n sinnx)$,

ხოლო მისი m-ური რიგის ფეიერის საშუალოები კი შემდეგნაირად:

$$\sigma_m(f,x) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{s}(m_i+1)}\sum_{n=0}^{m}\prod_{i=1}^{s}(1-\frac{m_i}{n_i+1})(\cos\left(\sum_{i=1}^{s} n_i x_i\right) +$$

$\sin(\sum_{i=1}^{s} n_i x_i))$. (5)

ვთქვათ fϵC(T^S) და მის ფურიეს ჯერად ტრიგონომეტრიულ მწკრივს აქვს შემდეგი სახე

$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\gamma(n)}(a_n(\mathrm{f})\cos(\sum_{i=1}^{S} n_i\, x_i) + b_n(\mathrm{f})\sin(\sum_{i=1}^{S} n_i x_i))$, (6)

სადაც $\gamma(n)$არის n=($n_1, n_2, \ldots . n_s$) ვექტორის იმ *კოორდინატებისრაოდენობა*, რომლებიც ნულის ტოლია.

შემდეგში ჩვენ გამოგვადგება შემდეგი დებულება და თეორემა (იხ.[2] გვ 456).

დებულება 1: ვთქვა f(x)ϵL(T^S) და |f(x)|≤ M,

მაშინ $|\sigma_m(f,x)|$≤M.

თეორემაA: ვთქვა f(x)ϵC(T^S), მაშინ მისი ფურიეს მწკრივის ფეიერის საშუალოების მიმდევრობა თანაბრად კრებადია.

ვთქვათ, $T_{n_1}^{(1)}(x_1,x_2)$ არის n_1-რიგის ტრიგონომეტრიული პოლინომი x_1 ცვლადის მიმართ, რომლის კოეფიციენტები დამოკიდებულია x_2 ცვლადზე, ხოლო $T_{n_2}^{(2)}(x_1,x_2)$-კი n_2-რიგის

ტრიგონომეტრიული პოლინომი x_2 ცვლადის მიმართ, რომლის კოეფიციენტები დამოკიდებულია x_1-ცვლადზე.

$$T_{n_1}^{(1)}(x_1, x_2) + T_{n_2}^{(2)}(x_1, x_2) = T_{n_1 n_2}(x_1, x_2) \qquad (7)$$

გამოსახულებას (იხ [3]) ეწოდება n_1, n_2 რიგის ტრიგონომეტრიული კვაზიპოლინომი x_1და x_2 ცვლადების მიმართ.

$P_{m_1 m_2}$-ით აღვნიშნოთ სიმრავლე ყველა ტრიგონომეტრიული კვაზიპოლინომებისა რომელთა რიგი არ აღემატება m_1, m_2 -ს.

ე.ი

$P_{m_1 m_2}$={ $T_{n_1 n_2}(x_1, x_2)$:$n_1 \le m_1$, $n_2 \le m_2$}

განვიხილოთ შემდეგი

$$H_{m_1 m_2}(f) = \inf_{T_{n_1 n_2} \in P_{m_1 m_2}} \| f - T_{n_1 n_2} \| \, C(T^2), (8)$$

სიდიდე.

მას ეწოდება f ϵC(T^2), ფუნქციის საუკეთესო მიახლოება ტრიგონომეტრიული პოლინომებით, რომელთა რიგი არ აღემატება m_1, m_2 -ს. (იხ. [3],[4])

ვთქვათ f ϵC(T^2).

$$\omega^{(1)} = \sup_{\substack{(x_1, x_2) \in T^2, \\ |h_1| \le \delta_1}} |f(x_1 + h_1;\ x_2) - f(x_1; x_2)| \qquad (9)$$

სიდიდეს ეწოდება ორი ცვლადის f ფუნქციის უწყვეტობის მოდული x_1-ცვლადით.

ანალოგიურად

$$\omega^{(2)} = \sup_{\substack{(x_1, x_2) \in T^2, \\ |h_2| \le \delta_2}} |f(x_1;\ x_2 + h_2) - f(x_1; x_2)| \qquad (10)$$

სიდიდეს ეწოდება ორი ცვლადის f ფუნქციის უწყვეტობის მოდული x_2-ცვლადით.

ხოლო, $\omega(f, \delta_1, \delta_2) =$

$$\sup_{\substack{(x_1, x_2) \in T^2, \\ |h_2| \le \delta_2 \\ |h_1| \le \delta_1}} |f(x_1 + h_1;\ x_2 + h_2) - f(x_1; x_2 + h_2) + f(x_1 + h_1;\ x_2) - f(x_1; x_2)|$$

. (11)

სიდიდეს ეწოდება ორი ცვლადის f ფუნქციის უწყვეტობის მოდული x_1 და x_2 ცვლადების მიმართ.

