ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის

სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა

ფაკულტეტი

მიმართულება: მათემატიკა

სამაგისტრო ნაშრომი თემაზე

უოლშ-ფურიეს მწკრივების ჩეზაროს უარყოფითი რიგის საშუალოების შეჯამებადობა

მარიამ თოთლაძე

ხელმძღვანელი

პროფესორი: უშანგი გოგინავა

თბილისი

2017 წ.

ანოტაცია

ცნობილია, რომ არსებობს უწყვეტი ფუნქცია, რომლის ფურიეს მწკრივი უოლშის სისტემის მიმართ განშლადია წერტილში, ე.ი. უწყვეტ ფუნქციათა კლასი არ უზრუნველყოფს ფურიე-უოლშის მწკრივების თანაბარ კრებადობას. გვჭირდება დამატებითი პირობები, იმისათვის რომ ამ პირობებმა უწყვეტ ფუნქციათა კლასიდან გამოყოს ქვეკლასი, რომელიც უზრუნველყოფს ფურიე-უოლშის მწკრივების თანაბარ კრებადობას. ქვეკლასების დახასიათების ორი გზა არსებობს:

1. უწყვეტობის მოდულის ტერმინებში
2. ფუნქციათა სასრული ოსცილაციის პირობებში

ორივე მიმართულებას საკმაოდ დიდი ისტორია აქვს. ამ მიმართულებით გამოვყოფთ ფუნდამენტურ შრომებს შემდეგი ავტორებით: ჟორდანი, ვინერი, იუნგი, მარცინკევიჩი, ჭანტურია, კიტი და იონედა, ახობაძე და სხვანი. კიტმა და იონედამ შემოიღეს განზოგადებული ვინერის კლასები და ამ კლასების ფუნქციებისთის დაადგინეს უწყვეტობის მოდულისათვის საკმარისი პირობა, რომელიც უზრუნველყოფდა ფურიე-უოლშის მწკრივებისათვის თანაბარ კრებადობას.ამ პირობების გარკვეული აზრით გაუძლიერებადობა მიღებული იყო გოგინავას მიერ და ასევე მის მიერ ანალოგიური თეორემები იყო დამტკიცებული ფურიე-უოლშის მწკრივებისათვის.

რაც შეეხება, ჩეზაროს უარყოფითი რიგის შეჯამებადობის საკითხებს, ცნობილია, რომ თუ $f \in V_{p,}\ p < \frac{`1}{\alpha}$, მაშინ $C_{-\alpha} -$ საშუალოები თანაბრად კრებადია ყოველი უწყვეტი ფუნქციისთვის, რომელიც ეკუთვნის V_p კლასს, ხოლო როცა $p = \frac{1}{\alpha}$, მაშინ ანალოგიურ დებულებას საზოგადოდ ადგილი არ აქვს. ჩვენ ვიხილავთ კიტასა და იონედას მიერ განზოგადებულ ვინერის კლასებს, როცა $P(n)$ მაჩვენებელი მიისწრაფის $\frac{1}{\alpha}$-სკენ და ამ კლასებისთვის დადგენილია უწყვეტობის მოდულის ტერმინებში საკმარისი პირობა, რომელიც უზრუნველყოფს ფურიე-უოლშის მწკრივების ჩეზაროს უარყოფითი რიგის საშუალოების f ფუნქციისაკენ კრებადობას.

სარჩევი

შესავალი

ამ ნაშრომში გამოკვლეულია უოლშ-ფურიეს მწკრივების ჩეზაროს უარყოფითი რიგის საშუალოების კრებადობა განზოგადებული შემოსაზღვრული ოსცილაციის ფუნქციათა კლასებისთვის.

ვთქვათ $r_0(x)$ არის ფუნქცია, განსაზღვრული [0,1) ინტერვალზე და აქვს შემდეგი სახე:

$$r_0(x)=\begin{cases} 1, \ \text{თუ}\ x \in \left[0,\frac{1}{2}\right) \\ -1, \text{თუ}\ x \in \left[\frac{1}{2},1\right) \end{cases}, \quad r_0(x+1)=r_0(x).$$

რადემახარის სისტემა განსაზღვრულია შემდეგი სახით:

$$r_n(x)=r_0(2^n x) \quad n\geq 1\ x\in[0,1).$$

ვთქვათ $\omega_0, \omega_1, \ldots$ წარმოადგენს უოლშის ფუნქციებათა მიმდევროვრობას. ე.ი. $\omega_0=1$

და თუ $k=2^{n1}+\ldots+2^{ns}$ არის დადებითი მთელი რიცხვი, $n_1>n_2>\cdots>n_s$ მაშინ

$$\omega_k(x)=r_{n_1}\times\ldots\times r_{n_s}(x)$$

რადემახარის ფუნქციათა ნამრავლის გამოყენებით უოლშის ფუნქციათა განსაზღვრის იდეა პირველად გამოიყენა პოლიმ[17].

უოლშ-დირიხლეს გული განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} w_k(x)$$

გავიხსენოთ, რომ

(1) $$D_{2^n}(x) = \begin{cases} 2^n, \text{თუ } x \in \left[0, \frac{1}{2^n}\right) \\ 0, \quad \text{თუ } x \in \left[\frac{1}{2^n}, 1\right) \end{cases}$$

ასევე, ცნობილია დირიხლეს გულის ქვემოდან და ზემოდან შემოსაზღვრულობა:

ვთქვათ, $x \in (0,1)$, მაშინ სამართლიანია შემდეგი:

$$|D_n(x)| \leq min\left\{n, \frac{2}{x}\right\}$$

დამტკიცება:ვთქვათ $2^{-j} \leq x \leq 2^{-j+1,} \, j = 0,1, \dots N, 2^n \leq n \leq 2^{N+1}$. მაშინ

$$|D_n(x)| = \left|\sum_{k=0}^{j-1} n_k w_{2^k}(x) D_{2^k}(x)\right| \leq \sum_{k=0}^{j-1} 2^k < 2^j$$

მეორეს მხრივ, როცა $x \in (0, 2^{-N})$ გვაქვს

$$|D_n(x)| \leq n$$

თეორემა დამტკიცებულია.

დირიხლეს გულის ქვემოდან შემოსაზღვრულობის პრინციპი:

ვთქვათ,

$$n = \sum_{k=0}^{m} 2^{2k}, \;\; 2^{-2m-1} \leq x < 1$$

მაშინ სამართლიანია შემდეგი:

$$|D_n(x)| \geq \frac{1}{4x}$$

დამტკიცება: ვთქვათ $2^{-j} \leq x < 2^{-j+1}$, მაშინ ადვილია დასანახია, რომ

$$|D_n(x)| = \left|\sum_{k=0}^{j-2} n_k 2^k - n_{j-1} 2^{j-1}\right|$$

რადგანაც $n_{j-1} + n_j = 1$ ამიტომ

$$|D_n(x)| = \left|\sum_{k=0}^{j-2} n_k 2^k - n_{j-1} 2^{j-1}\right| \geq 2^{j-2} \geq \frac{1}{4x}$$

ვიგულისხმოთ, რომ f არის ლებეგის აზრით ინტეგრებადი ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია $[0,1)$ ინტერვალზე და არის 1-პერიოდული. მაშინ უოლშ-ფურიეს მწკრივები განსაზღვრული იქნება შემდეგნაირად:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) w_k(x)$$

სადაც,

$$\hat{f}(k) = \int_0^1 f(t) w_k(t) dt$$

არის f ფუნქციის უოლშ-ფურიეს მწკრივის k-ური კოეფიციენტი.

$S_n(f, x)$-ით აღვნიშნოთ f ფუნქციის უოლშ-ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამი.

$$S_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n-1} f^\wedge(k) w_k(x)$$

ცხადია, რომ

$$S_n(f,x) = \int_0^1 f(x+t) D_n(t)dt$$

უოლშ-ფურიეს მწკრივის ჩეზაროს (C,α) საშუალოები განსაზღვრულია შემდეგნაირად :

$$\sigma_n^\alpha(f,x) = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^\alpha f^\wedge(k) w_k(x)$$

სადაც

$$A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}{n!} \quad \alpha \neq -1,-2,\dots$$

(2) $$A_n^\alpha \sim n^\alpha$$

უოლშ-ფურიეს მწკრივის ჩეზაროს საშუალოები ასევე შეგვიძლია განვსაზღვროთ ინტეგრალური ფორმით:

$$\sigma_n^\alpha(f;x) = \int_0^1 f(x+t) K_n^\alpha(t)dt$$

სადაც

$$K_n^\alpha(t) = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{v=0}^{n} A_{n-v}^\alpha \psi_v(t)$$

ვთქვათ $C([0,1])$ აღნიშნავს f უწყვეტ ფუნქციათა კლასს, პერიოდით 1. თუ $f \in C([0,1])$,

მაშინ ფუნქციას

$$w(\delta,f) = sup\{|f(x') - f(x'')| : |x' - x''| \leq \delta, x', x'' \in [0,1]\}$$

ეწოდება f ფუნქციის უწყვეტობის მოდული.

