ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ანა ნუსხელაძე

აბსტრაქტული ჰიპერბოლური განტოლებისათვის კოშის ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნა სინუს და კოსინუს ოპერატორ-ფუნქციებისათვის პადეს აპროქსიმაციის გამოყენებით

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
მათემატიკის დეპარტამენტი

ნაშრომი შესრულებულია მათემატიკის მეცნიერებათა მაგისტრის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

ხელმძღვანელი: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
ასოცირებული პროფესორი ჯემალ როგავა

თბილისი
2017

სარჩევი

ანოტაცია

სამაგისტრო ნაშრომში განხილულია აბსტრაქტული ჰიპერბოლური განტოლებისთვის კოშის ამოცანა. კარგად არის ცნობილი, რომ ამ ამოცანის ამონახსნი მოიცემა სინუს და კოსინუს ოპერატორული ფუნქციების საშუალებით. ეს ფაქტი იძლევა საშუალებას უცნობი ფუნქცია და მისი წარმოებული ვექტორულად განისაზღვროს, დროით ცვლადზე დამოკიდებული ისეთი მატრიცული ოპერატორის საშუალებით, რომელიც ქმნის უნიტარულ ჯგუფს.

ნაშრომში უნიტარული ჯგუფისთვის მაღალი რიგის რაციონალური აპროქსიმაციის საშუალებით აგებულია ორშრიანი ვექტორული სქემა, რომელიც იძლევა საშუალებას ყოველ დროით შრეზე ვიპოვოთ როგორც უცნობი ფუნქციის, ასევე მისი წარმოებულის მნიშვნელობა. გამოკვლეულია ამ სქემის მდგრადობა, კერძოდ დამტკიცებულია, რომ გადასვლის მატრიცა-ოპერატორის ნორმა არ აღემატება ერთს, რაც უზრუნველყოფს განხილული სქემის მდგრადობას ნებისმიერი სასრული დროის შუალედში. დამტკიცებულია, რომ აგებული რაციონალური აპროქსიმაცია, რომელიც ფაქტიურად წარმოადგენს პადეს სკალარული აპროქსიმაციის ოპერატორულ ანალოგს, იძლევა უცნობი ფუნქციის და მისი წარმოებულის მნიშვნელობას ნებისმიერ დროით შრეზე მეოთხე რიგის სიზუსტით. განხილულია ასევე სუსტი არაწრფივობის შემთხვევა; კერძოდ, როცა წრფივ ძირითად ნაწილს ემატება ისეთი არაწრფივი ოპერატორი, რომელიც აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას.

Annotation

The thesis studies to a certain extent initial value problem for abstract hyperbolic equation. It is well-known that the solution to this problem is given in terms of sine and cosine operator functions, which gives a possibility to define unknown function and its derivative in terms of vectors using time-variable-dependent matrix-operator that generates a unitary group.

The following work offers two-layer vector scheme for unitary groups using high-order rational approximation. The scheme allows us to find the values of the unknown function as well as the values of its derivative on each time layer. Stability of this scheme is studied. Namely, it is proved that the norm of the transition matrix-operator dies not exceed 1. This guarantees stability of the scheme in any finite time interval. It is also proved that the constructed rational approximation, which in fact is an operator analog of scalar Pade approximation, yields fourth-order accuracy for values of the function and its derivative for any time layer. We also consider a case of weak nonlinearity, in particular, a case in which a nonlinear operator satisfying Lipschitz condition is added to the linear main part.

შესავალი

ნაშრომში განხილულია აბსტრაქტული ჰიპერბოლური განტოლებისთვის კოშის ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის სქემები, რომლებიც ეფუძნება უწყვეტი ამოცანის ამომხსნელი ოპერატორის რაციონალურ აპროქსიმაციას.

პირველ თავში განხილულია ერთგვაროვანი აბსტრაქტული ჰიპერბოლური განტოლება

$$u''(t) + Au(t) = 0,\ \ t \in [0,T],$$
$$u(0) = \varphi_0,\ \ u'(0) = \varphi_1,$$

რომლის ამონახსნი მოიცემა ფორმულით

$$u(t) = \cos(tA^{1/2})\varphi_0 + \sin(tA^{1/2})A^{-1/2}\varphi_1,$$

ზუსტი ამონახსნი ბადისთვის კი - შემდეგი ფორმულით:

$$u(t_k) = \cos(\tau A^{1/2})u(t_{k-1}) + \sin(\tau A^{1/2})A^{-1/2}u'(t_{k-1}),$$

ამ ფორმულაში შემავალი სინუს- და კოსინუს- ოპერატორული ფუნქციებისთვის ნაპოვია პადეს აპროქსიმაცია გარკვეული სიზუსტით, და ამ მიახლოების საშუალებით მიღებულია ამონახსნის შესაბამისი დისკრეტული სქემები.

მეორე თავში გადმოცემულია პადეს აპროქსიმაციის არსი, განხილულია მისი აგების გზები, ასევე თვალსაჩინოებისთვის მაგალითის საფუძველზე ნაჩვენებია პადეს აპროქსიმაციის ეფექტურობა რიცხვობრივადაც და გრაფიკულადაც, და აგებულია პადეს მიახლოება ექსპონენციალური ფუნქციისათვის.

მესამე თავი ეთმობა ცდომილებას შეფასებას ერთგვაროვანი ამოცანისათვის, რისთვისაც ვიყენებთ პირველ თავში მიღებული ოპერატორების მიახლოების შესაბამის სკალარულ ფუნქციებს. ამ ფუნქციებს ვადებთ გარკვეულ პირობებს, რაც ერთი მხრივ

გარანტიას იძლევა, ნორმა არ აღემატებოდეს ერთს, მეორე მხრივ კი არ ცვლის გადასვლის მიახლოებითი ოპერატორის ცდომილების რიგს.

მეოთხე თავი გვთავაზობს შესაბამისი არაერთგვაროვანი ამოცანის

$$u''(t) + Au(t) = f(t), \ t \in [0,T],$$

$$u(0) = \varphi_0, \ u'(0) = \varphi_1,$$

ამოხსნის მეთოდს უკვე ნაპოვი გადასვლის ოპერატორის გამოყენებით სიმპსონის კვადრატულ ფორმულაში. ამონახსნი მოიცემა მატრიცული სახით, რასაც საკვანძო მნიშვნელობა ექნება შემდეგში ცდომილების შეფასებისას.

მეხუთე თავში ფასდება ცდომილება მეოთხე თავში მიღებული სქემისთვის.

მეექვსე თავი ეთმობა ჰიპერბოლური განტოლების სუსტი არაწრფივობის შემთხვევას; კერძოდ, განტოლებას ემატება ისეთი არაწრფივი ოპერატორი, რომელიც აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას. ამ შემთხვევისთვის, მიახლოებითი ამონახსნის სქემის ასაგებად გამოყენებულია ტრაპეციის ფორმულა. სქემას ისევ ვაძლევთ მატრიცულ სახეს, რაც აადვილებს ცდომილების შეფასებას.

წარმოდგენილი სამაგისტრო ნაშრომი არსებითად ეყრდნობა შრომებს [5], [14] შევნიშნავთ, რომ არასტაციონარული ამოცანებისთვის მიახლოებითი ამოხსნის სქემების აგებისა და გამოკვლევის საკითხები საფუძვლიანად არის განხილული ფართოდ ცნობილ წიგნებში [1-3], [9], [15], [16], [20], [21]. სამაგისტო ნაშრომის თემატიკასთან ახლოს არის შრომები [17-19].

1. ერთგვაროვანი ამოცანა

განვიხილოთ H ჰილბერტის სივრცეში კოშის ამოცანა:

$$u''(t)+Au(t)=0,\ t\in[0,T], \tag{1.1}$$

$$u(0)=\varphi_0, u'(0)=\varphi_1, \tag{1.2}$$

სადაც A არის თვითშეუღლებული, დადებითად განსაზღვრული ოპერატორი (შესაძლოა, შემოუსაზღვრელიც), H -ში მკვირვი განსაზღვრის არით $D(A)$, ანუ $\overline{D(A)} = H, A = A^*$, და

$$A(u,u) \geq \alpha \|u\|^2,\ \forall\, u \in D(A), \alpha = const > 0,$$

სადაც $\|\cdot\|$ აღნიშნავს H -ში განსაზღვრულ ნორმას, $(\cdot,\cdot)$ კი - სკალარულ ნამრავლს; φ_0 და φ_1 მოცემული ვექტორებია H -იდან; $u(t)$ არის $C^2[0,T]$ კლასის ფუნქცია მნიშვნელობებით H -ში.

ცნობილია, რომ თუ $\varphi_0 \in D(A)$ და $\varphi_1 \in D(A^{1/2})$, მაშინ არსებობს ისეთი ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი $u(t)$ ფუნქცია, რომელიც (1.1)-(1.2) კოშის ამოცანის ამონახსნია და ის მოიცემა ფორმულით (იხ. [12], [13]):

$$u(t)=\cos(tA^{1/2})\varphi_0+\sin(tA^{1/2})A^{-1/2}\varphi_1, \tag{1.3}$$

სადაც $\cos(tA^{1/2})$ და $\sin(tA^{1/2})$ ოპერატორ-ფუნქციები განისაზღვრება ეილერის განზოგადებული ფორმულების საშუალებით:

$$\cos(tA^{1/2})=\frac{1}{2}(e^{it\sqrt{A}}+e^{-it\sqrt{A}}),$$
$$\sin(tA^{1/2})=\frac{1}{2i}(e^{it\sqrt{A}}-e^{-it\sqrt{A}}),$$

სადაც $\left\{e^{\pm it\sqrt{A}}\right\}$ არის ოპერატორთა უნიტარული ჯგუფი, წარმოქმნილი $\left\{\pm iA^{1/2}\right\}$ ოპერატორის მიერ.

მტკიცდება, რომ არსებობს ზღვარი $\lim_{n\to\infty}(I \pm \frac{t}{n} iA^{1/2})^{-n}\varphi$, ნებისმიერი $\varphi \in H$-სთვის და ეს ზღვარი აღინიშნება $e^{\pm it\sqrt{A}}\varphi$-ით (იხ. [22]).

დავუბრუნდეთ მოცემული განტოლების მიახლოებითი ამონახსნის მიღებას. დისკრეტიზაციის მიზნით, $[0,T]$ შუალედი დავყოთ $n \geq 2$ ნაწილად. კვანძითი წერტილები აღვნიშნოთ t_k-თი, $t_k = k\tau$, $\tau = \dfrac{T}{n}$, $k = 0,1,\ldots,n$. განვიხილოთ (1.1)-(1.2) ამოცანის სესაბამისი ამოცანა $[t_{k-1}, t_k]$ შუალედში. (1.3) ფორმულიდან მარტივი გარდაქმნებით მიიღება ფორმულები:

$$u(t_k) = \cos(\tau A^{1/2})u(t_{k-1}) + \sin(\tau A^{1/2})A^{-1/2}u'(t_{k-1}), \tag{1.4}$$

$$u'(t_k) = -\sin(\tau A^{1/2})A^{1/2}u(t_{k-1}) + \cos(\tau A^{1/2})u'(t_{k-1}). \tag{1.5}$$

ჩვენი მიზანია ავაგოთ გადასვლის სინუს და კოსინუს ოპერატორ-ფუნქციების მააპროქსიმებელი ისეთი რაციონალური ოპერატორ-ფუნქციები, რომ მიღებული სქემის გადასვლის ოპერატორის ნორმა არ აღემატებოდეს ერთს.