შემდეგში ჩვენ გამოვიყენებთ შემდეგ თეორემას (იხ. [3],[4])

თეორემა B. ვთქვათ $f \epsilon C(T^2)$, მაშინ

$$H_{m_1 m_2}(f) \leq k\omega(f, \frac{1}{m_1+1}, \frac{1}{m_2+1})$$

სადაც k-აბსოლუტური მუდმივია.

f ფუნქციის n_1 -რიგის კერძო ჯამი x_1 -ცვლადით განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით

$$S_{n_1}^{(1)}(f, x_1, x_2) = \frac{1}{\pi}\int_T f(x_1+t_1, x_2) D_{n_1}(t_1) dt_1 \qquad (12)$$

სადაც

$$D_m(s) = \frac{\sin(m+\frac{1}{2})s}{2\sin\frac{s}{2}}$$

დირხლეს გულია.

ანალოგიურად f ფუნქციის n_2-რიგის კერძო ჯამი x_2 -ცვლადით განისაზღვრება შემდეგი

$$S_{n_2}^{(2)}(f, x_1, x_2) = \frac{1}{\pi}\int_T f(x_1, x_2+t_2) D_{n_2}(t_2) dt_2 \qquad (13)$$

ტოლობით, ხოლო f ფუნქციის n_1 ,n_2-რიგის კერძო ჯამი x_1 და x_2 -ცვლადით განისაზღვრება შემდეგი

$$S_{n_1 n_2}(f, x_1, x_2) = \frac{1}{\pi^2}\iint_T f(x_1+t_1, x_2+t_2) D_{n_1}(t_1) D_{n_2}(t_2) dt_1 dt_2 \qquad (14)$$

ტოლობით .

f ფუნქციის n_1 ,n_2-რიგის კუთხური კერძო ჯამი განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით

$$\check{S}_{n_1 n_2}(f, x_1, x_2) = S_{n_1}^{(1)}(f, x_1, x_2) + S_{n_2}^{(2)}(f, x_1, x_2) - S_{n_1 n_2}(f, x_1, x_2). \qquad (15)$$

სამართლიანია თეორემა (პარსევალი):

$$\|f\|_{L_2(T^2)} = (\sum_{|m_1|=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\left|c_{m_1m_2}\right|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$f(x_1,x_2)$ ფუნქციის საუკეთესო მიახლოება $L_2(T^2)$ ნორმით განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით

$H_{m_1m_2}(f)_{L_2(T^2)}= {}_{T_{m_1m_2}\in P_{m_1m_2}}^{inf}\left\|f-T_{m_1m_2}\right\|_{L_2(T^2)}$

§2.შენიშვნები პელის თეორემასთან დაკავშირებით

შემოვიღოთ შემდეგი სიმბოლოები:

I_1={ (x,y): x≥ 0, y≥0},

I_2={ (x,y): x≤ 0, y≥0} ,

I_3={ (x,y): x≤ 0, y≤0}

I_4={ (x,y): x≥ 0, y≤0}.

რ.პელის თეორემის თანახმად $f(x)\epsilon C(T)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი თანაბრად კრებადია თუ მისი კოეფიციენტები არაუარყოფითებია ანუ $a_n(f)\geq 0, b_n(f)\geq 0\ , n=0,1,2,\ldots$ ან არადადებითია ანუ $a_n(f)\leq 0, b_n(f)\leq 0, n=0,1,2,\ldots.$

ისმის კითხვა:იქნება თუ არა $f(x)\epsilon C(T)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი თანაბრად კრებადი თუ $a_n(f)\geq 0, b_n(f)\leq 0, n=0,1,2,\ldots$ ან $a_n(f)\leq 0, b_n(f)\geq 0, n=0,1,2,\ldots$

საართლიანია შემდეგი

თეორემა1: ვთქვათ $f(x)\epsilon C(T)$ და $a_n(f), b_n(f)$ ეკუთვნის რომელიმე I_k-ს $k=1,2,3,4$ ოქტანტას. მაშინ f ფუნქციის ფურიეს წკრივი იქნება თანაბრად კრებადი f ფუნქციისკენ.

დამტკიცება:თეორემა დავამტკიცოთ როცა $(a_n(f), b_n(f))\in I_2$.როცა $(a_n(f), b_n(f))\in I_4$თეორემა ანალოგიურად მტკიცდება.

ვთქვათ

$\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n(f)\ cosnx+b_n(f)sinnx)$

არის $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი. მაშინ $f(x)$ ფუნქციის $2n$რიგის ფეიერის საშუალოებს $x=0$ წერტილში ექნება შემდეგი სახე

$$\sigma_{2n}(f,0)=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}S_k(f,0)$$

სადაც

$$S_k(f,0)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{m=0}^{k}a_k(f)$$

რადგან $\big(a_n(f),b_n(f)\big)\in I_2$, ამიტომ

$$a_n(f)\le 0, b_n(f)\ge 0$$

ე.ი

$-S_n(f,0)\ge 0, -\sigma_{2n}(f,0)\ge 0$

ეხლა გამოვიყენოთ შემდეგი უტოლობა(იხ.[1],გვ141)

$|\sigma_m(f,x)|\le \|f\|_{c(T)}$ (1.1)

გვექნება

$$\|f\|\ge|\sigma_{2n}(f,0)|=-\sigma_{2n}(f,0)=-\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}S_k(f,0)$$

$$\ge-\frac{1}{2n+1}\sum_{k=n}^{2n}S_k(f,0)\ge-\frac{n+1}{2n+1}\ge-\frac{1}{2}S_n(f,0)$$