რაიმე $f \in C([0,1])$ ფუნქციის უწყვეტობის მოდულს აქვს შემდეგი თვისებები:

1) $w(0)=0$
2) $w(\delta)$ *არაკლებადია*
3) $w(\delta)$*უწყვეტია* $[0,1]$ *ინტერვალზე*
4) $w(\delta_1+\delta_2) \leq w(\delta_1)+w(\delta_2), 0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \delta_1+\delta_2 \leq 1.$

$w(\delta)$ ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია $[0,1]$ ინტერვალზე და აქვს (1)-(4) თვისებები, ეწოდება უწყვეტობის მოდული. როცა უწყვეტობის მოდული $w(\delta)$ მოცემულია, მაშინ H^wაღინიშნება $f \ \in C([0,1])$ ფუნქციათა კლასი, რომლისთვისაც

$$w(\delta,f)=O\big(w(\delta)\big), \qquad \text{როცა } \delta \to 0$$

$C_\omega([0,1])$ არის $f \in [0,1) \to R$ ფუნქციების სიმრავლე , რომლებიც არიან თანაბრად უწყვეტნი [0,1)- ის ორობითი ტოპოლოგიიდან R-ის ჩვეულებრივ ტოპოლოგიაში, ან მოკლედ რომ ვთქვათ:W- უწყვეტები.

ვთქვათ f განსაზღვრულია [0,1)-ზე. ახლა განვსაზღვროთ ორობითი უწვეტობის მოდული:

$$w(\delta,f)=sup_{0\leq h\leq \delta} sup_x|f(x\oplus h)-f(x)|$$

სადაც $\oplus$ აღნიშნავს ორობით ჯამს, რომელიც განიმარტება შემდეგნაირად:

ნებისმიერი $n,m \in N$

$$n \oplus m := \sum_{k=0}^{\infty} |n_k - m_k| 2^k \,, n_k, m_k = \overline{0,1}$$

(იხ.[12], [19]).

უოლშ-ფურიეს მწკრივების ჩეზაროს უარყოფითი რიგის საშუალოების კრებადობა შესწავლილია [4],[7],[10],[9],[8],[17],[18],[19]

თევზაძემ [20] შეისწავლა უოლშ-ფურიეს მწკრივების უარყოფითი რიგის ჩეზაროს საშუალოების კრებადობა. კერძოდ, $f \in C_W([0,1])$ ფუნქციის უწყვეტობის მოდულისა და ფუნქციის ვარიაციის

ტერმინებში, მან გამოიყვანა კრიტერიუმი ფურიეს მწკრივების ჩეზაროს უარყოფითი რიგის საშუალოების თანაბარი კრებადობისთვის უოლშის სისტემის მიმართ.

[9]-ში გოგინავამ გამოიკვლია ამოცანა $f \in L_p$ ის მიახლოების შესახებ ფუნქციის უოლშ-ფურიეს მწკრივების ჩეზაროს უარყოფითი რიგის საშუალოებიდან $L_p -$ მეტრიკულ სივრცეში, $p \in [1, \infty)$

იგივე შედეგი იყო მიღებული უოლშ-კაჩმაჟის სისტემისთვის ნაგისა [16] და გატის მიერ, ნაგი[6].

[24]-ში (ნაწილი 1, თავი 4) ჟიჟიაშვილმა გამოიკვლია ქცევა ტრიგონომეტრიული მწკრივების ჩეზაროს უარყოფითი რიგის საშუალოებისა დეტალურად.

ჟორდანის მეირ იქნა წარმოდგენილი ფუნქციის შემოსაზღვრული ვარიაციის ცნება. ამ ცნების განზოგადებით ვინერმა[22] წარმოადგინა V_P ფუნქციათა კლასი. უინიგმა [23] წარმოადგინა ფუნქციები შემოსაზღვრული Φ-ვარიაციით. ვატერმანმა[21] შეისწავლა ფუნქციები შემოსაზღვრული $\Lambda -$ვარიაციით. ჭანტურიამ [3] განსაზღვრა ფუნქციის ვარიაციის მოდული.

1990 წელს , კიტამ და იონედამ [15] წარმოადგინეს განზოგადებული ვინერის კლასის ცნება $BV(p(n) \uparrow p)$. $BV(p(n) \uparrow p)$ კლასის განზოგადებით, ახობაძემ [1,2] განიხილა ფუნქციათა შემდეგი კლასები: $BV(p(n) \uparrow p, \varphi)$ და $B\Lambda(\mathrm{p(n)} \uparrow p), \varphi)$.

განსაზღვრება 1. ვიტყვით, რომ ფუნქცია ეკუთვნის $BV(p(n) \uparrow \infty)$ კლასს, თუ სრულდება შემდეგი

$$V(f; p(n) \uparrow p) =$$

$$sup_{n\geq 1} sup_{\Delta} \left\{ \left(\sum_{k=0}^{2^n-1} |f(x_k) - f(x'_k)|^{p(n)} \right)^{1/p(n)} : p(\Delta) \geq \frac{1}{2^n} \right\} < +\infty$$

$$სადაც \ p(\Delta) = inf_k |x_k - x'_k|$$

განსაზღვრება 2. [11] ვთქვათ $1 \leq p(n) \uparrow p$, როცა $n \to \infty$ სადაც $1 \leq p \leq \infty$. ვიტყვით, რომ ფუნქცია ეკუთვნის $BO(p(n) \uparrow p)$ კლასს, თუ

$$O(f; p(n) \uparrow p) \coloneqq sup_n \left\{ \sum_{l=0}^{2^n-1} sup_{t,u \in [l2^{-n} * (l+1)2^{-n}]} |f(t) - f(u)|^{p(n)} \right\}^{\frac{1}{p(n)}} < \infty$$

როცა $p(n)=p$ ყოველი n-სთვის , $BO(p(n)\uparrow p)$ემთხვევა p-შემოსაზღვრული ოსცილაციის BF_p კლასს [19].

შემოსაზღვრული ოსცილაციის მქონე ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტების შეფასება ვილენკინის სისტემის მიმართ შესწავლილი იყო გატისა და ტოლედოს მიერ [5].

ლემა 1. (Onnewer) ვთქვათ $f\in C_w([0,1])$ და

$$\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k}\left|f\left(x\oplus\frac{2k}{2^{n+1}}\right)-f\left(x\oplus\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)\right|\to 0 \text{ როცა } n\to\infty$$

თანაბრად x-ის მიმართ. მაშინ f ფუნქციის ფურიე-უოლშის მწკრივები თანაბრად კრებადია ([0,1])-ზე.

თეორემა 1. ვთქვათ f არის ფუნქცია $BV(p(n)\uparrow\infty)$ კლასიდან და

$$w\left(\frac{1}{2^n},f\right)=o\left(\frac{1}{p(n+1)log_2p(n+1)}\right),\quad n\to\infty$$

მაშინ f ფუნქციის უოლშ-ფურიეს მწკრივი თანაბრად კრებადია [0,1] ინტერვალზე.

დამტკიცება: ლემა 1.-ზე დაყრდნობით, საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ

$$\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k}\left|f\left(x\oplus\frac{2k}{2^{n+1}}\right)-f\left(x\oplus\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)\right|\to 0$$

თანაბრად x-ის მიმართ, როცა n→ ∞.