ვიყენებთ პადეს აპროქსიმაციას და სინუს და კოსინუს ოპერატორ-ფუნქციების აპროქსიმაციას ვახდენთ შემდეგი რაციონალური ოპერატორ-ფუნქციებით:

$$W_1(\tau) = (I + \lambda_1 \tau^2 A)^{-1}(I + \lambda_2 \tau^2 A)^{-1},$$

რომელსაც ვიყენებთ $\cos(\tau A^{1/2})$-ის მიახლოებისთვის, და

$$W_2(\tau) = \tau A^{1/2}(I + \lambda_3 \tau^2 A)^{-1}(I + \lambda_4 \tau^2 A)^{-1}(I + \lambda_5 \tau^2 A)^{-1},$$

რომელიც ახდენს $\sin(\tau A^{1/2})$-ის აპროქსიმაციას.

შევარჩიოთ λ_1 და λ_2 კოეფიციენტები ისე, რომ $W_1(\tau)$-მა მოახდინოს $\cos(\tau A^{1/2})$-ს აპროქსიმაცია სამი წევრის სიზუსტით:

$$\begin{aligned}
&(I + \lambda_1 \tau^2 A)^{-1}(I + \lambda_2 \tau^2 A)^{-1} = (I - \lambda_1 \tau^2 A + \lambda_1^2 \tau^4 A^2 - \ldots)(I - \lambda_2 \tau^2 A + \lambda_2^2 \tau^4 A^2 - \ldots) \\
&= I - \lambda_2 \tau^2 A + \lambda_2^2 \tau^4 A^2 - \lambda_1 \tau^2 A + \lambda_1 \lambda_2 \tau^4 A^2 + \lambda_1^2 \tau^4 A^2 + O(\tau^6) \\
&= I - (\lambda_1 + \lambda_2)\tau^2 A + (\lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1^2)\tau^4 A^2 + O(\tau^6).
\end{aligned}$$

მაშინ,

$$\begin{cases} -(\lambda_1+\lambda_2)=\dfrac{1}{2} \\ \lambda_2^2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_1^2=\dfrac{1}{24}. \end{cases}$$

სისტემის ამოხსნით მივიღებთ, რომ

$$\lambda_1=\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{21}}{12}\ ,$$

$$\lambda_2=\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{21}}{12}.$$

λ_1 აღვნიშნოთ λ-თი, მაშინ $\lambda_2=\bar{\lambda}$

$W_1(\tau)$-ს ექნება სახე:

$$W_1(\tau)=(I+(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{21}}{12})\tau^2A)^{-1}(I+(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{21}}{12})\tau^2A)^{-1}=(I+\frac{1}{2}\tau^2A+\frac{5}{24}\tau^4A^2)$$

λ_3, λ_4 და λ_5 შევარჩიოთ ისე, რომ $W_2(\tau)$-მ ორი წევრის სიზუსტით მოახდინოს $\sin(\tau A^{1/2})$-ს აპროქსიმაცია:

$$\begin{aligned}
&\tau A^{1/2}(I+\lambda_3\tau^2A)^{-1}(I+\lambda_4\tau^2A)^{-1}(I+\lambda_5\tau^2A)^{-1} \\
&=\tau A^{1/2}(I-\lambda_3\tau^2A+\lambda_3^2\tau^4A^2-\ldots)(I-\lambda_4\tau^2A+\lambda_4^2\tau^4A^2-\ldots)(I-\lambda_5\tau^2A+\lambda_5^2\tau^4A^2-\ldots) \\
&=\tau A^{1/2}(I-\lambda_5\tau^2A-\lambda_4\tau^2A-\lambda_3\tau^2A+\lambda_5^2\tau^4A^2+\lambda_4^2\tau^4A^2+\lambda_3^2\tau^4A^2+ \\
&+\lambda_3\lambda_4\tau^4A^2+\lambda_4\lambda_5\tau^4A^2+\lambda_3\lambda_5\tau^4A^2+O(\tau^6A^3)) \\
&=\tau A^{1/2}(I-(\lambda_5+\lambda_4+\lambda_3)\tau^2A+(\lambda_5^2+\lambda_4^2+\lambda_3^2+\lambda_3\lambda_4+\lambda_4\lambda_5+\lambda_3\lambda_5)\tau^4A^2+O(\tau^6A^3))
\end{aligned}$$

აუცილებლად უნდა გვქონდეს

$$-(\lambda_5+\lambda_4+\lambda_3)=-\frac{1}{6},$$

და რადგან მესამე წევრის სიზუსტე აღარ მოითხოვება, ამიტომ მის კოეფიციენტს ჯერ-ჯერობით პირობას არ დავადებთ.

გამოთვლების სიმარტივისთვის დავუშვათ, რომ $\lambda_3 = \dfrac{1}{6}$, ხოლო λ_4 და λ_5 იყოს წმინდა წარმოსახვითი, ერთმანეთის შეუღლებული რიცხვები. მაშინ $W_2(\tau)$ მიიღებს სახეს

$$W_2(\tau) = \tau A^{1/2}(I + \frac{1}{6}\tau^2 A)^{-1}(I + \alpha\tau^4 A^2)^{-1}. \tag{1.6}$$

ეს აპროქსიმაციები ჩავსვათ (1.4)-(1.5) ფორმულებში. მიღებული მიახლოებითი სქემის საშუალებით ნაპოვი ამონახსნები აღვნიშნოთ $v_k^{(1)}$ -ითა და $v_k^{(2)}$ -ით. მივიღებთ სქემას:

$$v_k^{(1)} = W_1(\tau)v_{k-1}^{(1)} + W_2(\tau)A^{-1/2}v_{k-1}^{(2)}, \tag{1.7}$$

$$v_k^{(2)} = -W_2(\tau)A^{1/2}v_{k-1}^{(1)} + W_1(\tau)v_{k-1}^{(2)}, \tag{1.8}$$

სადაც $k = 1, 2, ..., n$, $v_0^{(1)} = \varphi_0$, $v_0^{(2)} = \varphi_1$.

$v_k^{(1)}$ გამოვაცხადოთ $u(t)$ -ს მიახლოებით მნიშვნელობად $t = t_k$ წერტილში, ხოლო $v_k^{(2)}$ – $u'(t)$ -ს მნიშვნელობად იმავე წერტილში.

(1.4) ტოლობის ორივე მხარეს მოვდოთ $A^{1/2}$ ოპერატორი და მიღებული სისტემა ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$w_k = U(\tau)w_{k-1}, k = 1, 2, ..., n, \tag{1.9}$$

სადაც

$$w_k = \begin{pmatrix} A^{1/2}u(t_k) \\ u'(t_k) \end{pmatrix}$$

და

$$U(\tau) = \begin{pmatrix} \cos(\tau A^{1/2}) & \sin(\tau A^{1/2}) \\ -\sin(\tau A^{1/2}) & \cos(\tau A^{1/2}) \end{pmatrix}.$$

ანალოგიურად, მიახლოებითი სქემისთის გვექნება:

$$v_k = V(\tau) v_{k-1}, \; k = 1, 2, ..., n, \tag{1.10}$$

სადაც

$$v_k = \begin{pmatrix} A^{1/2} v_k^{(1)} \\ v_k^{(2)} \end{pmatrix}$$

და

$$V(\tau) = \begin{pmatrix} W_1(\tau) & W_2(\tau) \\ -W_2(\tau) & W_1(\tau) \end{pmatrix}.$$

ცხადია, $U(\tau)$ ოპერატორი მოქმედებს დეკარტულ ნამრავლში $H \times H$. შევნიშნოთ, რომ $\{U(t)\}$ განსაზღვრულია ნებისმიერი t-სთვის $(-\infty < t < +\infty)$ და წარმოადგენს ოპერატორთა უნიტარულ ჯგუფს, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

$$U(t)U(s) = U(t+s)$$
$$U(0) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

ნაშრომში შემოთავაზებულია მეთოდი, რომლითაც ვახდენთ $U(\tau)$ ოპერატორის აპროქსიმაციას ისეთი მატრიცა ოპერატორით, რომლის ელემენტები გამოისახება A ოპერატორის რეზოლვენტების საშუალებით და ამასთან მააპროქსიმებელი მატრიცა-ოპერატორის ნორმა არ აღემატება ერთს. კერძოდ, $V(\tau)$ ოპერატორი ახდენს $U(\tau)$ ოპერატორის აპროქსიმაციას.

2. პადეს აპროქსიმაცია

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ფუნქცია მწკრივის სახით შემდეგი ფორმით:

$$f\left(z\right)=\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \tag{2.1}$$

პადეს აპროქსიმაცია არის რაციონალური ფუნქცია

$$\left[\frac{L}{M}\right]=\frac{a_0+a_1z+\ldots+a_L z^L}{b_0+b_1z+\ldots+b_M z^M} \tag{2.2}$$

რომლის შესაბამისი მაკლორენის მწკრივი (1.1)-ში მოცემულ მწკრივს ემთხვევა რაც შეიძლება დიდი სიზუსტით.

შევნიშნოთ, რომ მრიცხველის $L+1$ და მნიშვნელის $M+1$კოეფიციენტს შეიძლება საერთო მამრავლი ჰქონდეს (და იკვეცებოდეს). კოეფიციენტების $L+M+2$-ეულის ცალსახობისა და, შესაბამისად, ფუნქციის ზუსტი განსაზღვრისთვის შემოვიტანოთ პირობა, რომლის თანახმად $b_0=1$ყოველთვის. ამრიგად, გვაქვს $L+M+1$ უცნობი კოეფიციენტი. ინტუიცია გვკარნახობს, რომ პადეს აპროქსიმაცია $\left[\frac{L}{M}\right]$ f-ის მაკლორენის მწკრივს უნდა ემთხვეოდეს L+M რიგამდე, რასაც მოგვიანებით დავამტკიცებთ კიდეც. ფორმალურად,

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i=\frac{a_0+a_1z+\ldots+a_L z^L}{b_0+b_1z+\ldots+b_M z^M}+O\left(z^{L+M+1}\right) \tag{2.3}$$

მაგალითად, თუ

$$f(z)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}z+\frac{1}{6}z^2-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n}z^{n-1}+\cdots$$

მაშინ

$$\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{1/2}{1}=f(z)+O(z)\,,$$

$$\left[\frac{0}{1}\right]=\frac{1/2}{1+\frac{1}{2}z}=f(z)+O(z^2)\,,$$

$$\left[\frac{1}{0}\right] = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}z}{1} = f(z) + O(z^2)\,,$$

$$\left[\frac{1}{1}\right] = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{12}z}{1 + \frac{2}{3}z} = f(z) + O(z^3)\,.$$