ამგვარადმივიღეთ,რომ$-S_n(f,0)$

მიმდევრობა არაუარყოფითია ზრდადია და ზემოდან შემოსაზღვრული,

ამიტომ არსებობს

$$\lim -S_n(f,0)$$

ანუ მწკრივი არის კრებადი

$\sum_{n=0}^{\infty} -a_n(f)$=$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n(f)|$

აქედან კი იმის გამო, რომ

$$|a_n(f)cosnx| \leq |a_n|$$

მწკრივი

$$\sum a_n(f)cosnx$$

იქნება თანაბრად კრებადი. ვთქვათ მწკრივის ჯამი არის $f_1(x)$. ახლა განვიხილოთ $g(x) = f(x) - f_1(x)$ფუნქცია. ცხადია ,რომ $g(x)$ ფურიეს მწკრივს ექნება შემდეგი სახე

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k(f)sinkx = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(g)sinkx$$

ამგვარად თეორემა1-ის დასამტკიცებლად საკმარისია დავამტკიცოთ ამ მწკრივის თანაბრად კრებადობა.

$g(x)$ უწყეტი ფუნქციისათვის ვისრგებლოთ (1.1) უტოლობიით. გვექნება

$|\sigma_m(g,x)| = \left|\sum_{n=1}^{m}\left(1-\frac{1}{m+1}\right) sinnx\right| \leq \|g\|_{c(T)}$ (1.2)

თუ ამ უტოლობაში დავუშვებთ, რომ $n = 2m$ და $x = \frac{\pi}{4m}$, მივიღებთ

$$\left|\sigma_{2m}\left(g,\frac{\pi}{4m}\right)\right| = \left|\sum_{n=1}^{2m} b_n(g)\left(1-\frac{n}{2m+1}\right) sinn\frac{\pi}{4m}\right| \leq \|g\|_{c(T)}$$

აქედან იმის გამო,რომ $b_n(g) \geq 0$,

$$sinx \geq \frac{2}{\pi}x, \quad x \in (0,\frac{\pi}{2}]$$

უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$0 \leq \sum_{n=1}^{2m} b_n(g)\left(1-\frac{n}{2m+1}\right)\frac{n}{m} \leq 2\|g\|_{c(T)}$$

ბოლო უტოლობიდან იმის გამო, რომ

$1-\frac{n}{2m+1}>\frac{1}{2}$, როცა$1\le n<m$

მივიღებთ

$$0\le\sum_{n=1}^{m}b_n(g)\frac{n}{m}\le 4\|g\|_{c(T)}$$

და მითუმეტეს

$$\left|\sum_{n=1}^{m}nb_n sinnx\right|<4\|g\|_{c(T)}$$

ამ უტოლობიდან და (1.2) უტოლობიდან გვექნება

$$\left|S_p(g,x)\right|=\left|\sum_{n=1}^{p}b_n sinnx\right|\le 5\|g\|_{c(T)}p=1,2,.. \qquad (1.3)$$

ამგვარად მივიღებთ, რომ $g(x)$ ფუნქციის კერძო ჯამების თანაბრად შემოსაზღვრულია.

რადგან $g(x)$ ფუნქციის კოეფიციენტები არაუარყოფითია, ხოლო

$$\sigma_m(g,x)=\sum_{n=1}^{m}b_n\left(1-\frac{n}{m+1}\right)sinnx$$

ამიტომ ფუნქციის

$h_m(x)=g(x)-\sigma_m(g,x)$ (1.4)

კოეფიციენტები აგრეთვე არაუარყოფითი იქნება. ახლა დასახელებული $\varepsilon>0$-ისთვის m ისე შევარჩიოთ, რომ

$$|g(x)-\sigma_m(g,x)|<\varepsilon$$

ეს შესაძლებელია ფეიერის თეორემის გამო(იხ.[1],გვ.139)

ამ ტოლობიდან (1.4) -ის გამოყენებით გვექნება

$$|h_m(x)|<\varepsilon$$

$h_m(x)$ ფუნქციისათვის (1.3) უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$\left|S_p(h_m,x)\right|\le\|h_m\|_{c(T)}\le 5\varepsilon$, $p=m+1,....$ (1.5)

შევნიშნოთ, რომ როცა $p>m$, მაშინ

$$S_p(\sigma_m(g),x) = \sigma_m(g,x)$$

ამიტომ თუ $p > m$ და $q > m$ მაშინ გვექნება

$S_q(g,x) - S_p(g,x) = S_q(h_m,x) - S_p(h_m,x) + S_q(\sigma_m(g),x)$-

$$S_p(\sigma_m(g),x) = S_q(h_m,x) - S_p(h_m,x) + S_q$$

აქედან (1.5) უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ,რომ

$$\left|S_q(g,x) - S_p(g,x)\right| < 10\varepsilon$$

ეს კი ნიშნავს , რომ g ფუნქციის ფურიეს მწკრივი თანაბრად კრებადია.

თეორემა1 დამტკიცებულია.