აბელის გარდაქმნით გვექნება:

(3)
$$\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k}\left|f\left(x\oplus\frac{2k}{2^{n+1}}\right)-f\left(x\oplus\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)\right|$$

$$=\sum_{k=1}^{2^n-2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\sum_{l=1}^{k}\left|f\left(x\oplus\frac{2l}{2^{n+1}}\right)-f\left(x\oplus\frac{2l+1}{2^{n+1}}\right)\right|$$

$$+\frac{1}{2^n-1}\sum_{k=1}^{2^n-1}\left|f\left(x\oplus\frac{2k}{2^{n+1}}\right)-f\left(x\oplus\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)\right|=I+II$$

ცხადია რომ,

(4) $$II=O\left(w\left(\frac{1}{2^n},f\right)\right)=o(1),\quad n\to\infty$$

განვსაზღვროთ $m_0(n)=4^{p(n+1)log_2p(n+1)}$, ჰელდერის უტოლობით და თეორემის პირობით გვექნება

(5) $$I\le\sum_{k=1}^{2^n-2}\frac{1}{k^2}\sum_{l=1}^{k}\left|f\left(x\oplus\frac{2l}{2^{n+1}}\right)-f\left(x\oplus\frac{2l+1}{2^{n+1}}\right)\right|$$

$$=\sum_{k=1}^{m_0(n)}\frac{1}{k^2}\sum_{l=1}^{k}\left|f\left(x\oplus\frac{2l}{2^{n+1}}\right)-f\left(x\oplus\frac{2l+1}{2^{n+1}}\right)\right|$$

$$+\sum_{k=m_0(n)+1}^{2^n-2}\frac{1}{k^2}\sum_{l=1}^{k}\left|f\left(x\oplus\frac{2l}{2^{n+1}}\right)-f\left(x\oplus\frac{2l+1}{2^{n+1}}\right)\right|$$

$$\le c\left\{w\left(\frac{1}{2^n},f\right)log_2\,m_0(n)+\sum_{k=m_0(n)+1}^{2^n-2}\frac{1}{k^2}\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{l=1}^{k}\left|f\left(x\oplus\frac{2l}{2^{n+1}}\right)-f\left(x\oplus\frac{2l+1}{2^{n+1}}\right)\right|^{p(n+1)}\right)^{1/p(n+1)}k^{1-1/p(n+1)}\right\}$$

$$\le c\left\{w\left(\frac{1}{2^n},f\right)log_2m_0(n)+\sum_{k=m_0(n)+1}^{2^n-2}\frac{V(f;p(n)\uparrow\infty)}{k^{1+1/p(n+1)}}\right\}$$

$$\le c\left\{w\left(\frac{1}{2^n},f\right)log_2m_0(n)+\sum_{k=m_0(n)+1}^{2^n-2}\frac{1}{k^{1+1/p(n+1)}}\right\}$$

$$\le c\left\{w\left(\frac{1}{2^n},f\right)log_2m_0(n)+p(n+1)\left(\frac{1}{m_0(n)}\right)^{1/p(n+1)}\right\}$$

$$\leq c\left\{w\left(\frac{1}{2^n},f\right)p(n+1)log_2p(n+1)+\frac{1}{p(n+1)}\right\}=o(1)\,,n\to\infty$$

(3)-(5) დან მივიღებთ თეორემა 1-ის დამტკიცებას. □

ლემა 2. (თევზაძე). D_n-სთვის გვექნება

$$\int_{2^{i-2n-3}}^{2^{i-2n-2}}\left|D_{q_n}(t)\right|dt\geq c>0, \qquad i=1,2,\dots,2n+2\Lambda$$

სადაც

$$q_n=2^{2n+1}+2^{2n-1}+\cdots+2^3+2^1+2^0,\;\; n=1,2,\dots.$$

ლემა 3.(ოსკოლკოვი). ვთქვათ მოცემული გვაქვს თანაუკვეთი ინტერვალები

$\Delta_k\subset[0,1],\; k=1,2,\dots$ და ვთქვათ $\{g_k\colon k\geq 1\}$ პერიოდულ ფუნქციათა მიმდევრობა, პერიოდით-1, ისეთი რომ $g_k(x)=0$ *როცა* $x\in[0,1]\setminus\nabla_k$, თუ $\omega(\delta,g_k)\leq\omega(\delta)$ და ვთქვათ $g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}g_k(x)$.

მაშინ $\omega(\delta,g)\leq 2\omega(\delta)$.

თეორემა 2. ვთქვათ $p(2n)\leq cp(n),n\in P$ და $p(n)log_2p(n)=o(n),n\to\infty$.

თუ ω აკმაყოფილებს პირობას

$$Lim_{n\to\infty}sup\omega\left(\frac{1}{n}\right)p([log_2n])log_2p([log_2n])=c_0>0$$

მაშინ არსებობს ფუნქცია $H^W\cap BO(p(n)\uparrow\infty)$ კლასიდან ,რომლისთვის უოლშ-ფურიეს მწკრივი განშლადია რაიმე წერტილში.

დამტკიცება: ვთქვათ $\{m_k\colon k\geq 1\}$ არის დადებითი მთელი რიცხვების მიმდევრობა, ისეთი რომ

$$\overline{lim}_{n\to\infty}\omega\left(\frac{1}{n}\right)p([log_2n])log_2p([log_2n])$$

$$=lim_{k\to\infty}\,\omega\left(\frac{1}{m_k}\right)p([log_2m_k])log_2p([log_2m_k])$$

აშკარაა, რომ $q_{n+1}<4q_n$. მაშინ ყოველი m_k სთვის არსებობს დადებითი მთელი რიცხვი n'_k

ისეთი, რომ $q_{n'_k} \le m_k \le 4q_{n'_k}$. ვინაიდან $p(2n) \le cp(n)$, მივიღებთ

$$\overline{lim}_{n\to\infty}\omega\left(\frac{1}{q_{n'_k}}\right)p\left(\left[log_2 q_{n'_k}\right]\right)log_2 p\left(\left[log_2 q_{n'_k}\right]\right)$$

$$\ge lim_{k\to\infty}\,\omega\left(\frac{1}{m_k}\right)p([log_2 m_k])log_2 p([log_2 m_k]) = c' > 0$$

ვთქვათ $\{n_k: k \ge 1\} \subset \{n'_k: k \ge 1\}$ არის ისეთი, რომ

$$\overline{lim}_{k\to\infty}\omega\left(\frac{1}{q_{n'_k}}\right)p\left(\left[log_2 q_{n'_k}\right]\right)log_2 p\left(\left[log_2 q_{n'_k}\right]\right)$$

$$= lim_{k\to\infty}\omega\left(\frac{1}{q_{n_k}}\right)p\left(\left[log_2 q_{n_k}\right]\right)log_2 p\left(\left[log_2 q_{n_k}\right]\right) = c'' > 0$$

ავიღოთ რაიმე დადებითი მთელი რიცხვი $l_1 \in \{n_k: k \ge 1\}$, ისეთი რომ

$$2^{-2l_1-2} < 2^{[p(l_1)log_2 p(l_1)]-2l_1-2}$$

განვიხილოთ ფუნქცია

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \omega\left(\frac{1}{q_{l_1}}\right), \quad \text{თუ } x = \frac{2j+1}{2^{2l_1+3}}, \;\; j = 1,2,\dots, 2^{[p(l_1)log_2 p(l_1)]} - 1 \\ 0, \qquad \text{თუ } x \in [0,1](2^{-2l_1-2}, 2^{[p(l_1)log_2 p(l_1)]-2l_1-2}), \\ x = \frac{j}{2^{2l_1+2}}, \qquad j = 1,\dots, 2^{[p(l_1)log_2 p(l_1)]} \\ \text{წრფივი და უწყვეტი სხვა ყველა } x - \text{სთვის } x \in [0,1] \end{cases}$$

$$f_1(x) = \varphi_1(x) sgn D_{q_{t_1}}(x), \quad f_1(x+l) = f_1(x), \qquad l \in Z.$$

ვთქვათ შევადგინეთ მიმდევრობა $l_1, \dots, l_{k-1}$ *1-პერიოდული ფუნქციები* $f_1, \dots, f_{k-1}$.