უცნობი კოეფიციენტების საპოვნელად, პირველ რიგში, (2.3) ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ რაციონალური ფუნქციის მნიშვნელზე. გვექნება

$$(b_0 + b_1 z + \cdots + b_M z^M)(c_0 + c_1 z + \cdots) = a_0 + a_1 + \cdots + a_L + O(z^{L+M+1}) \qquad (2.4)$$

$z^{L+1}, z^{L+2}, \ldots, z^{L+M}$ -ისთვის კოეფიციენტების შედარებითა და გატოლებით გვექნება:

$$\begin{aligned}
&b_M c_{L-M+1} + b_{M-1} c_{L-M+2} + \ldots + b_0 c_{L+1} = 0 \\
&b_M c_{L-M+2} + b_{M-1} c_{L-M+3} + \ldots + b_0 c_{L+2} = 0 \\
&\ldots \\
&b_M c_L + b_{M-1} c_{L+1} + \ldots + b_0 c_{L+M} = 0
\end{aligned} \qquad (2.5)$$

(უარყოფითი k-ებისთვის ვუშვებთ, რომ $c_k = 0$)

როგორც გვახსოვს, $b_0 = 1$. ამის გათვალისწინებით გადავწეროთ (2.5) M-უცნობიან M განტოლებათა სისტემა შემდეგი მატრიცული ფორმით

$$\begin{pmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & \cdots & c_L \\ c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & \cdots & c_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_L & c_{L+1} & \cdots & c_{L+M-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_M \\ b_{M-1} \\ \cdots \\ b_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_{L+1} \\ c_{L+2} \\ \cdots \\ c_{L+M} \end{pmatrix} \qquad (2.6)$$

აქედან b_i, $i = 1, 2, \ldots, M$ კოეფიციენტებს ადვილად ვიპოვით. რაც შეეხება a_k, $k = 0, 1, \ldots, L$ კოეფიციენტებს, მათ საპოვნელად გამოვიყენებთ (2.4)-ს. $1, z, z^2, \ldots, z^L$ -ის შესაბამისი კოეფიციენტების გატოლებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
a_0 &= c_0 \\
a_1 &= c_1 + b_1 c_0 \\
a_2 &= c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 \\
&\vdots \\
a_L &= c_L + \sum_{i=1}^{\min(L,M)} b_i c_{L-i}
\end{aligned} \qquad (2.7)$$

(2.6) და (2.7) განტოლებებს პადეს განტოლებები ეწოდება და განსაზღვრავენ, შესაბამისად, პადეს აპროქიმაციის მნიშვნელსა და მრიცხველს. ამრიგად, ავაგეთ პადეს აპროქსიმაცია $\left[\dfrac{L}{M}\right]$, რომელიც მოცემულ მწკრივს შეესაბამება z^{L+M} ხარისხამდე.

(2.6), (2.7) განტოლებები საშუალებას გვაძლევს, ავაგოთ პადეს აპრქოსიმაცია. მაგრამ მისი კრებადობის საკითხის შესწავლა ცალკე ამოცანაა. თუ ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსია $|z| = R$, მაშინ, როგორც ვიცით, თუ $|z| < R$, მწკრივი კრებადია, ხოლო თუ $|z| > R$, მწკრივი განშლადია. თუ $R = \infty$, მაშინ ფუნქცია ანალიზურია და მწკრივის ჯამი პირდაპირ გვაძლევს $f(z)$ -ს ნებისმიერი z -ისთვის.

იმ შემთხვევაში, როცა $R = 0$, ხარისხოვანი მწრკივი, რასაკვირველია, მხოლოდ ფორმალურია; ის შეიცავს რაღაც ინფორმაციას $f(z)$ -ზე, მაგრამ არაა ცხადი, როგორ შეიძლება ამ ინფორმაციის გამოყენება. მიუხედავად ამისა, თუ ფორმალური ხარისხოვანი მწკრივის პადეს აპროქსიმაციების მიმდევრობა კრებადია $g(z)$ ფუნქციისკენ, $z \in D$, მაშინ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $g(z)$ არის ფუნქცია მოცემული ხარისხოვანი მწკრივით.

თუ მოცემული ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია ფუნქციისაკენ $|z| < R$-ში, სადაც $0 < R < \infty$, მაშინ პადეს აპროქსიმაცია შესაძლოა კრებადი იყოს R რადიუსის გარეთაც. იმისათვის, რომ ვაჩვენოთ, რამდენად კარგად მუშაობს პადეს აპრქოსიმაცია ბუნებრივად, განვიხილოთ მაგალითი:

$$f(z) = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}z}{1+2z}} = 1 - \frac{3}{4}z + \frac{39}{32}z^2 - \dots$$

[1/1]-ის გამოსათვლელად (2.6) ფორმულიდან გვაქვს

$$(-\frac{3}{4})b_1 = -\frac{39}{32}$$

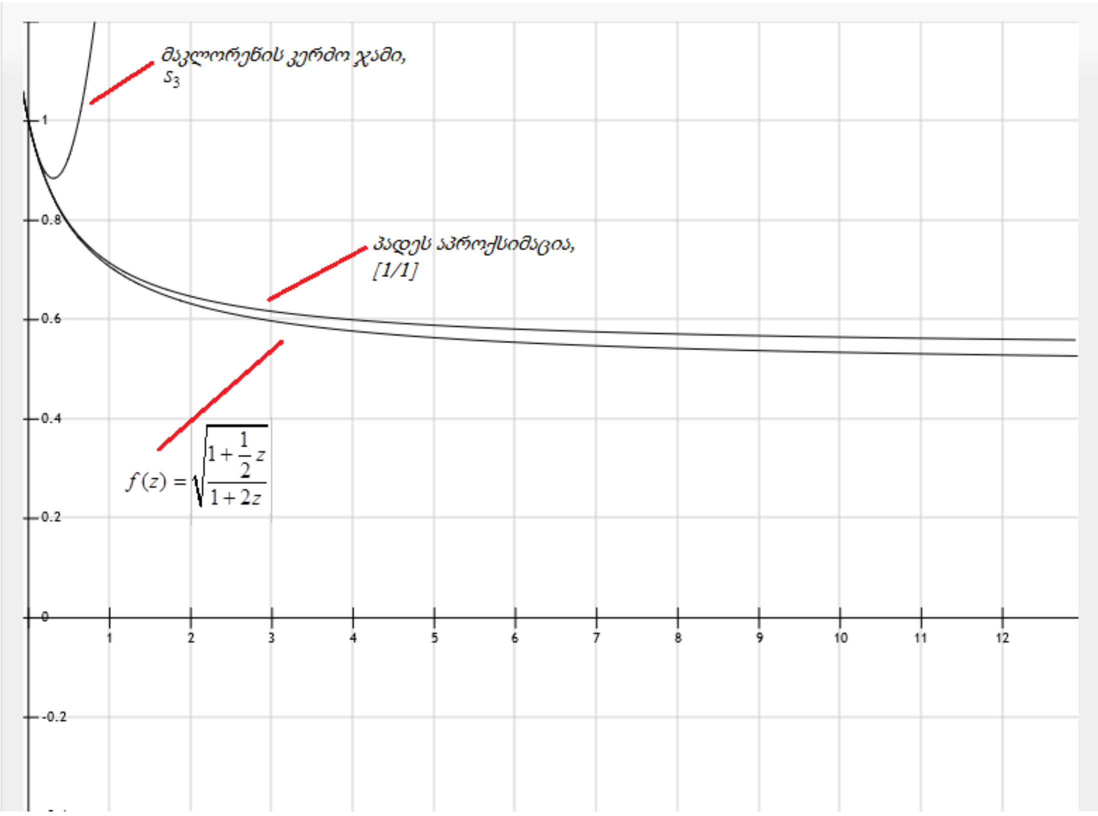
აქედან, $b_1 = \frac{13}{8}$. ფორმულა (2.7) კი გვაძლევს $a_0 = 1$ და $a_1 = \frac{7}{8}$. მართლაც,

$$(1+\frac{13}{8}z)(1-\frac{3}{4}z+\frac{39}{32}z^2) = 1+\frac{7}{8}z+O(z^3)$$

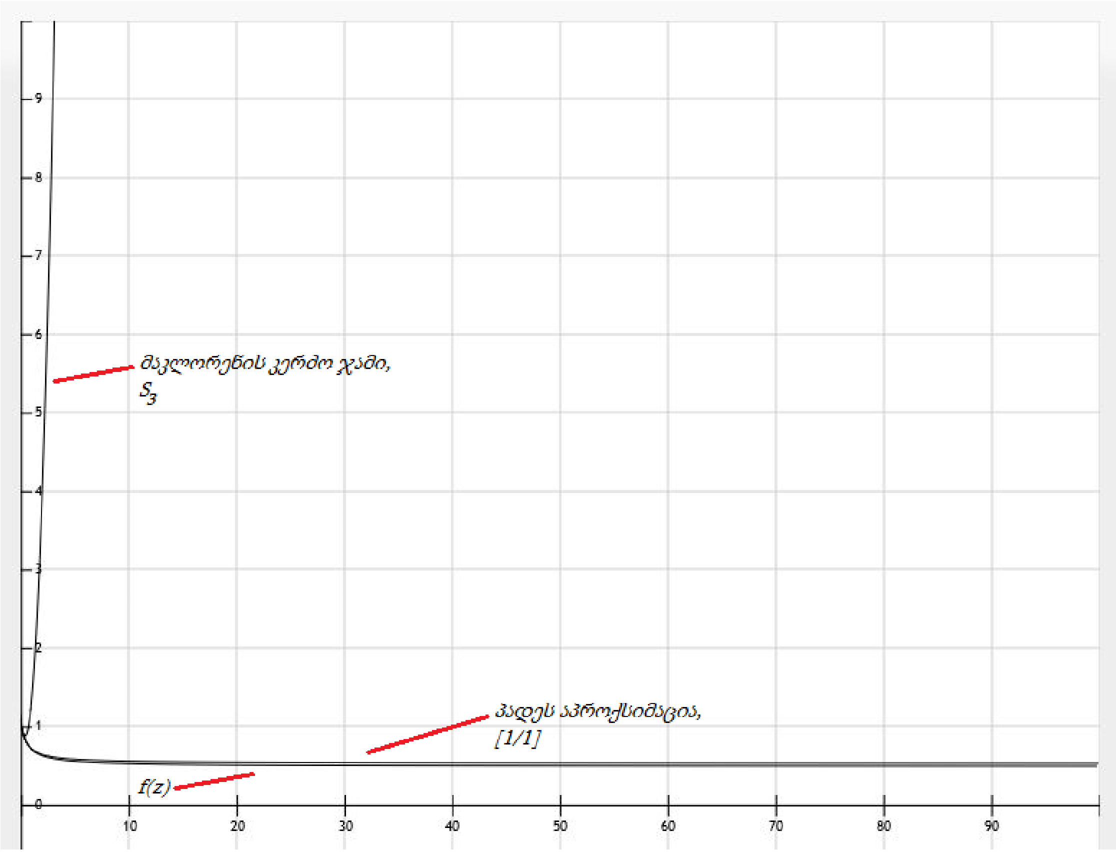
გვაქვს

$$[1/1] = \frac{1+\frac{7}{8}z}{1+\frac{13}{8}z}.$$

თვალსაჩინოებისთვის, შემდეგ სურათებზე შედარებულია ამ სამი ფუნქციის გრაფიკი: მოცემული ფუნქცია, მაკლორენის მწკრივის კერძო ჯამი და პადეს აპროქსიმაცია



სურ. 2. 1



სურ. 2. 2

უსასრულობაში გვაქვს $f(\infty) = 0.5$ და $[1/1](\infty) = \dfrac{7}{13} = 0.54...$ რაც ნიშნავს მხოლოდ 8%-იან ცდომილებას უსასრულობაში, ეს კი ძალიან კარგი სიზუსტეა მიახლოებითი ამონახსნისთვის მწკრივის მხოლოდ 3 წევრის გამოყენების პირობებში.