§3.რ.პელის თეორემის ანალოგი მრავალი ცვლადის ფუნქციებისათვის

თეორემა2 : თქვათ f(x)ϵC(T^S) და მის ფურიეს მწკრივს აქვს

(6)- სახე, თუ (a_n,b_n) ეკუთვნის ერთ-ერთ რომელიმე I_k (k=1,2,3,4) ოქტანტას ,მაშინ მისი ფურიეს მწკრივი იქნება თანაბრად კრებადი.

დამტკიცება:

ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $(a_n,b_n)\ \epsilon I_2$. როცა (a_n,b_n) ეკუთვნის რომელიმე სხვა ოქტანტს, მაშინ თეორემა მტკიცდება ანალოგიურად.

f ფუნქციის 2n რიგის ფეიერის საშუალოებს x=(0,0,..0) წერტილში აქვთ შემდეგი სახე:

$\sigma_{2n}(f,0)$=$\frac{1}{\prod_{i=1}^{s}(2n_i+1)}\sum_{k=0}^{2n} S_k(f,0)$,

სადაც

$S_k(f,0)$= $\sum_{v=0}^{k} a_v\ (f)$.

რადგან $(a_n, b_n)\,\epsilon I_2$ ამიტომ $a_n \leq 0$, $b_n \geq 0$, n=0,1,2… და $S_n(f,0) < 0$, ||f||=M ,

ამიტომ დებულება 1_ ის თანახმად

M≥$-\sigma_{2n}(f,0) \geq$

$-\frac{1}{\prod_{i=1}^{s}(2n_i+1)}\sum_{k_1=n_1}^{2n_1} \dots \sum_{k_s=n_s}^{2n_s}\left(-S_{k_1\dots k_s}(f,0)\right) \geq \frac{\prod_{i=1}^{s}(n_i+1)}{\prod_{i=1}^{s}(2n_i+1)}\left(-S_n(f,0)\right) \geq \frac{1}{2^s}(-S_n(f,0))$

ამგვარად მიმდევრობა -$S_n(f,0)$ დადებითია , ზრდადი და ზემოდან შემოსაზღვრული, ამიტომ არსებობს ზგვარი .

ანუ მწკრივი :

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ (2.1)

იქნება კრებადი და შესაბამისად მწკრივი :

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$ (2.2)

იქნება თანაბრად კრებადი , რადგან $|a_n \cos nx| \leq |a_n|$.

ვთქვათ (2.2) თანაბრად კრებადია f_1(x) ფუნქციისკენ ანუ f_1(x) იქნება უწყვეტი.

ახლა განვიხილოთ უწყვეტი ფუნქცია

g(x)= f(x)-f_1(x),

ამ ფუნქციის ფურიეს მწკრივებს ექნება სახე,

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n sinnx$$

და ამგვარად ჩვენ დასამტკიცებელი დაგვრჩება ამ მწკრივის თანაბრად კრებადობა.

ვთქვათ,$|g(x)| \leq M_1$,

მაშინ დებულება 1-ის თანახმად

$$|\sigma_m(g,x)| =$$

$|\sum_{n_1=1}^{m_1} \dots \sum_{n_s=1}^{m_s} b_{n_1,\dots n_s} \prod_{i=1}^{s}\left(1-\frac{n_i}{m_i+1}\right)\sin(\sum_{i=1}^{s} n_i\, x_i)| < M_1$ (2.3)

ამ უტოლობაში m_i-ის ნაცვლად ჩავწეროთ $2m_i$, i={1,…,s}=$\vec{s}$. შემდეგ, ყოველი i∈ $\vec{s}$-თვის დავუშვათ, რომ

$x_l = \frac{\pi}{4m_l}$ და $x_i = 0$ i≠l.

იმის გამო, რომ განხილულ შემთხვევაში $b_n > 0$ გვექნება

$0 \leq \sum_{n_1=1}^{2m_1} \dots \sum_{n_s=1}^{2m_s} b_{n_1,\dots n_s} \prod_{i=1}^{s} \left(1 - \frac{n_i}{2m_i+1}\right) \sin n_l \frac{\pi}{4m_l} < M_1$.

აქედან $sinx \geq \frac{2}{\pi} x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ:

$$0 \leq \sum_{n_1=1}^{2m_1} \dots \sum_{n_s=1}^{2m_s} b_{n_1,\dots n_s} \prod_{i=1}^{s} \left(1 - \frac{n_i}{2m_i + 1}\right) \frac{n_l}{m_l} < 2M_1$$

როცა 1<$n_i \leq m_i$, i=1,…,s მაშინ

$$1 - \frac{k_i}{2m_l + 1} \geq \frac{1}{2}$$

ამიტომ ყოველი $l \in \bar{s}$გვექნება:

$0 \leq \sum_{n_1=1}^{m_1} \dots \sum_{n_s=1}^{m_s} b_{n_1,\dots n_s} \frac{n_l}{m_{l+1}} < 2^{s+1} M_1$ (2.4)

თუ ავაჯამებთ (2.4)უტოლობებს, როცა l=1,…,S, მივიღებთ

$0 \leq \sum_{n_1=1}^{m_1} \dots \sum_{n_s=1}^{m_s} b_{n_1,\dots n_s} \sum_{l=1}^{s} \frac{n_l}{m_l+1} < S * 2^{s+1} M_1$ (2.5)

მათემატიკური ინდუქციის გამოყენებით ადვილად მტკიცდება რომ, თუ $c_i \in (0,1)$ მაშინ

$1 - \prod_{i=1}^{s} (1 - c_i) \leq \sum_{i=1}^{s} c_i$.