ახლა განვსაზღვროთ მთელ რიცხვთა მიმდევრობა $l_k \in \{n_k:\ k \ge 1\}$, რომელსაც გააჩნია შემდეგი თვისებები:

$$p(l_k)log_2 p(l_k) > p(l_{k-1})log_2 p(l_{k-1}) + 1$$

$$2^{[p(l_k)log_2p(l_k)]-2l_k-2} \leq 2^{-2l_{k-1}-2}$$

(6) $$\frac{p(l_k)log_2p(l_k)}{l_k} \leq 1$$

(7) $$log_2p\left(\left[log_2q_{l_k}\right]\right) \geq k^2$$

(8) $$\left|\int_{1/2^{2l_{k-1}+2}}^{1} \sum_{l=1}^{k-1} f_l(x)\omega_{2^{2l_k+1}+2^{2l_k-1}+\dots+2^{2l_{k-1}+3}}(x)\right.$$

$$\left.\times D_{2^{2l_{k-1}+1}+2^{2l_{k-1}-1}+\dots+2^3+2^1+2^0}(x)dx\right| \leq \frac{1}{k}$$

განვიხილოთ

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \omega\left(\frac{1}{q_{l_k}}\right), & \text{თუ } x = \frac{2j+1}{2^{2l_k+3}},\ j = 1,2,\dots,2^{[p(l_k)log_2p(l_k)]}-1 \\ 0, & \text{თუ } x \in [0,1]\backslash\left(2^{-2l_k-2}, 2^{[p(l_k)log_2p(l_k)]-2l_k-2}\right), \\ & x = \frac{j}{2^{2l_k+2}},\quad j = 1,\dots,2^{[p(l_k)log_2p(l_k)]} \\ & \text{წრფივი და უწყვეტი დანარჩენი } x \in [0,1] \end{cases}$$

$$f_k(x) = \varphi_k(x)sgnD_{q_{l_k}}(x),\quad f_k(x+l) = f_k(x),\qquad l \in Z.$$

ვთქვათ

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x),\quad f_0(0) = 0$$

ჯერ ვაჩვენოთ, რომ $f_0 \in BV(p(n) \uparrow \infty)$. ვთქვათ $\nabla: \dots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} < \dots$ არის ნებისმიერად აღებული დანაწილება პერიოდით 1 და $\rho(\nabla) \geq 1/2^n$. მაშინ მოიძებნება მთელი რიცხვი k, ისეთი რომ $2^{2l_{k-1}+2} \leq 2^n \leq 2^{2l_k+2}$. მაშინ მივიღებთ

$$p(2l_{k-1}+2) \leq p(n) \leq p(2l_k+2)$$

ვინაიდან

$$supp\left\{\sum_{l=k+1}^{\infty} f_l(x)\right\} \subset \left(0,1/2^{2l_k+2}\right)$$

და

$$p(V) \geq \frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{2^{2l_k+2}}$$

დავწერთ

(9) $$\left(\sum_{j=1}^{m}\left|\sum_{l=k+1}^{\infty}\left[f_l(t_j)-f_l(t_{j-1})\right]\right|^{p(n)}\right)^{1/p(n)}$$

$$\leq \omega\left(\frac{1}{q_{l_k}}\right)=o(1),\;\; k\to\infty$$

ადვილი დასანახია, რომ

(10) $$\left(\sum_{j=1}^{m}\left|f_k(t_j)-f_k(t_{j-1})\right|^{p(n)}\right)^{1/p(n)}$$

$$\leq c\;\omega\left(\frac{1}{q_{l_k}}\right)\left(\frac{2^n}{2^{2l_k}}2^{p(l_k)log_2 p(l_k)}\right)^{1/p(n)}$$

დავუშვათ $l_k+1 \leq n < 2l_k+2$. მაშინ მივიღებთ

(11) $$\left(\frac{2^n}{2^{2l_k}}2^{p(l_k)log_2 p(l_k)}\right)^{1/p(n)} \leq 4exp_2\left\{\frac{p(l_k)log_2 p(l_k)}{p(n)}\right\}$$

$$\leq 4exp_2\left\{\frac{p(l_k)log_2 p(l_k)}{p(l_k+1)}\right\} \leq 4exp_2\{log_2 p(l_k)\}=4p(l_k)$$

ვთქვათ $2l_{k-1} \leq n \leq l_k+1$. (6)-დან მივიღებთ

(12) $$\frac{2^n}{2^{2l_k}}2^{p(l_k)log_2 p(l_k)}=\frac{2^{n+p(l_k)log_2 p(l_k)}}{2^{2l_k}} \leq \frac{2^{l_k+1+l_k}}{2^{2l_k}}=2.$$

(10)-(12)- დან გვექნება

$$(13) \qquad \left(\sum_{j=1}^{m}\left|f_k(t_j)-f_k(t_{j-1})\right|^{p(n)}\right)^{1/p(n)} \le c\,\omega\left(\frac{1}{q_{l_k}}\right)p(l_k) \le \frac{c}{log_2 p(l_1)}$$

მოვიყვანოთ შემდეგი უტოლობა:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)^p \le \sum_{k=0}^{\infty} a_k{}^p \qquad (a_k \ge 0, k=0,1,\dots, \quad 0<p<1)$$

f_0 ფუნქციის აგებიდან და (7)-დან მივიღებთ

$$(14) \qquad \left(\sum_{j=1}^{m}\left|\sum_{i=1}^{k-1}\left[f_i(t_j)-f_i(t_{j-1})\right]\right|^{p(n)}\right)^{1/p(n)}$$

$$\le c\left(\omega\left(\frac{1}{q_{l_i}}\right)^{p(n)} 2^{p(l_i)log_2 p(i)}\right)^{1/p(n)}$$

$$\le c\sum_{i=1}^{k-1}\omega\left(\frac{1}{q_{l_i}}\right)exp_2\left\{\frac{p(l_i)log_2 p(l_i)}{p(n)}\right\}$$

$$\le\ c\sum_{i=1}^{k-1}\omega\left(\frac{1}{q_{l_i}}\right)exp_2\left\{\frac{p(l_i)log_2 p(l_i)}{p(2l_{k-1}+2)}\right\}$$

$$\le c\sum_{i=1}^{k-1}\omega\left(\frac{1}{q_{l_i}}\right)p(l_i) \le\ c\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{log_2 p\left(\left[log_2 q_{l_i}\right]\right)}$$

$$\le c\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2} < \infty$$

(9), (13) და (14)-დან მივიღებთ, რომ $f_0 \in BV(p(n)\uparrow\infty)$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $f_0 \in H^{\omega}$. ვთქვათ $\delta \ge 1/q_{l_k}$. ვინაიდან $\omega(\delta)$არის არაკლებადი ფუნქცია, მაშინ გვექნება

$$(15) \qquad \omega(\delta, f_k) \le 2\|f_k\|_C = 2\,\omega\left(\frac{1}{q_{l_k}}\right) \le 2\omega(\delta).$$

ვთქვათ $|x-y| \le \delta < 1/q_{l_k}$.

ვინაიდან

$$\frac{\omega(\delta_1)}{\delta_1} \le 2\frac{\omega(\delta_2)}{\delta_2}, \qquad 0<\delta_2<\delta_1$$

აქედან გამომდინარე, გვექნება

$$(16) \qquad |f_k(x)-f_k(y)| \le \quad \omega\left(\frac{1}{q_{l_k}}\right) 2^{2l_k+2}|x-y|$$

$$\le c\frac{\omega\left(\frac{1}{q_{l_k}}\right)}{\frac{1}{q_{l_k}}}|x-y| \le 2c\frac{\omega(\delta)}{\delta}\delta = 2c\omega(\delta)$$

(15) და (16)-დან გვექნება

$$(17) \qquad \omega(\delta, f_k) = O(\omega(\delta)).$$

ლემა 3. და (17)-დან მივიღებთ, რომ $f_0 \in H^{\omega}$.

საბოლოოდ, ვაჩვენებთ რომ f_0 ფუნქციის უოლშ-ფურიეს მწკრივი განშლადია 0-ში.