ყურადღება უნდა გავამახვილოთ ერთ მომენტზე - პადეს აპროქსიმაციის გამოთვლა მოითხოვს იმაზე დიდ რიცხვით სიზუსტეს, ვიდრე ეს ერთი შეხედვით შეიძლება მოგვეჩვენოს. პადეს აპროქსიმაცია იყენებს კოეფიციენტებს შორის სხვაობას დიდ მანძილზე ექსტრაპოლაციისთვის, ამისთვის კი საჭიროა საწყისი კოეფიციენტების მოძებნა ძალიან მაღალი სიზუსტით.

აქამდე მხოლოდ ვუშვებდით, რომ პადეს აპროქსიმაციის გამოთვლა შესაძლებელია (2.6), (2.7) ფორმულებით, თუმცა ამისთვის რაიმე კონკრეტული მეთოდი არ შემოგვითავაზებია. (2.2)-ის მნიშვნელის საპოვნელად, $b_0, b_1, ..., b_M$ კოეფიციენტები შეგვიძლია გამოვთვალოთ (2.6)-იდან კრამერის მეთოდის გამოყენებით.

$Q^{\left[\frac{L}{M}\right]}(z)$ აღნიშვნა შევუსაბამოთ მრავალწევრს, რომელიც განიზასზღვრება შემდეგი დეტერმინანტით:

$$Q^{\left[\frac{L}{M}\right]}(z)=\begin{vmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & \cdots & c_L & c_{L+1} \\ c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & \cdots & c_{L+1} & c_{L+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_L & c_{L+1} & \cdots & c_{L+M-1} & c_{L+M} \\ z^M & z^{M-1} & \cdots & z & 1 \end{vmatrix} \tag{2.8}$$

გავიხსენოთ, რომ $c_j = 0$, როცა $j < 0$, და განვიხილოთ ნამრავლი:

$$Q^{\left[\frac{L}{M}\right]}(z)\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i = \begin{vmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & \cdots & c_L & c_{L+1} \\ c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & \cdots & c_{L+1} & c_{L+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_L & c_{L+1} & \cdots & c_{L+M-1} & c_{L+M} \\ \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^{M+i} & \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^{M+i-1} & \cdots & \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^{i+1} & \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^{i} \end{vmatrix}$$

მოცემული მწკრივის საწყისი წევრებით განვსაზღვროთ

$$P^{\left[\frac{L}{M}\right]}(z)=\begin{vmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & \cdots & c_L & c_{L+1} \\ c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & \cdots & c_{L+1} & c_{L+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_L & c_{L+1} & \cdots & c_{L+M-1} & c_{L+M} \\ \sum_{i=0}^{L-M} c_i z^{M+i} & \sum_{i=0}^{L-M+1} c_i z^{M+i-1} & \cdots & \sum_{i=0}^{L-1} c_i z^{1+i} & \sum_{i=0}^{L} c_i z^{i} \end{vmatrix} \tag{2.9}$$

ახლა კი დავამტკიცოთ

თეორემა 2.1. *(2.8)-(2.9) ფორმულებით განსაზღვრული მრავალწევრებისთვის სამართლიანია შეფასება:*

$$Q^{\left[\frac{L}{M}\right]}(z)\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i - P^{\left[\frac{L}{M}\right]}(z) = O(z^{L+M+1}) \, . \tag{2.10}$$

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ $\deg\left\{P^{\left[\frac{L}{M}\right]}\right\} \le L$, $\deg\left\{Q^{\left[\frac{L}{M}\right]}\right\} \le M$, ხოლო ნაშთისთვის გვაქვს

$$Q^{\left[\frac{L}{M}\right]}(z)\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i - P^{\left[\frac{L}{M}\right]}(z) = \begin{vmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & \cdots & c_L & c_{L+1} \\ c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & \cdots & c_{L+1} & c_{L+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_L & c_{L+1} & \cdots & c_{L+M-1} & c_{L+M} \\ \sum\limits_{i=L+1}^{\infty} c_i z^{M+i} & \sum\limits_{i=L+2}^{\infty} c_i z^{M+i-1} & \cdots & \sum\limits_{i=L+M}^{\infty} c_i z^{i+1} & \sum\limits_{i=L+M+1}^{\infty} c_i z^{i} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} z^{L+M+i} \begin{vmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & \cdots & c_L & c_{L+1} \\ c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & \cdots & c_{L+1} & c_{L+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_L & c_{L+1} & \cdots & c_{L+M-1} & c_{L+M} \\ c_{L+i} & c_{L+i+1} & \cdots & c_{L+M+i-1} & c_{L+M+i} \end{vmatrix} \qquad (2.11)$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

დასასრულისთვის, განვიხილოთ დეტერმინანტი

$$Q^{\left[\frac{L}{M}\right]}(0) = \begin{vmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & \cdots & c_L \\ c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & \cdots & c_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_L & c_{L+1} & \cdots & c_{L+M-1} \end{vmatrix}$$

შევნიშნოთ, რომ თუ $Q^{\left[\frac{L}{M}\right]}(0) \ne 0$, მაშინ (2.6) სისტემა ამოხსნადია და (2.8) გამოსახულებით მოცემული ამონახსნი ცალსახაა. დამატებით, დეტერმინანტის ნულისგან განსხვავებულობა საშუალებას გვაძლევს (2.10) გავყოთ $Q^{\left[\frac{L}{M}\right]}(z)$-ზე, რის შედეგადაც მივიღებთ:

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i - \frac{P^{\left[\frac{L}{M}\right]}(z)}{Q^{\left[\frac{L}{M}\right]}(z)} = O\left(z^{L+M+1}\right),$$

რითიც დამტკიცებულია

თეორემა 2.2. *(იაკობი) თუ* $Q^{\left[\frac{L}{M}\right]}(0) \neq 0$, *მაშინ* $\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$ *-ისთვის პადეს აპროქსიმაცია* $\left[\frac{L}{M}\right]$ *განისაზღვრება ტოლობით:*

$$\left[\frac{L}{M}\right] = \frac{P^{\left[\frac{L}{M}\right]}(z)}{Q^{\left[\frac{L}{M}\right]}(z)} \tag{2.12}$$

სადაც $P^{\left[\frac{L}{M}\right]}(z)$ *და* $Q^{\left[\frac{L}{M}\right]}(z)$ *განისაზღვრებიან (2.8) და (2.9) ფორმულებით.*

ხშირად პადეს აპროქსიმაციას იძლევიან ცხრილის სახით, რომელსაც პადეს ცხრილი ეწოდება.

M \ L	0	1	2	. . .
0	[0/0]	[1/0]	[2/0]	. . .
1	[0/1]	[1/1]	[2/1]	. . .
2	[0/2]	[1/2]	[2/2]	. . .
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

ცხრილი 1. პადეს ცხრილი ზოგადი სახით

ცხრილ 2-ში მოცემულია პადეს აპროქსიმაცია $\exp(z)$ ფუნქციისთვის.

L \ M	0	1	2
0	$\frac{1}{1}$	$\frac{1+z}{1}$	$\frac{2+2z+z^2}{2}$
1	$\frac{1}{1-z}$	$\frac{2+z}{2-z}$	$\frac{6+4z+z^2}{6-2z}$
2	$\frac{2-2z+z^2}{2}$	$\frac{6+2z}{6-4z+z^2}$	$\frac{12+6z+z^2}{12-6z+z^2}$

ცხრილი 2. ვიზუალური მიზეზების გამო, b0 კოეფიციენტები ერთის ტოლი მხოლოდ ორგან ავიღეთ

ექსპონენციალური ფუნქციის მაკლორენის მწკრივის c_i კოეფიციენტები საკმარისად მარტივია იმისთვის, რომ პადეს აპროქსიმაციის მრიცხველი და მნიშვნელი ცხადი სახით მოიძებნოს. ჩვენ გამოვთვლით მნიშვნელს $Q^{\left[\frac{L}{M}\right]}(z)$. მრიცხველი გამოითვლება ძალიან მარტივი და ელეგანტური გზით - იმ ფაქტზე დაყრდნობით, რომ $\exp(-z)=\dfrac{1}{\exp(z)}$.

გამოვთვალოთ

$$Q^{\left[\frac{L}{M}\right]}(z)=\begin{vmatrix} \frac{1}{(L-M+1)!} & \frac{1}{(L-M+2)!} & \cdots & \frac{1}{L!} & \frac{1}{(L+1)!} \\ \frac{1}{(L-M+2)!} & \frac{1}{(L-M+3)!} & \cdots & \frac{1}{(L+1)!} & \frac{1}{(L+2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{L!} & \frac{1}{(L+1)!} & \cdots & \frac{1}{(L+M-1)!} & \frac{1}{(L+M)!} \\ z^M & z^{M+1} & \cdots & z & 1 \end{vmatrix}$$

(2.13)

(2.1)-ის მუდმივი კოეფიციენტის გამოთვლიდან დაწყება უფრო ადვილია. ასეც მოვიქცეთ. გამოვთვალოთ $C(L/M)\equiv Q^{[L/M]}(0)$.

$$C\left(\frac{L}{M}\right)=\begin{vmatrix} \frac{1}{(L-M+1)!} & \frac{1}{(L-M+2)!} & \cdots & \frac{1}{L!} \\ \frac{1}{(L-M+2)!} & \frac{1}{(L-M+3)!} & \cdots & \frac{1}{(L+1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{L!} & \frac{1}{(L+1)!} & \cdots & \frac{1}{(L+M-1)!} \end{vmatrix}$$

(2.14)

ვუშვებთ, რომ $L\geq M-1$. თუ ეს არ სრულდება, მაშინ ფაქტორიალის ნაცვლად უნდა ავიღოთ გამა ფუნქცია შესაბამის წერტილში, რათა ჩვენი ანალიზი კორექტული იყოს.