მართლაც , s=1-ისთვის ცხადია 1-$(1 - c_1)$=$c_1 \leq c_1$.

დავუშვათ, რომ s=k-სთვის სამართლიანია, რომ

$1 - \prod_{i=1}^{k} (1 - c_i) \leq \sum_{i=1}^{k} c_i$.

ვაჩვენოთ s=k+1 -ისთვის სამართლიანობა ანუ

$1 - \prod_{i=1}^{k+1} (1 - c_i) \leq \sum_{i=1}^{k+1} c_i$.

$$1-\prod_{i=1}^{k+1}(1-c_i)=1-\prod_{i=1}^{k}(1-c_i)\,(1-c_{k+1})=1-c_{k+1}-$$

$$\prod_{i=1}^{k}(1-c_i)\,(1-c_{k+1})+c_{k+1}=(1-c_{k+1})\left(1-\prod_{i=1}^{k}(1-c_i)\right)+$$

$c_{k+1}\leq\left(1-\prod_{i=1}^{k}(1-c_i)\right)+c_{k+1}\leq\sum_{i=1}^{k}c_i+c_{k+1}=\sum_{i=1}^{k+1}c_i.$

ამით უტოლობა დამტკიცებულია.

ამ უტოლობისა და (2.5)-ის გამოყენებით გვექნება

$0\leq\sum_{n_1=1}^{m_1}\dots\sum_{n_s=1}^{m_s}b_{n_1,\dots n_s}\,(1-\prod_{i=1}^{s}(1-\frac{n_i}{m_i+1}))\leq S*2^{s+1}M_1$.

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$0\leq|\sum_{n_1=1}^{m_1}\dots\sum_{n_s=1}^{m_s}b_{n_1,\dots n_s}\,(1-\prod_{i=1}^{s}\left(1-\frac{n_i}{m_i+1}\right)\sin\left(\sum_{i=1}^{s}n_i\,x_i\right))|\leq S*2^{s+1}M_1$$

ამ უტოლობიდან და (2.3) კი მივიღებთ, რომ

$0\leq|S_m(g,x)|=|\sum_{n_1=1}^{m_1}\dots\sum_{n_s=1}^{m_s}b_{n_1,\dots n_s}\sin(\sum_{i=1}^{s}m_i\,x_i)|\leq S*2^{s+1}M_1$ (2.6)

ამგვარად, მივიღეთ g ფუნქციის კერძო ჯამების შემოსაზღვრულობა ყოველი

m=($m_1\dots m_s$) -ისთვის თეორემა A-ის თანახმად მოიძებნება ისეთი $v=(v_1,\dots v_s)$, რომ დასახელებული $\varepsilon>0$ სათვის

$|g(x)-\sigma_v(g,x)|\leq\varepsilon\qquad x\in T^s\qquad$ (2.7)

რადგან $b_n>0$ ამიტომ (იხ.(9)) განვიხილოთ

$$h_v(x)=g(x)-\sigma_v(g,x)$$

ზემო ნათქვამიდან გამომდინარე h_v ფუნქციის კოეფიციენტებიც იქნება დადებითი. ამიტომ (2.6) უტოლობის თანახმად ყოველი m და $x\in T^s$-სთვის

$s_m(h_v,x)\leq 2^{2s+2}\varepsilon\qquad$ (2.8)

შევნიშნოთ რომ როცა $p_i>v_i$ i=1,…,s მაშინ

$$s_p(\sigma_v(g),x) = \sigma_v(g,x)$$

ამიტომ თუ $q_i > p_i > v_i$ i=1,…,s

$$s_q(g,x) - s_p(g,x) = s_q(h_v,x) - s_p(h_v,x) + s_q(\sigma_v(g),x) -$$

$$s_p(\sigma_v(g),x) = s_q(h_v,x) - s_p(h_v,x)$$

ახლა (2.8)-ის გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$\left|s_q(g,x) - s_p(g,x)\right| < 2^{2s+2}\varepsilon$$

ეს კი ნიშნავს რომ g(x) ფუნქციის ფურიეს მწკრივი თანაბრად კრებადია.

§ 4.ორი ცვლადის ფუნქციათა კუთხური კერძო ჯამების აპროსქიმაციის შესახებ:

ლემა1. ვთქვათ $Tn_1n_2(x_1,x_2)$ არის რიგის n_1,n_2რიგის ტრიგონომეტრიული კვაზიპოლინომი. მაშინ

$\check{S}_{n_1n_2}\left(T_{n_1n_2},x_1x_2\right)$= $Tn_1n_2(x_1,x_2)$ (3.1)

დამტკიცება:

(7) ტოლობის თანახმად

$Tn_1n_2(x_1,x_2)$= $T_{n_1}^{(1)}(x_1,x_2)$+ $T_{n_2}^{(2)}(x_1,x_2)$

რადგან $T_{n_1}^{(1)}(x_1,x_2)$-არის x_1-ცვლადის ტრიგონომეტრიული პოლინომი, რომლის კოეფიციენტები დამოკიდებულია x_2-ცვლადზე ამიტომ (იხ.(12))

$$S_{n_1}^{(1)}\left(T_{n_1}^{(1)},x_1,x_2\right) = \frac{1}{\pi}\int_T T_{n_1}^{(1)}(x_1+t_1,x_2)D_{n_1}(t_1)dt_1 = T_{n_1}^{(1)}(x_1,x_2)$$

ახლა თუ ვისარგებლებთ მიღებული ტოლობით და (13),(14) ტოლობებით მივიღებთ, რომ

ამგვარად ბოლო ორი ტოლობიდან და (15)-დან გვექნება

$$\check{S}_{n_1n_2}\left(T_{n_1}^{(1)},x_1,x_2\right)=S_{n_1}^{(1)}\left(T_{n_1}^{(1)},x_1,x_2\right)+S_{n_2}^{(2)}\left(T_{n_1}^{(1)},x_1,x_2\right)-$$

$S_{n_1n_2}\left(T_{n_1}^{(1)},x_1,x_2\right)$=$T_{n_1}^{(1)}(x_1,x_2)$+$S_{n_2}^{(2)}\left(T_{n_1}^{(1)},x_1,x_2\right)$-

$S_{n_2}^{(2)}\left(T_{n_1}^{(1)},x_1,x_2\right)=T_{n_1}^{(1)}(x_1,x_2).$

ანალოგიურად მტკიცდება,რომ

$\check{S}_{n_1n_2}\left(T_{n_2}^{(2)},x_1,x_2\right)=T_{n_2}^{(2)}(x_1,x_2)$ (3.2)

ბოლო ორი ტოლობიდან და (7)-დან გამომდინარეობს ლემა1-ის სამართლიანობა.

თეორემა 3. ვთქვათ f ϵC(T^2) .მაშინ,

$\left\|f-\check{S}_{n_1n_2}(f)\right\|=kH_{n_1n_2}(f)lnn_1lnn_2$ (3.3)

სადაც k-აბსოლუტური მუდმივია.

დამტკიცება:

რადგან

$$\frac{1}{\pi}\int_T D_m(s)ds=1$$

ამიტომ (12) და (13) ტოლობებს შეიძლება მიეცეს შემდეგი სახე

$$S_{n_1}^{(1)}(f,x_1,x_2)=\frac{1}{\pi^2}\iint_T f(x_1+t_1,x_2)D_{n_1}(t_1)D_{n_2}(t_2)dt_1dt_2$$

$$S_{n_2}^{(2)}(f,x_1,x_2)=\frac{1}{\pi^2}\iint_T f(x_1,x_2+t_2)D_{n_1}(t_1)D_{n_2}(t_2)dt_1dt_2$$

ამ ტოლობებისა და (14) ტოლობის გათვალისწინებით (15) ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\check{S}_{n_1n_2}(f,x_1,x_2)=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_T[f(x_1+t_1,x_2+t_2)+f(x_1+t_1,x_2)$$
$$+f(x_1,x_2+t_2)]D_{n_1}(t_1)D_{n_2}(t_2)dt_1dt_2$$

ამ უკანასკნელი ტოლობიდან გვექნება

$$f(x_1,x_2)-\check{S}_{n_1n_2}(f,x_1,x_2)$$
$$=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_T[f(x_1+t_1,x_2+t_2)+f(x_1+t_1,x_2)$$
$$+f(x_1,x_2+t_2)-f(x_1,x_2)]D_{n_1}(t_1)D_{n_2}(t_2)dt_1dt_2$$

ახლა თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_T|D_m(s)|ds\leq c\ lnm$$

$\left\|\check{S}_{n_1n_2}(f)\right\|c_{(T^2)}\leq k\|f\|c_{(T_2)}lnn_1lnn_2$(3.4)

$\left\|f-\check{S}_{n_1n_2}(f)\right\|c_{(T^2)}\leq k\|f\|c_{(T_2)}lnn_1lnn_2$(3.5)

ტოლობა (3.2)-ის გამოყენებით ნებისმიერი $Tn_1n_2(x_1,x_2)$

კვაზიპოლინომისთვის მივიღებთ

$$\left|f(x_1,x_2)-\check{S}_{n_1n_2}(f,x_1,x_2)\right|$$
$$=\left|f(x_1,x_2)-Tn_1n_2(x_1,x_2)-[\check{S}_{n_1n_2}(f,x_1,x_2)\right.$$
$$\left.-Tn_1n_2(x_1,x_2)]\right|$$
$$\leq\ |f(x_1,x_2)-Tn_1n_2(x_1,x_2)|$$
$$+\left|\check{S}_{n_1n_2}(f,x_1,x_2)-Tn_1n_2(x_1,x_2)\right|$$

აქედან (3.4) და (3.5) ტოლობების გამოყენებით გვექნება

$$\left\|f-\check{S}_{n_1n_2}(f)\right\|c_{(T^2)} \le k\left\|f-T_{n_1n_2}\right\|c_{(T_2)} lnn_1 lnn_2$$

აქედან კი $Tn_1n_2(x_1,x_2)$ კვაზიპოლინომიეს ნებისმიერობის გამო ვღებულობთ (3.3) ტოლობის სამართლიანობას.