მართლაც,

$$(18) \qquad S_{q_{l_k}}(f_0,0) - f_0(0) = \int_0^1 f_0(x) D_{q_{l_k}}(x)dx$$

$$= \int_0^{2^{-2l_k-2}} f_0(x)D_{q_{l_k}}(x)dx + \int_{2^{-2l_k-2}}^{2^{-2l_{k-1}-2}} f_0(x)D_{q_{l_k}}(x)dx +$$

$$+ \int_{2^{-2l_{k-1}-2}}^{1} f_0(x)D_{q_{l_k}}(x)dx = I + II + III$$

f_0-ის აგების გამომდინარე გვექნება

(19) $$|I| = \left| \int_0^{2^{-2l_k-2}} f_0(x) D_{q_{l_k}}(x)dx \right| = O\left(\omega\left(\frac{1}{q_{l_k}}\right)\right) = o(1), \quad k \to \infty$$

ვთქვათ $x \notin (0, 2^{-2l_{k-1}-2})$. მაშინ გვექნება

(20) $$D_{q_{l_k}}(x) =$$

$$= \omega_{2^{2l_k+1}+2^{2l_k-1}+\cdots+2^{2l_{k-1}+3}}(x) D_{2^{2l_{k-1}+1}+2^{2l_{k-1}-1}+\cdots+2^3+2^2+2^1+2^0}(x).$$

(8) და (20)-დან მივიღებთ, რომ

(21) $$|III| = o(1), \quad k \to \infty$$

f_0-ის აგებიდან და ლემა 2.-დან გამომდინარე გვექნება:

(22) $$|II| = \left| \int_{2^{-2l_k-2}}^{2^{-2l_{k-1}-2}} f_0(x) D_{q_{l_k}}(x)dx \right| = \left| \int_{2^{-2l_k-2}}^{2^{-2l_{k-1}-2}} f_k(x) D_{q_{l_k}}(x)dx \right|$$

$$= \int_{2^{-2l_k-2}}^{2^{-2l_{k-1}-2}} \varphi_k(x) \left| D_{q_{l_k}}(x) \right| dx = \int_{2^{-2l_k-2}}^{2^{[p(l_k)log_2 p(l_k)]-2l_{k-1}-2}} \varphi_k(x) \left| D_{q_{l_k}}(x) \right| dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{p(l_k)log_2 p(l_k)} \int_{2^{i-2l_k-3}}^{2^{i-2l_k-2}} \varphi_k(x) \left| D_{q_{l_k}}(x) \right| dx$$

$$\geq c\, \omega\left(\frac{1}{q_{l_k}}\right) \sum_{i=1}^{p(l_k)log_2 p(l_k)} \int_{2^{i-2l_k-3}}^{2^{i-2l_k-2}} \left| D_{q_{l_k}}(x) \right| dx$$

$$\geq c\, \omega\left(\frac{1}{q_{l_k}}\right) p(l_k) log_2 p(l_k)$$

$$\geq c\, \omega\left(\frac{1}{q_{l_k}}\right) p([log_2 q_{l_k}]) log_2 p([log_2 q_{l_k}])$$

(18),(19),(21) და (22)-დან გვექნება, რომ

$$\overline{lim}_{n\to\infty}|S_n(f_0,0)-f_0(0)| \geq c > 0$$ □

ახლა უნდა ვაჩვენოთ, რომ თუ ფუნქცია $BV(p(n)\uparrow\infty)$ კლასს ეკუთვნის , მაშინ ის $BO(p(n)\uparrow\infty)$ კლასსაც ეკუთვნის .

დავწეროთ პირობა ფუნქციისთვის, რომელიც ეკუთვნის $BO(p(n)\uparrow\infty)$ კლასს:

$$sup_n\left\{\sum_{p=0}^{2^n-1} max_{t,u\in I_n^p}|f(t)-f(u)|^{p(n)}\right\}^{1/p(n)} < \infty$$

სადაც $I_n^p = \left[\frac{p}{2^n},\frac{p+1}{2^n}\right)$ *არის ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე,*

ან $\left\{(x_1,x_2,\dots): x_i = 0 \text{ ან } x_i = 1, \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{2^n} = \frac{p}{2^n}\right\}$ *არის ორობითი ჯგუფის სიმრავლე.*

ვიტყვით, რომ ფუნქცია ეკუთვნის $BV(p(n)\uparrow\infty)$ კლასს, თუ სრულდება შემდეგი

$$V(f;p(n)\uparrow p) =$$

$$sup_{n\geq1}sup_{\Delta}\left\{\left(\sum_{k=0}^{2^n-1}|f(x_k)-f(x'_k)|^{p(n)}\right)^{1/p(n)} : p(\Delta) \geq \frac{1}{2^n}\right\} < +\infty$$

$$\text{სადაც } p(\Delta) = inf_k|x_k - x'_k|$$

მაშინ

$$\left(\sum_{k=0}^{2^n-1} sup_{x_k,x'_k\in I_k^n}|f(x_k)-f(x'_k)|^{p(n)}\right)^{\frac{1}{p(n)}} < \infty$$

ავიღოთ $x_k,\ x'_k \in I_k^n$

სუპრემუმის განმარტების ძალით, თუ $supf(x) = M$, ე.ი. მოიძებნება ისეთი $x' \in I_k^n$, რომ

$$M - \varepsilon < f(x') \ => M < f(x') + \varepsilon$$

შესაბამისად გვექნება

$$sup_{x,x'\in I_k^n}|f(x)-f(x')|<\varepsilon+|f(x_k)-f(x_k')|$$

სადაც x_k და x_k' აღებულია I_k^n-ინტერვალიდან.

მაშინ მივიღებთ

$$\left(\sum_{k=0}^{2^n-1} sup_{x_k,x'_k\in I_k^n}|f(x_k)-f(x'_k)|^{p(n)}\right)^{\frac{1}{p(n)}} \le \left(\sum_{k=0}^{2^n-1}\left(\varepsilon+|f(x_k)-f(x'_k)|^{p(n)}\right)\right)^{1/p(n)}$$

სამართლიანია შემდეგი

$$(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p+b^p)$$

მაშინ

(23) $$\left(\varepsilon+|f(x)-f(x')|^{p(n)}\right)\le 2^{p(n)-1}\left(\varepsilon^{p(n)}+|f(x)-f(x')|^{p(n)}\right)$$

$$\le\left(\sum_{k=0}^{2^n-1}2^{p(n)-1}\varepsilon^{p(n)}\right)^{1/p(n)}+\left(\sum_{k=0}^{2^n-1}|f(x_k)-f(x_k')|^{p(n)}\right)^{1/p(n)}$$

$$\le\varepsilon 2^{1-\frac{1}{p(n)}}2^{\frac{n}{p(n)}}+\left(\sum_{k=0}^{2^n-1}|f(x_k)-f(x_k')|^{p(n)}\right)^{1/p(n)}$$

ვთქვათ $\varepsilon=\frac{1}{2^{n/p(n)}}$, მივიღებთ, რომ პირველი შესაკრები სასრულია, რაც შეეხება მეორე შესაკრებს:

ავიღოთ ღერძზე $1/2^n$ სიგრძის ინტერვალები, ვთქვათ x_k , $x_k'\in\left(\frac{k}{2^n};\frac{k+1}{2^n}\right]$, ავიღოთ ერთი ინტერვალით დაშორებული წერტილი $\frac{k+2}{2^n}$ და მეორე შესაკრების ყოველ წევრს დავუმატოთ და გამოვაკლოთ $f\left(\frac{k+2}{2^n}\right)$, გვექნება:

(24) $$\left(\sum_{k=0}^{2^n-1}|f(x_k)-f(x_k')|^{p(n)}\right)^{1/p(n)}=$$

$$\left(\sum_{k=0}^{2^n-1}\left|\left(f(x_k)-f\left(\frac{k+2}{2^n}\right)\right)+\left(f\left(\frac{k+2}{2^n}\right)-f(x_k')\right)\right|^{p(n)}\right)^{1/p(n)} \le$$

$$2^{1-\frac{1}{p(n)}}\left(\sum_{k=0}^{2^n-1}\left|f(x_k)-f\left(\frac{k+2}{2^n}\right)\right|^{p(n)}\right)^{1/p(n)}+\left(\sum_{k=0}^{2^n-1}\left|f(x_k')-f\left(\frac{k+2}{2^n}\right)\right|^{p(n)}\right)^{1/p(n)}$$

ვინაიდან

$$\left|x_k-\frac{k+2}{2^n}\right|\ge\frac{1}{2^n},\left|x_k'-\frac{k+2}{2^n}\right|\ge\frac{1}{2^n}$$

BV კლასის განმატების ძალით გვექნება, რომ (24)-ის მარჯვენა ჯამის ორივე შესაკრები სასრულია, შესამაბისად

$$\left(\sum_{k=0}^{2^n-1}|f(x_k)-f(x_k')|^{p(n)}\right)^{1/p(n)}<\infty$$

ე.ი. $f \in BO(p(n)\uparrow\infty)$. რ.დ.გ▪

[19] თევზაძის თეორემა მოითხოვს , რომ $p<\frac{1}{\alpha}$და $f\in BF_P\cap C_W$, მაშინ უოლშ-ფურიეს მწკრივის ჩეზაროს საშუალოები $\sigma_n^{-\alpha}(f)$ თანაბრად კრებადია f ფუნქციისაკენ. მეორეს მხრივ, როცა $p=\frac{1}{\alpha}$, მაშინ იარსებებს ფუნქცია f, რომლისთვისაც $\sigma_n^{-\alpha}(f,0)$ განშლადია. ზემოთ მოყვანილი წინადადებებიდან შეგვიძლია დავსვათ შემდეგი ამოცანა:

ვთქვათ $f\in BO\left(p(n)\uparrow\frac{1}{\alpha}\right),0<\alpha<1.$ რა პირობა უნდა დავადოთ მიმდევრობას

$\{p(n): n\ge1\}$, რომ შესრულდეს უოლშ-ფურიეს მწკრივის ჩეზაროს (C,-α) საშუალოების თანაბარი კრებადობა f ფუნქციისაკენ.