ყოველი სტრიქონიდან მოვაშოროთ მნიშვნელი. ამისათვის დეტერმინანტის გარეთ გავიტანოთ მამრავლი

$$p=\prod_{i=1}^{M}\frac{1}{(L+i-1)!}$$

გვექნება:

$$C\left(\frac{L}{M}\right)=p\begin{vmatrix} \frac{L!}{(L-M+1)!} & \frac{L!}{(L-M+2)!} & \cdots & L & 1 \\ \frac{(L+1)!}{(L-M+2)!} & \frac{(L+1)!}{(L-M+3)!} & \cdots & (L+1) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{(L+M-2)!}{(L-1)!} & \frac{(L+M-2)!}{L!} & \cdots & (L+M-2)! & 1 \\ \frac{(L+M-1)!}{L!} & \frac{(L+M-1)!}{(L+1)!} & \cdots & (L+M-1)! & 1 \end{vmatrix} \qquad (2.15)$$

(2.15) დეტერმინანტს აქვს M სტრიქონი. M -ურ სტრიქონს გამოვაკლოთ $M-1$-ე სტრიქონი, $M-1$-ე სტრიქონს - $M-2$ -ე და ა.შ. გამოვიყენოთ იგივეობა

$$\frac{r!}{s!}-\frac{(r-1)!}{(s-1)!}=(r-s)\frac{(r-1)!}{s!} \qquad (2.16)$$

(2.15)-ის პირველ სვეტში $r-1=M-1$; მე-2 სვეტში – $r-s=M-2$ და ა.შ. ამ ყველაფრის გათვალისწინებით გვექნება:

$$C\left(\frac{L}{M}\right)=p(M-1)!\begin{vmatrix} \frac{L!/(M-1)}{(L-M+1)!} & \frac{L!/(M-2)}{(L-M+2)!} & \cdots & L & 1 \\ \frac{L!}{(L-M+2)!} & \frac{L!}{(L-M+3)!} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{(L+M-3)!}{(L-1)!} & \frac{(L+M-3)!}{L!} & \cdots & 1 & 0 \\ \frac{(L+M-2)!}{L!} & \frac{(L+M-2)!}{(L+1)!} & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=p(-1)^{M-1}(M-1)!\begin{vmatrix} \frac{L!}{(L-M+2)!} & \frac{L!}{(L-M+3)!} & \cdots & 1 \\ \frac{(L+1)!}{(L-M+3)!} & \frac{(L+1)!}{(L-M+4)!} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(L+M-2)!}{L!} & \frac{(L+M-2)!}{(L+1)!} & \cdots & 1 \end{vmatrix} \qquad (2.17)$$

ეს დეტერმინანტი (2.15) დეტერმინანტის იდენტურია იმ განსახვავებით, რომ (2.15)-ის M-ის როლში (2.17)-ში გვევლინება $M-1$. ინდუქციის გამოყენებით ადვილი საჩვენებელია, რომ:

$$C\left(L/M\right)=p\prod_{i=1}^{M}\left(-1\right)^{i-1}\left(i-1\right)!=\left(-1\right)^{M(M-1)/2}\prod_{i=1}^{M}\frac{\left(i-1\right)!}{\left(L+i-1\right)!} \tag{2.18}$$

$M=1$-სთვის გვექნება

$$C\left(L/1\right)=\frac{1}{L!}$$

ხოლო $M=2$-სთვის:

$$C\left(L/1\right)=\begin{vmatrix}\frac{1}{\left(L-1\right)!} & \frac{1}{L!}\\ \frac{1}{L!} & \frac{1}{\left(L+1\right)!}\end{vmatrix}=\frac{-1}{L!\left(L+1\right)!}$$

ის ოპერაციები, რომლებიც გამოვიყენეთ (2.14)-დან (2.18)-ის მისაღებად, გამოგვადგება (2.13)-ისთვისაც, თუმცა ეს შემთხვევა ცოტა უფრო გართულებულია. განვიხილოთ $Q^{[L/M]}\left(z\right)$-ში $\left(-z\right)^{j}$-ს კოეფიციენტები, რომელიც არის:

$$\left(-1\right)^{j}q_{j}^{[L/M]}=\begin{vmatrix}\frac{1}{\left(L-M+1\right)!} & \frac{1}{\left(L-M+2\right)!} & \cdots & \vdots\frac{1}{\left(L-j+1\right)!}\vdots & \cdots & \frac{1}{\left(L+1\right)!}\\ \frac{1}{\left(L-M+2\right)!} & \frac{1}{\left(L-M+3\right)!} & \cdots & \vdots\frac{1}{\left(L-j+2\right)!}\vdots & \cdots & \frac{1}{\left(L+2\right)!}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\quad\vdots\quad\vdots & \iddots & \vdots\\ \frac{1}{L!} & \frac{1}{\left(L+1\right)!} & \cdots & \vdots\frac{1}{\left(L-j+M\right)!}\vdots & \cdots & \frac{1}{\left(L+M\right)!}\end{vmatrix} \tag{2.19}$$

M-ური რიგის დეტერმინანტი, სადაც წყვეტილებით გამოტოვებული სვეტი წაშლილია. განვსაზღვროთ

$$p^{'}=\prod_{i=1}^{M}\frac{1}{\left(L+i-1\right)!},$$

მაშინ

$$(-1)^j q_j^{[L/M]} = p' \begin{vmatrix} \dfrac{(L+1)!}{(L-M+1)!} & \cdots & \vdots \dfrac{(L+1)!}{(L-j+1)!} \vdots & \cdots & 1 \\ \dfrac{(L+2)!}{(L-M+2)!} & \cdots & \vdots \dfrac{(L+2)!}{(L-j+2)!} \vdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \iddots & \vdots \\ \dfrac{(L+M)!}{L!} & \cdots & \vdots \dfrac{(L+M)!}{(L-j+M)!} \vdots & \cdots & 1 \end{vmatrix} \tag{2.20}$$

სტრიქონების გამოკლებითა და (2.16) იგივეობის გამოყენებით მივიღებთ $M-1$ რიგის დეტერმინანტს:

$$(-1)^j q_j^{[L/M]} = p' \begin{vmatrix} \dfrac{(L+1)!}{(L-M+2)!} & \cdots & \vdots \dfrac{(L+1)!}{(L-j+2)!} \vdots & \cdots & 1 \\ \dfrac{(L+2)!}{(L-M+2)!} & \cdots & \vdots \dfrac{(L+2)!}{(L-j+2)!} \vdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \iddots & \vdots \\ \dfrac{(L+M-1)!}{L!} & \cdots & \vdots \dfrac{(L+M-1)!}{(L-j+M)!} \vdots & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$

რომელიც (2.20) დეტერმინანტის ანალოგიურია. (2.20)-დან მოვახდინოთ ასეთი რედუქცია j-ჯერ. გვექნება:

$$(-1)^j q_j^{[L/M]} = \pm \frac{p'}{j!} \prod_{i=1}^{j} (M-i+1)! \begin{vmatrix} \dfrac{(L+1)!}{(L-M+j+1)!} & \cdots & \dfrac{(L+1)!}{L!} & \vdots & 1 \\ \dfrac{(L+2)!}{(L-M+j+2)!} & \cdots & \dfrac{(L+2)!}{(L+1)!} & \vdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{(L+M-j)!}{L!} & \cdots & \dfrac{(L+M-j)!}{(L+M-j-1)!} & \vdots & 1 \end{vmatrix}$$

ყოველი სტრიქონიდან საერთო მამრავლის (ბოლო წევრის) გატანით მივიღებთ:

$$(-1)^j q_j^{[L/M]} = \pm \frac{p'}{j!} \frac{(L+M-j)!}{L!} \prod_{i=1}^{j} (M-i+1)! \begin{vmatrix} \dfrac{L!}{(L-M+j+1)!} & \cdots & 1 \\ \dfrac{(L+1)!}{(L-M+j+2)!} & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{(L+M-j-1)!}{L!} & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

ზემოთ განხილული მეთოდებითა, და მათ შორის (2.16) იგივეობის გამოყენებით, საბოლოოდ მივალთ შემდეგ სახემდე:

$$(-1)^j q_j^{[L/M]} = \pm\left\{\prod_{i=1}^{M}\frac{1}{(L+i)!}\right\}\frac{(L+M-j)!}{L!\,j!}\left\{\prod_{i=1}^{j}(M-i+1)\right\}\prod_{i=1}^{M-j-1} i! = \\ = \pm\frac{(L+M-j)!}{L!\,j!(M-j)!}\prod_{i=1}^{M}\frac{i!}{(L+i)!} \qquad (2.21)$$

ადვილი დასანახია, რომ (2.21)-ის მარჯვენა მხარეს იგივე ნიშანი აქვს, რაც (2.18)-ისას, რადგანაც (2.14) და (2.19) დეტერმინანტებს აქვთ ერთი და იგივე რიგი, და რეკურსიულადაც ორივეს ზედა მარჯვენა ელემენტის მიხედვით ვშლიდით. ამრიგად,

$$(-1)^j q_j^{[L/M]} = (-1)^{M(M-1)/2}\frac{(L+M-j)!}{L!\,j!(M-j)!}\prod_{i=1}^{M}\frac{i!}{(L+i)!}. \qquad (2.22)$$

შევნიშნოთ, რომ (2.18) გვევლინება (2.22)-ის კერძო შემთხვევად, როცა $j=0$. ასევე, (2.18)-თან შედარების შედეგად გვაქვს, რომ

$$q_j^{[L/M]} = (-1)^j C(L/M)\frac{(L+M-j)!}{(L+M)!}\frac{M!}{(M-j)!}\frac{1}{j!}$$

და

$$Q^{[L/M]}(z) = C(L/M)\frac{(L+M-j)!}{(L+M)!}\frac{M!}{(M-j)!}\frac{(-z)^j}{j!} =$$

$$= C(L/M)\left\{1+\frac{M}{L+M}\frac{(-z)}{1!}+\frac{M(M-1)}{(L+M)(L+M-1)}\frac{(-z)^2}{2!}+\ldots\right\} =$$

$$= C(L/M)\left\{1+\frac{-M}{-L-M}\frac{(-z)}{1!}+\frac{-M(-M+1)}{(-L-M)(-L-M+1)}\frac{(-z)^2}{2!}+\ldots\right\} =$$

$$C(L/M)\,{}_1F_1(-M,-L-M;-z).$$

აქედან კი, (2.6) მეთოდის გამოყენებით მიიღება

$$P^{[L/M]}(z) = C(L/M)\,{}_1F_1(-L,-L-M;z),$$

შესაბამისად, $\exp(z)$ ფუნქციის პადეს აპროქსიმაცია იქნება

$$[L/M] = \frac{{}_1F_1(-L,-L-M;z)}{{}_1F_1(-M,-L-M;-z)}.$$

3. ცდომილების შეფასება ერთგვაროვანი ამოცანისთვის

მოვამზადოთ ნიადაგი პირველ თავში მიღებული სქემის მდგრადობის და კრებადობის დასამტკიცებლად.