თეორემა 3 -დან გამომდინარეობს შემდეგი:

შედეგი1. თუ

$\lim\limits_{n\to\infty} H_{n_1n_2}(f)=\bar{\bar{o}}(\frac{1}{\ln n_1}\frac{1}{\ln n_2})$(3.6)

მაშინ

$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|f-\check{S}_{n_1n_2}(f)\right\|c_{(T^2)}=0$(3.7)

თეორემაB დან და თეორემა 3 -დან გაომდინარეობს შემდეგი:

შედეგი2.ვთქვათ$f\in C(T^2)$. მაშინ,

$\left\|f-\check{S}_{n_1n_2}(f)\right\| \le C\omega\left(f,\frac{1}{n_1+1},\frac{1}{n_2+1}\right)\ln(n_1+1)\ln(n_2+1)$(3.8)

სადაც C-აბსოლუტური კონსტანტაა.

შედეგი3. თუ

$$\omega\left(f,\frac{1}{n_1},\frac{1}{n_2}\right)=\bar{\bar{o}}(\frac{1}{\ln n_1}.\frac{1}{\ln n_2})$$

მაშინ fფუნქციის კუთხური კერძო ჯამები თანაბრად კრებადია fფუნქციისკენ. ე.ი. სრულდება (3.7).

შედეგი4. თუ

$\omega^{(1)}\left(f,\frac{1}{n_1}\right)=\bar{\bar{o}}(\frac{1}{ln^2n_1})$ (3.9)

ან

$\omega^{(2)}\left(f,\frac{1}{n_2}\right)=\bar{\bar{o}}(\frac{1}{ln^2 n_2})$(3.10)

მაშინ

$$\lim_{(n_1,n_2)\lambda\to\infty}\left\|f-\check{S}_{n_1n_2}(f)\right\|c_{(T^2)}=0 \qquad (3.11)$$

მართლაც, ვთქვათ სრულდება (3.9) მაშინ როცა

$\frac{1}{\lambda}<\frac{n_1}{n_2}<\lambda$(3.12)

$$\omega\left(f,\frac{1}{n_1},\frac{1}{n_2}\right)\le\omega\left(f,\frac{1}{n_1},\frac{\lambda}{n_2}\right)\le(\lambda+1)\omega\left(f,\frac{1}{n_1},\frac{1}{n_1}\right)$$

აქედან იმის გამო, რომ

$$\omega\left(f,\frac{1}{n_1},\frac{1}{n_1}\right)\le\omega^{(1)}\left(f,\frac{1}{n_1}\right)$$

მივიღებთ,რომ

$$\omega\left(f,\frac{1}{n_1},\frac{1}{n_2}\right)\le(\lambda+1)\omega^{(1)}\left(f,\frac{1}{n_1}\right)=\bar{\bar{o}}(\frac{1}{ln^2 n_1})$$

ბოლო უტოლობიდან და (3.8) გვექნება , რომ როცა სრულდება (3.12) მაშინ

$\left\|f-\check{S}_{n_1n_2}(f)\right\|c_{(T^2)}\le\bar{\bar{o}}(\frac{1}{ln^2 n_1})^{*}\, lnn_1 ln\lambda n_2$

აქედან კი გამომდინარეობს (3.11)-ის სამართლიანობა . ანალოგიურად მტკიცდება ის შემთხვევა როცა სრულდება (3.10).

ვთქვათ$f(x_1,x_2)\in L_2(T^2)$ და მის ფურიეს ორჯერად ტრიგონომეტრიულ მწკრივს კომპლექსურ ფორმას აქვს შემდეგი სახე :

$f(x_1,x_2)\sim\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}c_{n_1n_2}(f)\,e^{i(n_1x_1+n_2x_2)}=$

$\sum_{|m_1|=0}^{\infty}\sum_{|m_2|=0}^{\infty}c_{m_1m_2}(f)\,e^{i(m_1x_1+m_2x_2)}$ (3.13)

სადაც $c_{n_1n_2}(f)$კოეფიციენტები განისაზღვრებიან შემდეგი ტოლობებით

$$c_{n_1 n_2}(f) = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{T^2} f(x_1, x_2) e^{-i(n_1 x_1 + n_2 x_2)}\, dx_1 dx_2$$

განვიხილოთ (4.1) მწკრივის n_1, n_2 -რიგის კუთხური კერძო ჯამები. მათ ფურიეს მწკრივს აქვს შემდგი სახე

$\check{S}_{n_1 n_2}(f, x_1, x_2) \sim \sum_{|m_1| \le n_1} \sum_{|m_2|=0}^{\infty} c_{m_1 m_2}(f)\, e^{i(n_1 x_1 + n_2 x_2)}$ +
$\sum_{|m_1| \le n_2} \sum_{|m_1|=n_1+1}^{\infty} -c_{m_1 m_2}(f)\, e^{i(n_1 x_1 + n_2 x_2)}$ (3.14)