სამართლიანია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 3. ვთქვათ $f\in C_W([0,1])\cap BO\left(p(n)\uparrow\frac{1}{\alpha}\right),0<\alpha<1$ და

$$\frac{\left(w\left(\frac{1}{2^k},f\right)\right)^{1-\alpha p(k)}}{1-\alpha p(k)}\to 0, k\to\infty$$

მაშინ

$$\|\sigma_n^{-\alpha}(f)-f\|_c\to 0.$$

იმისათვის, რომ ვაჩვენოთ მოყვანილი თეორემის სამართლიანობა, უნდა გამოვიყენოთ შემდეგი ლემა, დამტკიცებული გოგინავას მიერ [9,8]-ში.

ლემა 4. ვთქვათ $f\in C_w([0,1])$. მაშინ ყოველი $\alpha\in(0,1)-$ სთვის სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$\frac{1}{A_n^{-\alpha}}\left\|\int_0^1\sum_{v=0}^{2^{k-1}-1}A_{n-v}^{-\alpha}w_v(u)[f(\cdot\oplus u)-f(\cdot)]du\right\|_P$$

$$\leq c(p,\alpha)\sum_{r=0}^{k-1}2^{r-k}\left(w(\frac{1}{2^r},f)\right)_p$$

სადაც $2^k\leq n<2^{k+1}$

დამტკიცება: თუ გამოვიყენებთ აბელის გარდაქმნას , მივიღებთ

$$\frac{1}{A_n^{-\alpha}}\left\|\int_0^1\sum_{v=0}^{2^{k-1}-1}A_{n-v}^{-\alpha}\omega_v(u)\,[f(\cdot\oplus u)-f(\cdot)]\,du\right\|_p \tag{25}$$

$$=\frac{1}{A_n^{-\alpha}}\left\|\int_0^1\sum_{v=1}^{2^{k-1}}A_{n-v-1}^{-\alpha}\omega_{v-1}(u)[f(\cdot\oplus u)-f(\cdot)]du\right\|_p$$

$$\leq\frac{1}{A_n^{-\alpha}}\left\|\int_0^1\sum_{v=1}^{2^{k-1}-1}A_{n-v-1}^{-\alpha-1}D_v(u)[f(\cdot\oplus u)-f(\cdot)]du\right\|_p$$

$$+\frac{1}{A_n^{-\alpha}}\left\|\int_0^1 A_{n-2^{k-1}-1}^{-\alpha} D_{2^{k-1}}(u)[f(\cdot\oplus u)-f(\cdot)]du\right\|_p$$

$$=I+II$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$I=\frac{1}{A_n^{-\alpha}}\left\|\int_0^1\sum_{r=0}^{k-2}\sum_{v=0}^{2^r-1}A_{n-v-2^r-1}^{-\alpha-1}D_{v+2^r}(u)[f(\cdot\oplus u)-f(\cdot)]du\right\|_p \tag{26}$$

$$\leq\frac{1}{A_n^{-\alpha}}\left\|\int_0^1\sum_{r=1}^{k-2}\sum_{v=1}^{2^r-1}A_{n-v-2^r-1}^{-\alpha-1}D_{v+2^r}(u)[f(\cdot\oplus u)-f(\cdot)]du\right\|_p$$

$$+\frac{1}{A_n^{-\alpha}}\left\|\int_0^1\sum_{r=0}^{k-2}A_{n-2^r-1}^{-\alpha-1}D_{2^r}(u)[f(\cdot\oplus u)-f(\cdot)]du\right\|_p$$

$$=I_1+I_2$$

განზოგადებული მინკოვსკის უტოლობა, დირიხლეს გულის თვისებები

ერთად გვაძლევს შემდეგს:

$$II\leq\frac{A_{n-2^{k-1}-1}^{-\alpha}}{A_n^{-\alpha}}2^{k-1}\int_0^{1/2^{k-1}}\|f(\cdot\oplus u)-f(\cdot)\|_p du=O\left(\omega\left(\frac{1}{2^{k-1}},f\right)_p\right), \tag{27}$$

$$I_2\leq\frac{1}{A_n^{-\alpha}}\sum_{r=0}^{k-2}2^r\left|A_{n-2^r-1}^{-\alpha-1}\right|\int_0^{1/2^k}\|f(\cdot\oplus u)-f(\cdot)\|_P du \tag{28}$$

$$=O\left(n^\alpha\sum_{r=0}^{k-2}\frac{\omega(\frac{1}{2^r},f)_p}{(n-2^r-1)^{1+\alpha}}\right)=O\left(\frac{n^\alpha}{2^{k(1+\alpha)}}\sum_{r=0}^{k-2}\omega(\frac{1}{2^r},f)_p\right)$$

$$= O\left(\sum_{r=0}^{k-2} 2^{r-k}\omega(\frac{1}{2^r}, f)_p\right)$$

ვინაიდან

(29) $$D_{v+2^r}(u) = D_{2^r}(u) + \omega_{2^r}(u)D_v(u)$$

I_1-სთვის გვაქვს შემდეგი შეფასება:

(30) $$I_1 \leq \frac{1}{A_n^{-\alpha}}\left\|\int_0^1 \sum_{r=1}^{k-2}\sum_{v=1}^{2^r-1} A_{n-v-2^r-1}^{-\alpha-1} D_v(u)\omega_{2^r}(u)[f(\cdot \oplus u) - f(\cdot)]du\right\|_p$$

$$+\frac{1}{A_n^{-\alpha}}\left\|\int_0^1 \sum_{r=1}^{k-2}\sum_{v=1}^{2^r-1} A_{n-v-2^r-1}^{-\alpha-1} D_{2^r}(u)[f(\cdot \oplus u) - f(\cdot)]du\right\|$$

$$= I_{11} + I_{12}$$

I_{12}-ის შეფასება ანალოგიურია I_2-ს შეფასებისა, და მივიღებთ

(31) $$I_{12} = O\left(\sum_{r=1}^{k-2} 2^{r-k}\omega(\frac{1}{2^r}, f)_p\right)$$

I_{11} -სთვის გვექნება:

(32) $$I_{11} \leq \frac{1}{A_n^{-\alpha}}\sum_{r=1}^{k-2}\left\|\sum_{l=0}^{2^r-1}\int_{l/2^r}^{(l+1)/2^r}\sum_{v=1}^{2^r-1} A_{n-v-2^r-1}^{-\alpha-1} D_v(u)\omega_{2^r}(u)[f(\cdot \oplus u) - f(\cdot)]du\right\|_p$$

$$= \frac{1}{A_n^{-\alpha}}\sum_{r=1}^{k-2}\left\|\sum_{l=0}^{2^r-1}\sum_{v=1}^{2^r-1} A_{n-v-2^r-1}^{-\alpha-1} D_v\left(\frac{1}{2^r}\right)\int_{l/2^r}^{(l+1)/2^r} \omega_{2^r}(u)[f(\cdot \oplus u) - f(\cdot)]du\right\|_p$$

ვინაიდან

$$\omega_{2^r}(u)=\begin{cases}1, & \text{თუ } u\in\left[\frac{2l}{2^{r+1}},\frac{2l+1}{2^{r+1}}\right)\\ -1, & \text{თუ } u\in\left[\frac{2l+1}{2^{r+1}},\frac{2l+2}{2^{r+1}}\right)\end{cases}$$

$t=u\oplus 1/2^{r+1}$ არის ბიექციური ასახვა $\left[\frac{2l}{2^{r+1}},\frac{2l+1}{2^{r+1}}\right)$-შუალედისა $\left[\frac{2l+1}{2^{r+1}},\frac{2l+2}{2^{r+1}}\right)$ შუალედზე.