პირველ რიგში, შემოვიტანოთ W_1 და W_2 ოპერატორ-ფუნქციების შესაბამისი სკალარული ფუნქციები $r_1(x)$ და $r_2(x)$, რომლებიც მიიღება, თუ $W_1(\tau)$-ისა და $W_2(\tau)$-ის წარმოდგენაში $\tau A^{1/2}$ -ს შევცვლით x -ით:

$$r_1(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4}$$

$$r_2(x)=\frac{x}{(1+\frac{1}{6}x^2)(1+\alpha x^4)}$$

W_1 და W_2 ოპერატორ-ფუნქციებს მოვთხოვოთ, ნორმის ტერმინებში დააკმაყოფილონ ის პირობები, რა პირობებსაც აკმაყოფილებენ სინუს- და კოსინუს-ოპერატორ-ფუნქციები. კერძოდ, $\left\|W_1\left(\tau\right)\right\|\le 1$, $\left\|W_2\left(\tau\right)\right\|\le 1$ და შესაბამისი $r_1(x)$ და $r_2(x)$ სკალარული ფუნქციებისთის შესრულებული იყოს პირობა:

$$r_1^2(x)+r_2^2(x)=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{6}x^2\right)^2\left(1+\alpha x^4\right)^2}\le 1$$

x^2 აღვნიშნოთ t-თი და შევისწავლოთ, რა შეზღუდვები უნდა იყოს α -ზე.

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}t+\frac{5}{24}t^2\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{6}t\right)^2\left(1+\alpha t^2\right)^2}\le 1$$

$$\frac{1+\frac{1}{3}t+\left(\frac{1}{36}+2\alpha\right)t^2+\frac{2}{3}\alpha t^3+\left(\frac{1}{18}\alpha+\alpha^2\right)t^4+\frac{1}{3}\alpha^2t^5+\frac{1}{36}\alpha^2t^6+t+t^2+\frac{2}{3}t^3+\frac{5}{24}t^4+\frac{25}{576}t^5}{\left(1+\frac{1}{2}t+\frac{5}{24}t^2\right)^2\left(1+\frac{1}{6}t\right)^2\left(1+\alpha t^2\right)^2}\le 1$$

$$\frac{1+\frac{4}{3}t+\left(\frac{37}{36}+2\alpha\right)t^2+\left(\frac{2}{3}\alpha+\frac{2}{3}\right)t^3+\left(\frac{1}{18}\alpha+\alpha^2+\frac{5}{24}\right)t^4+\left(\frac{1}{3}\alpha^2+\frac{25}{576}\right)t^5+\frac{1}{36}\alpha^2t^6}{1+\frac{4}{3}t+\left(\frac{37}{36}+2\alpha\right)t^2+\left(\frac{33}{72}+\frac{8}{3}\alpha\right)t^3+\left(\frac{227}{1728}+\frac{37}{18}\alpha+\alpha^2\right)t^4+\left(\frac{35}{1728}+\frac{33}{36}\alpha+\frac{4}{3}\alpha^2\right)t^5+\left(\frac{2905}{20736}+\frac{107}{864}\alpha+\frac{37}{36}\alpha^2\right)t^6+O\left(t^7\right)}\le 1$$

$$\begin{aligned}
&1+\frac{4}{3}t+\left(\frac{37}{36}+2\alpha\right)t^2+\left(\frac{2}{3}\alpha+\frac{2}{3}\right)t^3+\\
&+\left(\frac{1}{18}\alpha+\alpha^2+\frac{5}{24}\right)t^4+\left(\frac{1}{3}\alpha^2+\frac{25}{576}\right)t^5+\frac{1}{36}\alpha^2t^6\le\\
&\le 1+\frac{4}{3}t+\left(\frac{37}{36}+2\alpha\right)t^2+\left(\frac{33}{72}+\frac{8}{3}\alpha\right)t^3+\\
&+\left(\frac{227}{1728}+\frac{37}{18}\alpha+\alpha^2\right)t^4+\left(\frac{35}{1728}+\frac{33}{36}\alpha+\frac{4}{3}\alpha^2\right)t^5+\left(\frac{2905}{20736}+\frac{107}{864}\alpha+\frac{37}{36}\alpha^2\right)t^6+O\left(t^7\right)
\end{aligned}$$

აქედან გვექნება:

$$\begin{cases}
\frac{2}{3}\alpha+\frac{2}{3}\le\frac{33}{72}+\frac{8}{3}\alpha\\
\frac{1}{18}\alpha+\alpha^2+\frac{5}{24}\le\frac{227}{1728}+\frac{37}{18}\alpha+\alpha^2\\
\frac{1}{3}\alpha^2+\frac{25}{576}\le\frac{35}{1728}+\frac{33}{36}\alpha+\frac{4}{3}\alpha^2\\
\frac{1}{36}\alpha^2\le\frac{2905}{20736}+\frac{107}{864}\alpha+\frac{37}{36}\alpha^2
\end{cases}$$

ამ უტოლობათა სისტემის ამოხსნით მივიღებთ $\alpha\ge\frac{5}{48}$.

ამ უკანასკნელისა და (1.6)-ის გათვალისწინებით, $W_2(\tau)$ მივცეთ სახე

$$W_2(\tau)=\tau A^{1/2}(I+\frac{1}{6}\tau^2A)^{-1}(I+\frac{5}{48}\tau^4A^2)^{-1}.$$

გავიხსენოთ, რომ

$$W_1\left(\tau\right)=\left(I+\bar{\lambda}\tau^2A\right)^{-1}\left(I+\lambda\tau^2A\right)^{-1},$$

სადაც $\lambda = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{21}}{12}$.

ახლა გავშალოთ $W_1(\tau)$ და ამოვწეროთ ნაშთი.

$$\left(I+\bar{\lambda}\tau^2 A\right)^{-1}\left(I+\lambda\tau^2 A\right)^{-1} = \left(I-\bar{\lambda}\tau^2 A+\bar{\lambda}^2\tau^4 A^2-\bar{\lambda}^3\tau^6 A^3\left(I+\bar{\lambda}\tau^2 A\right)^{-1}\right)\left(I+\lambda\tau^2 A\right)^{-1} =$$
$$=\left(I+\lambda\tau^2 A\right)^{-1}-\bar{\lambda}\tau^2 A\left(I+\lambda\tau^2 A\right)^{-1}+\bar{\lambda}^2\tau^4 A^2\left(I+\lambda\tau^2 A\right)^{-1}-\bar{\lambda}^3\tau^6 A^3\left(I+\bar{\lambda}\tau^2 A\right)^{-1}\left(I+\lambda\tau^2 A\right)^{-1} =$$
$$=I-\lambda\tau^2 A+\lambda^2\tau^4 A^2-\lambda^3\tau^6 A^3\left(I+\lambda\tau^2 A\right)^{-1}-\bar{\lambda}\tau^2 A\left(I-\lambda\tau^2 A+\lambda^2\tau^4 A^2\left(I+\lambda\tau^2 A\right)^{-1}\right)+$$
$$+\bar{\lambda}^2\tau^4 A^2\left(I-\lambda\tau^2 A\left(I+\lambda\tau^2 A\right)^{-1}\right)-\bar{\lambda}^3\tau^6 A^3\left(I+\bar{\lambda}\tau^2 A\right)^{-1}\left(I+\lambda\tau^2 A\right)^{-1} =$$
$$=I-\lambda\tau^2 A+\lambda^2\tau^4 A^2-\lambda^3\tau^6 A^3\left(I+\lambda\tau^2 A\right)^{-1}-\bar{\lambda}\tau^2 A+\lambda\bar{\lambda}\tau^4 A^2-\lambda^2\bar{\lambda}\tau^6 A^3\left(I+\lambda\tau^2 A\right)^{-1}+$$
$$+\bar{\lambda}^2\tau^4 A^2-\lambda\bar{\lambda}^2\tau^6 A^3\left(I+\lambda\tau^2 A\right)^{-1}-\bar{\lambda}^3\tau^6 A^3\left(I+\bar{\lambda}\tau^2 A\right)^{-1}\left(I+\lambda\tau^2 A\right)^{-1} =$$
$$=I-(\lambda+\bar{\lambda})\tau^2 A+\left(\lambda^2+\lambda\bar{\lambda}+\bar{\lambda}^2\right)\tau^4 A+\tilde{R}_1(\tau),$$

სადაც

$$\tilde{R}_1(\tau)=-\left(\left(\lambda^3+\lambda^2\bar{\lambda}+\lambda\bar{\lambda}^2\right)I+\bar{\lambda}^3\left(I+\bar{\lambda}\tau^2 A\right)^{-1}\right)\left(I+\lambda\tau^2 A\right)^{-1}\tau^6 A^3.$$

შევინატოთ λ-ს და $\bar{\lambda}$-ს მნიშვნელობები $\tilde{R}_1(\tau)$-ში.

$$\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{21}}{12}\right)^3+\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{21}}{12}\right)^2\left(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{21}}{12}\right)+\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{21}}{12}\right)\left(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{21}}{12}\right)^2 =$$
$$=\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{21}}{12}\right)\left(\frac{1}{16}-\frac{21}{144}+i\frac{\sqrt{21}}{24}+\frac{1}{16}+\frac{21}{144}+\frac{1}{16}-i\frac{\sqrt{21}}{24}-\frac{21}{144}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{21}}{12}\right)\left(\frac{1}{16}-\frac{21}{144}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)=\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{21}}{12}\right)\left(\frac{3}{16}-\frac{7}{48}\right)=\frac{1}{24}\lambda$$

$\tilde{R}_1(\tau)$ მიიღებს სახეს

$$\tilde{R}_1(\tau)=-\tau^6 A^3\left(\frac{1}{24}\lambda+\bar{\lambda}^3\left(I+\bar{\lambda}\tau^2 A\right)^{-1}\right)\left(I+\lambda\tau^2 A\right)^{-1}$$

ახლა გავშალოთ

$$W_2(\tau)=\tau A^{1/2}(I+\frac{1}{6}\tau^2 A)^{-1}(I+\frac{5}{48}\tau^4 A^2)^{-1}=\tau A^{1/2}(I+\frac{1}{6}\tau^2 A)^{-1}(I+\lambda_0\tau^2 A)^{-1}(I+\bar{\lambda}_0\tau^2 A)^{-1}$$