(3.13) და (3.14) -დან გამომდინარეობს, რომ

$f(x_1, x_2) - S_{n_1 n_2}(f, x_1, x_2)$-ის ფურიეს მწკრივს ექნება შემდეგი სახე

$$f(x_1, x_2) - S_{n_1 n_2}(f, x_1, x_2) \sim$$

$$\sum_{|m_1|=n_1+1}^{\infty} \sum_{|m_2|=n_2+1}^{\infty} c_{m_1 m_2}(f)\, e^{i(m_1 x_1 + m_2 x_2)} \qquad (3.15)$$

განვიხილოთ n_1, n_2 -რიგის ტრიგონომეტრიული კვაზიპოლინომი $T_{n_1 n_2}(x_1, x_2)$. ვთქვათ მის ფურიეს მწკრივს აქვს შემდეგი სახე

$$T_{n_1 n_2}(x_1, x_2) \sim \sum_{|m_1| \le n_1} \sum_{|m_2|=0}^{\infty} A_{m_1 m_2}\, e^{i(m_1 x_1 + m_2 x_2)}$$
$$+ \sum_{|m_1|=n_1+1}^{\infty} \sum_{|m_2| \le n_2}^{\infty} A_{m_1 m_2}(f)\, e^{i(m_1 x_1 + m_2 x_2)} \qquad (3.16)$$

თეორემა4: ვთქვათ $f(x_1, x_2) \in L_2(T^2)$. მაშინ $f(x_1, x_2)$ ფუნქციის საუკეთესო მიახლოება $T_{n_1 n_2}(x_1, x_2)$ რიგის კვაზიპოლინომებით მიიღწევა $f(x_1, x_2)$ ფუნქციის n_1, n_2 რიგის კუთხური კერძო ჯამებით. ე.ი.

$H_{m_1 m_2}(f)_{L_2(T^2)} = \left\| f - \check{S}_{n_1 n_2} \right\|_{L_2(T^2)}$ (3.17)

დამტკიცება: (3.13) და (3.16) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $f(x_1, x_2) - T_{n_1 n_2}(x_1, x_2)$-ის ფურიეს მწკრივს ექნება შემდეგი სახე

$$f(x_1, x_2) - T_{n_1 n_2}(x_1, x_2) \sim$$

$\sum_{|m_1| \le n_1} \sum_{|m_2|=0}^{\infty} (c_{m_1 m_2}(f) - A_{m_1 m_2}) e^{i(m_1 x_1 + m_2 x_2)}$ +

$$\sum_{|m_1|=n_1+1}^{\infty} \sum_{|m_2|\le n_2} (c_{m_1m_2}(f) - A_{m_1m_2})\, e^{i(m_1x_1+m_2x_2)}$$

$+ \sum_{|m_1|=n_1+1}^{\infty} \sum_{|m_2|=n_2+1}^{\infty} (c_{m_1m_2}(f) - A_{m_1m_2})\, e^{i(m_1x_1+m_2x_2)}$

ამიტომ

$\|f - T_{n_1n_2}\|_{L_2(T^2)}^2 = \sum_{|m_1|=n_1+1}^{\infty} \sum_{m_2=n_2+1}^{\infty} |c_{m_1m_2}(f)|^2$

$+\sum_{|m_1|\le n_1} \sum_{|m_2|=0}^{\infty} |c_{m_1m_2}(f) - A_{m_1m_2}|^2 +$
$\sum_{|m_1|=n_1+1}^{\infty} \sum_{|m_2|\le n_2} |c_{m_1m_2}(f) - A_{m_1m_2}|^2$

ცხადია ამ ტოლობის მარცხენა ნაწილში მინიმუმი მიიღწევა როცა

$A_{m_1m_2} = c_{m_1m_2}(f)$ როცა $|m_1| \le n_1\,, |m_2| \ge 0$

$A_{m_1m_2} = c_{m_1m_2}(f)$ როცა $|m_1| = n_1 + 1 |m_2| \le n_2$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\min_{T_{m_1m_2}\in P_{m_1m_2}} \|f - T_{n_1n_2}\|_{L_2(T^2)} = (\sum_{|m_1|\ge n_1+1} \sum_{|m_2|\ge n_2+1} |c_{m_1m_2}(f)|^2)^{\frac{1}{2}}$$

მეორე მხრივ (3.15) ტოლობიდან გამომდინარეობს,რომ

$\|f - \check{S}_{n_1n_2}\|_{L_2(T^2)} = \sum_{|m_1|=n_1+1}^{\infty} \sum_{|m_2|=n_2+1}^{\infty} |c_{m_1m_2}(f)|^2)^{\frac{1}{2}}$

ბოლო ორი ტოლობიდან კი ვღებულობთ, რომ სამართლიანია ტოლობა (3.17).

თეორემა დამტკიცებულია.

ლიტერატურა:

1. Н. К. Вари , Тртгонометрические ряды, изд. Ф.М.Д. ,М.1961
2. А.Зигмунд, Тртгонометрические ряды, т.2, изд. “Мир”, 1966
3. Брудный ю. А Приближеение функсий n-переменных квазиполиномамы. Изв. АН СССР, 1970, т.34 , 555-583
4. Потапов М.К. Исследование некоторых классов функций при помощи приближения “углом”. Тр. Матем . ин-та В.А. Стеклова 1972,т .117 ,256-291.