გვექნება

(33)
$$\int_{l/2^r}^{(l+1)/2^r}\omega_{2^r}(u)[f(\cdot\oplus u)-f(\cdot)]du$$

$$=\int_{2l/2^{r+1}}^{(2l+1)/2^{r+1}}\left[f(x\oplus u)-f\left(x\oplus u\oplus\frac{1}{2^{r+1}}\right)\right]du$$

ჩავსვავთ (13) (12)-ში, გავიხსენოთ,რომ $A_n^\alpha\backsim n^\alpha$ და შემდეგი შეფასებით

$$\frac{1}{n}\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k D_k(x)\right|dx\le\frac{c}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\right)^{1/2}$$

მივიღებთ:

(34)
$$I_{11}\le\sum_{r=1}^{k-2}\left\|\frac{1}{A_n^{-\alpha}}\sum_{l=0}^{2^r-1}\sum_{v=1}^{2^r-1}A_{n-v-2^r-1}^{-\alpha-1}D_v\left(\frac{1}{2^r}\right)\times\int_{\frac{2l}{2^{r+1}}}^{\frac{2l+1}{2^{r+1}}}\left[f(\cdot\oplus u)-f\left(\cdot\oplus u\oplus\frac{1}{2^{r+1}}\right)\right]du\right\|_p$$

$$\le\frac{1}{A_n^{-\alpha}}\sum_{r=1}^{k-2}\sum_{l=0}^{2^r-1}\left|\sum_{v=1}^{2^r-1}A_{n-v-2^r-1}^{-\alpha-1}D_v\left(\frac{1}{2^r}\right)\right|\times\int_{2l/2^{r+1}}^{\frac{2l+1}{2^r}+1}\left\|f(\cdot\oplus u)-f\left(\cdot\oplus u\oplus\frac{1}{2^{r+1}}\right)\right\|_p du$$

$$= \frac{1}{A_n^{-\alpha}} \sum_{r=1}^{k-2} \omega(\frac{1}{2^r}, f)_p \sum_{l=0}^{2^r-1} \int_{2l/2^{r+1}}^{(2l+1)/2^{r+1}} \left| \sum_{v=1}^{2^r-1} A_{n-v-2^r-1}^{-\alpha-1} D_v(u) \right| du$$

$$\leq \frac{1}{A_n^{-\alpha}} \sum_{r=1}^{k-2} \omega(\frac{1}{2^r}, f)_p \int_0^1 \left| \sum_{v=1}^{2^r-1} A_{n-v-2^r-1}^{-\alpha-1} D_v(u) \right| du$$

$$= O\left(n^\alpha \sum_{r=1}^{k-2} 2^r \omega(\frac{1}{2^r}, f)_p \frac{1}{2^{r/2}} \left(\sum_{v=1}^{2^r-1} (n - v - 2^r - 1)^{-2\alpha-2} \right)^{1/2} \right)$$

$$O\left(\sum_{r=1}^{k-2} 2^{r-k} \omega(\frac{1}{2^r}, f)_p \right)$$

(25)-(28),(30), (31) და (34)-დან მივიღებთ ლემა 4.-ის დამტკიცებას.

ლემა 5. ვთქვათ $f \in C_W([0,1])$ $2^K \leq n \leq 2^{k+1}$ $\alpha \in (0,1)$

$$\frac{1}{A_n^{-\alpha}} \left| \int_0^1 \sum_{v=2^{k-1}}^{2^k-1} A_{n-v}^{-\alpha} w_v(x) [f(x \oplus u) - f(x)] du \right| \leq$$

$$\leq c(\alpha) \left(\sum_{j=1}^{2^{k-1}-1} \frac{1}{j^{1-\alpha}} \left| f\left(x \oplus \frac{2j}{2^k}\right) - f\left(x \oplus \frac{2j+1}{2^k}\right) \right| \right),$$

$$\frac{1}{A_n^{-\alpha}} \left| \int_0^1 \sum_{v=2^k}^{n} A_{n-v}^{-\alpha} w_v(x) [f(x \oplus u) - f(x)] du \right| \leq$$

$$\leq c(\alpha) \left(\sum_{j=1}^{2^k-1} \frac{1}{j^{1-\alpha}} \left| f\left(x \oplus \frac{2j}{2^{k+1}}\right) - f\left(x \oplus \frac{2j+1}{2^{k+1}}\right) \right| \right)$$

თეორემა 3-ის დამტკიცება :

(35) $$\sigma_n^{-\alpha}(f,x)-f(x)$$

$$=\frac{1}{A_n^{-\alpha}}\int_0^1\sum_{v=0}^{n}A_{n-v}^{-\alpha}w_v(x)[f(x\oplus u)-f(x)]du$$

$$\frac{1}{A_n^{-\alpha}}\int_0^1\sum_{v=0}^{2^{k-1}-1}A_{n-v}^{-\alpha}w_x(x)[f(x\oplus u)-f(x)]du$$

$$+\frac{1}{A_{n-v}^{-\alpha}}\int_0^1\sum_{v=2^{k-1}-1}^{2^k-1}A_{n-v}^{-\alpha}w_x(x)[f(x\oplus u)-f(x)]du$$

$$+\frac{1}{A_{n-v}^{-\alpha}}\int_0^1\sum_{v=2^k}^{n}A_{n-v}^{-\alpha}w_x(x)[f(x\oplus u)-f(x)]du$$

$$=I+II+III$$

4 და 5 ლემიდან გვექნება

(36) $$||I||_C\le c(\alpha)\sum_{v=0}^{k-1}2^{r-k}w(\frac{1}{2^r},f)_C,$$

(37) $$|II|\le c(\alpha)\left((\sum_{j=1}^{2^{k-1}-1}\frac{1}{j^{1-\alpha}}\left|f\left(x\oplus\ \frac{2j}{2^k}\right)-f\left(x\oplus\ \frac{2j+1}{2^k}\right)\right|\right)$$

და

$$(38) \qquad |III| \le c(\alpha)\left(\sum_{j=1}^{2^k-1}\frac{1}{j^{1-\alpha}}\left|f\left(x\oplus\frac{2j}{2^{k+1}}\right)-f\left(x\oplus\frac{2j+1}{2^{k+1}}\right)\right|\right)$$

აბელის გარდაქმნით მივიღებთ

$$(39) \qquad |III| \le c(\alpha)\sum_{j=1}^{2^k-2}\left(\frac{1}{j^{1-\alpha}}-\frac{1}{(j+1)^{1-\alpha}}\right)\times\left|f\left(x\oplus\frac{2j}{2^{k+1}}\right)-f\left(x\oplus\frac{2j}{2^{k+1}}\right)\right|$$

$$+\frac{1}{(2^k-1)^{1-\alpha}}\sum_{j=1}^{2^k-1}\left|f\left(x\oplus\frac{2j}{2^{k+1}}\right)-f\left(x\oplus\frac{2j+1}{2^{k+1}}\right)\right| = III_1+III_2$$

ვთქვათ, $\varepsilon_k=\alpha p_k<1 \quad s_k:=\frac{p(k)}{\varepsilon_k},\ \frac{1}{s_k}+\frac{1}{t_k}=1$