სადაც $\lambda_0 = i\frac{\sqrt{15}}{12}$ და ამოვიწეროთ ნაშთი (განვიხილოთ $\tau\sqrt{A}$ -ს გარეშე)

$$\left(I+\frac{1}{6}\tau^2 A\right)^{-1}(I+\lambda_0\tau^2 A)^{-1}(I+\overline{\lambda_0}\tau^2 A)^{-1}=\left(I+\frac{1}{6}\tau^2 A\right)^{-1}(I+\lambda_0\tau^2 A)^{-1}(I-\overline{\lambda_0}\tau^2 A+\overline{\lambda_0}^2\tau^4 A^2(I+\overline{\lambda_0}\tau^2 A)^{-1})=$$

$$=\left(I+\frac{1}{6}\tau^2 A\right)^{-1}(I+\lambda_0\tau^2 A)^{-1}-\overline{\lambda_0}\tau^2 A(I+\frac{1}{6}\tau^2 A)^{-1}(I+\lambda_0\tau^2 A)^{-1}+\overline{\lambda_0}^2\tau^4 A^2\left(I+\frac{1}{6}\tau^2 A\right)^{-1}(I+\lambda_0\tau^2 A)^{-1}(I+\overline{\lambda_0}\tau^2 A)^{-1}=$$

$$=\left(I+\frac{1}{6}\tau^2 A\right)^{-1}\left(I-\lambda_0\tau^2 A+\lambda_0{}^2\tau^4 A^2(I+\lambda_0\tau^2 A)^{-1}\right)-\overline{\lambda_0}\tau^2 A\left(I+\frac{1}{6}\tau^2 A\right)^{-1}\left(I-\lambda_0\tau^2 A(I+\lambda_0\tau^2 A)^{-1}\right)+$$

$$+\overline{\lambda_0{}^2}\tau^4 A^2\left(I+\frac{1}{6}\tau^2 A\right)^{-1}(I+\lambda_0\tau^2 A)^{-1}(I+\overline{\lambda_0}\tau^2 A)^{-1}=$$

$$=\left(I+\frac{1}{6}\tau^2 A\right)^{-1}-\lambda_0\tau^2 A\left(I+\frac{1}{6}\tau^2 A\right)^{-1}+\lambda_0{}^2\tau^4 A^2\left(I+\frac{1}{6}\tau^2 A\right)^{-1}(I+\lambda_0\tau^2 A)^{-1}-\overline{\lambda_0}\tau^2 A\left(I+\frac{1}{6}\tau^2 A\right)^{-1}+$$

$$+\overline{\lambda_0}\lambda_0\tau^4 A^2\left(I+\frac{1}{6}\tau^2 A\right)^{-1}(I+\lambda_0\tau^2 A)^{-1}+\bar{\lambda}_0^2\tau^4 A^2\left(I+\frac{1}{6}\tau^2 A\right)^{-1}(I+\lambda_0\tau^2 A)^{-1}(I+\overline{\lambda_0}\tau^2 A)^{-1}=$$

$$=I-\frac{1}{6}\tau^2 A+\frac{1}{36}\tau^4 A^2\left(I+\frac{1}{6}\tau^2 A\right)^{-1}-\lambda_0\tau^2 A\left(I-\frac{1}{6}\tau^2 A\left(I+\frac{1}{6}\tau^2 A\right)^{-1}\right)+$$

$$+\lambda_0{}^2\tau^4 A^2\left(I+\frac{1}{6}\tau^2 A\right)^{-1}(I+\lambda_0\tau^2 A)^{-1}-\overline{\lambda_0}\tau^2 A\left(I-\frac{1}{6}\tau^2 A\left(I+\frac{1}{6}\tau^2 A\right)^{-1}\right)+$$

$$+\overline{\lambda_0}\lambda_0\tau^4 A^2\left(I+\frac{1}{6}\tau^2 A\right)^{-1}(I+\lambda_0\tau^2 A)^{-1}+\bar{\lambda}_0^2\tau^4 A^2\left(I+\frac{1}{6}\tau^2 A\right)^{-1}(I+\lambda_0\tau^2 A)^{-1}(I+\overline{\lambda_0}\tau^2 A)^{-1}=$$

$$=I-\frac{1}{6}\tau^2 A+\frac{1}{36}\tau^4 A^2\left(I+\frac{1}{6}\tau^2 A\right)^{-1}-\lambda_0\tau^2 A+\frac{1}{6}\lambda_0{}^2\tau^4 A^2\left(I+\frac{1}{6}\tau^2 A\right)^{-1}+$$

$$+\lambda_0{}^2\tau^4 A^2\left(I+\frac{1}{6}\tau^2 A\right)^{-1}(I+\lambda_0\tau^2 A)^{-1}-\overline{\lambda_0}\tau^2 A+\frac{1}{6}\overline{\lambda_0}\tau^4 A^2\left(I+\frac{1}{6}\tau^2 A\right)^{-1}+$$

$$+\overline{\lambda_0}\lambda_0\tau^4 A^2\left(I+\frac{1}{6}\tau^2 A\right)^{-1}(I+\lambda_0\tau^2 A)^{-1}+\overline{\lambda_0}\tau^4 A^2\left(I+\frac{1}{6}\tau^2 A\right)^{-1}(I+\lambda_0\tau^2 A)^{-1}(I+\overline{\lambda_0}\tau^2 A)^{-1}=$$

$$=I-\frac{1}{6}\tau^2 A-(\lambda_0+\overline{\lambda_0})\tau^2 A+\frac{1}{\tau}A^{-1/2}\tilde{R}_2(\tau),$$

ე.ი. $W_2(\tau)$-ს აქვს სახე

$$W_2(\tau)=\tau A^{1/2}-\frac{1}{6}\tau^3 A^{3/2}-\left(\lambda_0+\bar{\lambda}_0\right)\tau^3 A^{3/2}+\tilde{R}_2(\tau)=\tau A^{1/2}-\frac{1}{6}\tau^3 A^{3/2}+\tilde{R}_2(\tau)$$

სადაც

$$\tilde{R}_2(\tau)=\left(\frac{1}{36}I+\left(\left(\lambda_0^2+\bar{\lambda}_0\lambda_0\right)I+\bar{\lambda}_0{}^2\left(I+\bar{\lambda}_0\tau^2 A\right)^{-1}\right)\left(I+\lambda_0\tau^2 A\right)^{-1}\right)\left(I+\frac{1}{6}\tau^2 A\right)^{-1}\tau^5 A^{5/2}=$$

$$=\left(\frac{1}{36}I+\bar{\lambda}_0{}^2\left(I+\bar{\lambda}_0\tau^2 A\right)^{-1}\left(I+\lambda_0\tau^2 A\right)^{-1}\right)\left(I+\frac{1}{6}\tau^2 A\right)^{-1}\tau^5 A^{5/2}$$

ნაშთითი წევრების ნორმებისთვის გვექნება შეფასება

$$\left\|\tilde{R}_1(\tau)\varphi\right\| \le \tau^5\left(\left|\lambda^2+\bar{\lambda}\lambda+\bar{\lambda}^2\right|+|\lambda|^2\left\|\left(I+\bar{\lambda}\tau^2A\right)^{-1}\right\|\right)\left\|\lambda\tau A^{1/2}\left(I+\lambda\tau^2A\right)^{-1}\right\|\left\|A^{5/2}\varphi\right\| \le$$

$$\le \tau^5\left(\left|\left(\lambda+\bar{\lambda}\right)^2-\lambda\bar{\lambda}\right|+|\lambda|^2\left\|\left(I+\bar{\lambda}\tau^2A\right)^{-1}\right\|\right)\left\|A^{5/2}\varphi\right\| \le \frac{1}{4}\tau^5\left\|A^{5/2}\varphi\right\|, \qquad \varphi\in D\left(A^{1/2}\right)$$

$$\left\|\tilde{R}_2(\tau)\varphi\right\| = \tau^5\left(\frac{1}{36}+\left|\bar{\lambda}_0^{\,2}\right|\left\|\left(I+\bar{\lambda}_0\tau^2A\right)^{-1}\right\|\left\|\left(I+\lambda_0\tau^2A\right)^{-1}\right\|\right)\left\|\left(I+\frac{1}{6}\tau^2A\right)^{-1}\right\|\left\|A^{5/2}\varphi\right\| \le$$

$$\le \tau^5\left(\frac{1}{36}+\frac{15}{144}\right)\left\|A^{5/2}\varphi\right\| = \frac{19}{144}\tau^5\left\|A^{5/2}\varphi\right\|, \qquad \varphi\in D\left(A^{5/2}\right)$$

ჩვენ უკვე შევაფასეთ $W_1(\tau)$ და $W_2(\tau)$ რაციონალური ოპერატორ-ფუნქციების ნაშთითი წევრები. ახლა ამოვწეროთ და შევაფასოთ კოსინუს და სინუს ოპერატორ-ფუნქციების ნაშთითი წევრები:

$$R_1(\tau) = -A^3\int_0^{\tau}\int_0^{s_5}\dots\int_0^{s_1}\sin\left(s\sqrt{A}\right)ds_1\dots ds_5ds$$
$$R_2(\tau) = A^{5/2}\int_0^{\tau}\int_0^{s_4}\dots\int_0^{s_1}\cos\left(s\sqrt{A}\right)ds_1\dots ds_4ds.$$

$$\left\|R_1(\tau)\varphi\right\| = \int_0^{\tau}\int_0^{s_5}\dots\int_0^{s_1}\left\|\sin\left(s\sqrt{A}\right)\right\|ds_1\dots ds_5ds\left\|A^3\varphi\right\| \le \frac{1}{6!}\tau^6\left\|A^3\varphi\right\|$$
$$\left\|R_2(\tau)\varphi\right\| = \int_0^{\tau}\int_0^{s_4}\dots\int_0^{s_1}\left\|\cos\left(s\sqrt{A}\right)\right\|ds_1\dots ds_4ds\left\|A^{5/2}\varphi\right\| \le \frac{1}{5!}\tau^5\left\|A^{5/2}\varphi\right\|$$

მიღებული შეფასებების საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\left\|\left[\cos\left(\tau\sqrt{A}\right)-W_1(\tau)\right]\varphi\right\| \le c_0\tau^6\left\|A^3\varphi\right\|,$$
$$\left\|\left[\sqrt{A}\sin\left(\tau\sqrt{A}\right)-W_2(\tau)\right]\varphi\right\| \le k_0\tau^5\left\|A^{5/2}\varphi\right\|.$$

ამის შემდეგ შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი

თეორემა 3.1. *ვთქვათ, სრულდება შემდეგი პირობები:*

ა) A არის თვითშეუღლებული, დადებითად განსაზღვრული ოპერატორი;

ბ) $\varphi_0\in D\left(A^3\right)$ და $\varphi_1\in D\left(A^{5/2}\right)$

მაშინ (1.7)-(1.8) სქემა მდგრადია და მართებულია შემდეგი შეფასება:

$$\max_{1\le k\le n}\left(\left\|A^{1/2}u\left(t_k\right)-v_k^{(1)}\right\|+\left\|u'\left(t_k\right)-v_k^{(2)}\right\|\right)=O\left(\tau^4\right)$$

დამტკიცება. ვაჩვენოთ (1.7)-(1.8) სქემის მდგრადობა. ამისათვის საჭიროა, შევაფასოთ (1.7)-(1.8) სქემის გადასვლის ოპერატორი $V\left(\tau\right)$. ამ მიზნით განვიხილოთ $W_1\left(\tau\right)$ და $W_2\left(\tau\right)$ ოპერატორების შესაბამისი რაციონალური ფუნქციები:

$$r_1(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4}$$

$$r_2(x)=\frac{x}{(1+\frac{1}{6}x^2)(1+\frac{5}{48}x^4)}\,.$$

ჩვენ ვაჩვენეთ შემდეგი უტოლობის მართებულობა:

$$r_1^2\left(x\right)+r_2^2\left(x\right)\le 1,\qquad x\in[0,+\infty). \tag{3.1}$$

რადგან რაციონალური ოპერატორ-ფუნქციის ნორმა, როცა არგუმენტი არის თვითშეუღლებული ოპერატორი, ტოლია შესაბამისი სკალარული ფუნქციის C ნორმის, ამიტომ (3.1)-დან გამომდინარეობს შეფასება:

$$\left\|W_1^2\left(\tau\right)+W_2^2\left(\tau\right)\right\|\le 1.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\left\|V\left(\tau\right)\right\|\le 1,$ ეს კი ნიშნავს (1.7)-(1.8) სქემის მდგრადობას.