ჰელდერის უტოლობის გამოყენებით გვექნება

$$(40) \qquad III_2=\frac{1}{(2^k-1)^{1-\alpha}}\sum_{j=1}^{2^k-1}\left|f\left(x\oplus\frac{2j}{2^{k+1}}\right)-f\left(x\oplus\frac{2j+1}{2^{k+1}}\right)\right|^{\varepsilon_k}\times$$

$$\times\left|f\left(x\oplus\frac{2j}{2^{k+1}}\right)-f\left(x\oplus\frac{2j+1}{2^{k+1}}\right)\right|^{1-\varepsilon_k}$$

$$\le\frac{c(\alpha)}{2^{k(1-\alpha)}}\left(\sum_{j=1}^{2^k-1}\left|f\left(x\oplus\frac{2j}{2^{k+1}}\right)-f\left(x\oplus\frac{2j+1}{2^{k+1}}\right)\right|^{p(k)}\right)^{\frac{\varepsilon_k}{p(k)}}\times$$

$$\times\left(\sum_{j=1}^{2^k-1}\left|f\left(x\oplus\frac{2j}{2^{k+1}}\right)-f\left(x\oplus\frac{2j+1}{2^{k+1}}\right)\right|^{(1-\varepsilon_k)t_k}\right)^{\frac{1}{t_k}}$$

$$\le\frac{c(\alpha)}{2^{k(1-\alpha)}}\left(BO\left(f,p(k)\uparrow\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{\varepsilon_k}\left(\dot{w}\left(f,\frac{1}{2^k}\right)\right)^{1-\varepsilon_k}2^{\frac{k}{t_k}}$$

$$\leq c(\alpha)\left(BO\left(f,p(k)\uparrow\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{\varepsilon_k}\left(\dot{w}\left(f,\frac{1}{2^k}\right)\right)^{1-\varepsilon_k}2^{k(\alpha-\frac{1}{s_k})}$$

$$=c(\alpha)\left(BO\left(f,p(k)\uparrow\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{\varepsilon_k}\left(\dot{w}\left(f,\frac{1}{2^k}\right)\right)^{1-\varepsilon_k}2^{k\left(\alpha-\frac{\varepsilon_k}{p(k)}\right)}=$$

$$=c(\alpha)\left(BO\left(f,p(k)\uparrow\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{\varepsilon_k}\left(\dot{w}\left(f,\frac{1}{2^k}\right)\right)^{1-\alpha p(k)}\to 0$$

როცა k→ ∞

შემოვიტანოთ $m_0(k)$ და განვსაზღვროთ მოგვიანებით:

(41)
$$III_1\leq c(\alpha)\sum_{j=1}^{m_0(k)}\frac{1}{j^{2-\alpha}}\sum_{l=1}^{j}\left|f\left(x\oplus\frac{2j}{2^{k+1}}\right)-f\left(x\oplus\frac{2j+1}{2^{k+1}}\right)\right|+$$

$$+\sum_{j=m_0(k)+1}^{2^k-1}\frac{1}{j^{2-\alpha}}\sum_{l=1}^{j}\left|f\left(x\oplus\frac{2j}{2^{k+1}}\right)-f\left(x\oplus\frac{2j+1}{2^{k+1}}\right)\right|\leq$$

$$\leq c(\alpha)\left\{\sum_{j=1}^{m_0(k)}\frac{1}{j^{2-\alpha}}jw\left(\frac{1}{2^k},f\right)\right.$$

$$\left.+\sum_{j=m_{o(k)}+1}^{2^k-1}\frac{1}{j^{1+\frac{1}{p(k)}-\alpha}}\left(\sum_{l=1}^{j}\left|f\left(x\oplus\frac{2j}{2^{k+1}}\right)-f\left(x\oplus\frac{2j+1}{2^{k+1}}\right)\right|^{p(k)}\right)^{1/p(k)}\right\}$$

$$\leq c(\alpha)\left\{(m_0(k))^{\alpha}w\left(\frac{1}{2^k},f\right)+\frac{m_0(k)^{\alpha-\frac{1}{p(k)}}}{\alpha-\frac{1}{p(k)}}BO\left(f,p(k)\uparrow\frac{1}{\alpha}\right)\right\}$$

განვსაზღვროთ

$$m_0(k) = \left(\frac{1}{w(\frac{1}{2^k}, f)}\right)^{p(k)}$$

მაშინ გვექნება

(42) $$III_1 \leq c(\alpha)\left\{\dot{w}\left(\frac{1}{2^k}\right)^{1-\alpha p(k)} + \frac{\dot{w}\left(\frac{1}{2^k}\right)^{1-\alpha p(k)}}{\frac{1}{p(k)} - \alpha}\right\} \leq$$

$$\leq c(\alpha)\frac{\dot{w}\left(\frac{1}{2^k}\right)^{1-\alpha p(k)}}{1 - \alpha p(k)}$$

შევაერთოთ (39)-(42), გვექნება

(43) $$|III| \leq c(\alpha)\frac{\dot{w}\left(\frac{1}{2^k}\right)^{1-\alpha p(k)}}{1 - \alpha p(k)}$$

ანალოგიურად, შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ

(44) $$|II| \leq \; c(\alpha)\frac{\dot{w}\left(\frac{1}{2^k}\right)^{1-\alpha p(k)}}{1 - \alpha p(k)}$$

(35),(36),(43) და (44) გვაძლევს თეორემა 3-ის დამტკიცებას.

გამოყენებული ლიტერატურა

[1] T.Akhobadze, Functions of generalized Wiener classes BV (p(n) ↑ ∞, ϕ) and their Fourier coefficients. Georgian Math. J. 7(2000), No.3, 401-416.

[2] T.Akhobadze, BV (P(n) ↑ ∞, ϕ) classes of functions of bounded variation. Bull. Georgian Acad.Sci. 164(2001), No. 1,18-20.

[3] Z. A. Chanturia, The modulus of variation of a function and its application in the theoryof Fourier series, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 214 (1974), 63-66 (in Russia).

[4] N.J. Fine, Ces`aro summability of Walsh-Fourier series, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 41(1995), 558-591.

[5] G. G´at and R. Toledo, Fourier coefficients and absolute convergence on compact totally disconnected groups. Math. Pannon. 10(1999), No. 2, 223-233.

[6] G. G´at and K. Nagy, Ces`aro summability of the character system of the p-series field in the Kaczmarz rearrangement. Anal. Math. 28 (2002), no. 1, 1–23.

[7] V. A. Glukhov, On the summability of Walsh-Fourier series with respect to multiplicative systems, Mat. Zanetki 39(1986), 665-673.

[8] U. Goginava, On the convergence and summability of N-dimensional Fourier series with respect to the Walsh-Paley systems in the spaces L p [0, 1]N , p ∈ [1, ∞] , Georgian Math. J. 7(2000), 1-22.

[9] U. Goginava, On the approximation properties of Ces`aro means of negative order of Walsh-Fourier series. J. Approx. Theory 115 (2002), no. 1, 9–20.

[10] U. Goginava, Uniform convergence of Ces`aro means of negative order of double WalshFourier series. J. Approx. Theory 124 (2003), no. 1, 96–108.

[11] U. Goginava, On the uniform convergence of Walsh-Fourier series. Acta Math. Hungar. 93 (2001), no. 1-2, 59–70.

[12] B. I. Golubov, A. V. Efimov, and V. A.Skvortsov. ”Series and transformations of Walsh,” Nauka, Moscow, 1987[In Russian]; English translation, Kluwer Academic, Dordecht,1991.

[13] C. Jordan, Sur la series de Fourier , C. R. Acad. Sci. Paris, 92(1881),228-230.

[14] T.Karchava,On the convergence of Fourier series, Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua's Institute of Applied Mathematics., 3(1988), 93-95(in Russia).

[15] H. Kita and K. Yoneda, A generalization of bounded variation. Acta Math. Hungar. 56(1990), No.3-4, 229-238.

[16] K. Nagy, Approximation by Ces`aro means of negative order of Walsh-KaczmarzFourier series. East J. Approx. 16 (2010), no. 3, 297–311.

[17] A.Paley, A remarcable series of orthogonal functions, Proc. London Math. Soc. 34(1992), 241-279.

[18] F. Schipp, Uber gewisse Maximaloperatoren, Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Math. ¨ 18(1975), 189-195.
[19] F. Schipp, W.R. Wade, P. Simon and J. P´al, "Walsh Series, Introduction to Dyadic Harmonic Analysis," Hilger, Bristol, 1990.

[20] V. I. Tevzadze, On the uniform convergence of Walsh-Fourier series, Some Problems of Function Theory, 3(1986), 84-117.

[21] D. Waterman, on convergence of Fourier series of functions of generalized bounded of scientific activity. II. Studia Math. 44(1972), 107-117.

[22] N. Wiener, The quadri variation of a function and its Fourier coefficients, Massachusetts J. of Math., 3 (1924),72-94.

[23] L.C. Young, Sur un generalization de la notion de variation de Poissance p-ieme bornee an sonce de Wiener et sur la convergence de series de Fourier, C.R. Acad. Sci. Paris, 204(1937), 470-472.

[24] V. I. Zhizhiashvili, "Trigonometric Fourier Series and Their Conjugates," Tbilisi, 1993.[In Russian]; English Translation, Kluwer Academic, Dordrecht, 1996.