როგორც უკვე ვაჩვენეთ, $W_1\left(\tau\right)$ და $W_2\left(\tau\right)$ ოპერატორებისთვის მართებულია შემდეგი გაშლები:

$$W_1\left(\tau\right)=I-\frac{1}{2}\tau^2A+\frac{1}{24}\tau^4A^2+Op\left(\tau^6\right), \tag{3.3}$$

$$W_2\left(\tau\right)=\tau\sqrt{A}\left(I-\frac{1}{6}\tau^2A\right)+Op\left(\tau^5\right), \tag{3.4}$$

სადაც $Op\left(\tau^m\right)$ (m=5,6) არის ოპერატორი, რომლის ნორმა არის τ -ს მიმართ m რიგის. უფრო ზუსტად, შემოუსაზღვრელი ოპერატორის შემთხვევაში $\left\|Op\left(\tau^m\right)\varphi\right\| = O\left(\tau^6\right)$, ნებისმიერი φ-სთვის $Op\left(\tau^m\right)$ ოპერატორის განსაზღვრის არიდან. ანალოგიურად, სინუს და კოსინუს ოპერატორ-ფუნქციებისთვის მართებულია შემდეგი გაშლები:

$$\cos\left(\tau A^{1/2}\right) = I - \frac{1}{2}\tau^2 A + \frac{1}{24}\tau^4 A^2 + Op\left(\tau^6\right), \tag{3.5}$$

$$\sin\left(\tau A^{1/2}\right) = \tau\sqrt{A}\left(I - \frac{1}{6}\tau^2 A\right) + Op\left(\tau^5\right). \tag{3.6}$$

ამ შეფასებებიდან გამომდინარეობს შეფასება:

$$V\left(\tau\right) - U\left(\tau\right) = Op\left(\tau^5\right). \tag{3.7}$$

(1.9)-(1.10) ფორმულებიდან მიიღება:

$$\begin{aligned} w_k &= U^k\left(\tau\right) w_0, \\ v_k &= V^k\left(\tau\right) v_0, \quad k = 1, 2, ..., n. \end{aligned}$$

ამ ფორმულებიდან გამომდინარეობს შემდეგი წარმოდგენა:

$$w_k - v_k = U^K(\tau) w_o - V^K(\tau) v_o = \left(U^K(\tau) - V^K(\tau)\right) w_0 = \sum_{i=1}^{k} V^{k-i}(\tau)\left(U(\tau) - V(\tau)\right) U^{i-1}(\tau) w_0 .$$

აქედან, (3.2), (3.7) და $\left\|U(\tau)\right\|_{HXH} \le 1$ შეფასებების გათვალისწინებით გვექნება

$$\begin{aligned} &\left\|w_k - v_k\right\|_{HXH} \le \sum_{i=1}^{k} \left\|V(\tau)\right\|_{HXH}^{k-i} \left\|U(\tau)\right\|_{HXH}^{I-1} \left\|U(\tau) - V(\tau) w_0\right\|_{HXH} \le \tau^5 c_1 \sum_{i=1}^{k}\left(\left\|A^3\varphi_0\right\| + \left\|A^{5/2}\varphi_1\right\|\right) \\ &= \tau^4 c_1 t_k \left(\left\|A^3\varphi_0\right\| + \left\|A^{5/2}\varphi_1\right\|\right). \end{aligned}$$

რისი დამტკიცებაც მოითხოვებოდა.

4. არაერთგვაროვანი ამოცანა

განვიხილოთ არაერთგვაროვანი ამოცანა:

$$u''(t)+Au(t)=f(t), \qquad t\in[0,T] \tag{4.1}$$

$$u(0)=\varphi_0, \qquad u'(0)=\varphi_1, \tag{4.2}$$

სადაც $f(t)$ არის აბსტრაქტული ფუნქცია მნიშვნელობებით H-დან; A ოპერატორი აკმაყოფილებს იმავე პირობებს, რაც წინა ამოცანის შემთხვევაში. ცნობილია, რომ თუ $\varphi_0\in D(A),\varphi_1\in D(A^{1/2})$ და $f(t)$ არის უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი, მაშინ არსებობს ისეთი ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი $u(t)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (4.1) განტოლებას და (4.2) საწყის პირობებს (იხ. [12]). ამ შემთხვევაში ამონახსნი მოიცემა ფორმულით (იხ. [12], [13]):

$$u(t)=\cos(tA^{1/2})\varphi_0+\sin(tA^{1/2})A^{-1/2}\varphi_1+\int_0^t\sin(A^{1/2}(t-s))A^{-1/2}f(s)ds \tag{4.3}$$

დავყოთ $[0,T]$ შუალედი $n\geq 2$ ტოლ ნაწილად. კვანძითი წერტილები აღვნიშნოთ t_k-თი, $t_k=k\tau,\ \ \tau=\dfrac{T}{n},\ \ k=0,1,...,n$. განვიხილოთ (4.1)-(4.2) ამოცანა $[t_{k-1},t_k]$ შუალედში. (4.3) ფორმულის თანახმად მიიღება:

$$u(t)=\cos(\tau A^{1/2})u(t_{k-1})+\sin(\tau A^{1/2})A^{-1/2}u'(t_{k-1})+\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sin(A^{1/2}(t_k-s))A^{-1/2}f(s)ds \tag{4.4}$$

$$u(t)=-\sin(\tau A^{1/2})A^{1/2}u(t_{k-1})+\cos(\tau A^{1/2})u'(t_{k-1})+\int_{t_{k-1}}^{t_k}\cos(A^{1/2}(t_k-s))f(s)ds \tag{4.5}$$

თუ ინტეგრალს გამოვთვლით სიმპსონის ფორმულის საშუალებით, მივიღებთ შემდეგ სქემას:

$$\begin{aligned}u(t_k)=&\cos(\tau A^{1/2})u(t_{k-1})+\sin(\tau A^{1/2})A^{-1/2}u'(t_{k-1})+\\&\frac{\tau}{6}\left[\sin(\tau A^{1/2})A^{-1/2}f(t_{k-1})+4\sin\left(\frac{\tau}{2}A^{1/2}\right)A^{-1/2}f\left(\frac{t_k+t_{k-1}}{2}\right)\right]+\frac{\tau^5}{1440}M_0\end{aligned}, \tag{4.6}$$

სადაც

$$M_0=\max\left\|A^{3/2}f(s)\right\|+4\max\left\|Af^{'}(s)\right\|+6\max\left\|A^{1/2}f^{''}(s)\right\|+4\max\left\|f^{'''}(s)\right\|+\max\left\|A^{-1/2}f^{''''}(s)\right\|,$$

$$\begin{aligned}u^{'}(t_k)&=-\sin(\tau A^{1/2})A^{1/2}u(t_{k-1})+\cos(\tau A^{1/2})u^{'}(t_{k-1})+\\&+\frac{\tau}{6}\left[\cos(\tau A^{1/2})f(t_{k-1})+4\cos(\frac{\tau}{2}A^{1/2})f(\frac{t_k+t_{k-1}}{2})+f(t_k)\right]+\frac{\tau^5}{1440}M_1\end{aligned}\quad(4.7)$$

სადაც

$$M_1=\max\left\|A^2f(s)\right\|+4\max\left\|A^{3/2}f^{'}(s)\right\|+6\max\left\|Af^{''}(s)\right\|+4\max\left\|A^{1/2}f^{'''}(s)\right\|+\max\left\|f^{''''}(s)\right\|$$

(4.6)-(4.7)-ში შემავალი კოსინუს და სინუს ოპერატორ-ფუნქციები შევცვალოთ ზემოთ მიღებული $W_1(\tau)$ და $W_2(\tau)$ რაციონალური ოპერატორ-ფუნქციებით. მიღ ებული მიახლოებითი სქემის საშუალებით ნაპოვი ამონახსნები აღვნიშნოთ $v_k^{(1)}$ და $v_k^{(2)}$-ით. შედეგად მივიღებთ შემდეგ სქემას:

$$\tilde{v}_k^{(1)}=W_1(\tau)\tilde{v}_{k-1}^{(1)}+W_2(\tau)A^{-1/2}\tilde{v}_{k-1}^{(2)}+\frac{\tau}{6}\left(W_2(\tau)f(t_{k-1})+4W_2\left(\frac{\tau}{2}\right)f\left(\frac{t_{k-1}+t_k}{2}\right)\right)\quad(4.8)$$

და

$$\tilde{v}_k^{(2)}=-W_2(\tau)A^{1/2}\tilde{v}_{k-1}^{(1)}+W_2(\tau)\tilde{v}_{k-1}^{(2)}+\frac{\tau}{6}\left(W_1(\tau)f(t_{k-1})+4W_1\left(\frac{\tau}{2}\right)f\left(\frac{t_{k-1}+t_k}{2}\right)+f(t_k)\right),\quad(4.9)$$

სადაც $k=1,2,...,n$; $\tilde{v}_0^{(1)}=\varphi_0$, $\tilde{v}_0^{(2)}=\varphi_1$.

ბუნებრივია, $\tilde{v}_k^{(1)}$ და $\tilde{v}_k^{(2)}$ გამოვაცხადოთ, შესაბამისად, $u(t)$ და $u^{'}(t)$ ფუნქციების მიახლოებით მნიშვნელობად $t=t_k$ წერილში.

თუ (4.6) ტოლობის ორივე მხარეს მოვდებთ $A^{1/2}$ ოპერატორს, მაშინ მიღებული სისტემა ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\tilde{w}_k=U(\tau)\tilde{w}_{k-1}+\frac{\tau}{6}B_\tau g_k,\quad(4.10)$$

სადაც

$$\tilde{w}_k=(A^{1/2}u(t_k),u^{'}(t_k))^T,$$

$$g_k=(f(t_k),f(\frac{t_k+t_{k-1}}{2}),f(t_{k-1}))^T,$$

$$U(\tau)=\begin{pmatrix}\cos(\tau A^{1/2}) & \sin(\tau A^{1/2})\\ -\sin(\tau A^{1/2}) & \cos(\tau A^{1/2})\end{pmatrix},$$

$$B_\tau = \begin{pmatrix} 0 & 4\sin(\frac{\tau}{2}A^{1/2}) & \sin(\tau A^{1/2}) \\ I & 4\cos(\frac{\tau}{2}A^{1/2}) & \cos(\tau A^{1/2}) \end{pmatrix}.$$

ანალოგიურად, (4.8)-(4.9) სისტემისათვის მიიღება

$$\tilde{v}_k = V(\tau)\tilde{v}_{k-1} + \frac{\tau}{6}\tilde{B}_\tau g_k \,, \tag{4.11}$$

სადაც

$$\tilde{v}_k = (A^{1/2}\tilde{v}_k^{(1)}, \tilde{v}_k^{(2)})^T$$

$$V(\tau) = \begin{pmatrix} W_1(\tau) & W_2(\tau) \\ -W_2(\tau) & W_1(\tau) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B}_\tau = \begin{pmatrix} 0 & 4W_2(\frac{\tau}{2}) & W_2(\tau) \\ I & 4W_1(\frac{\tau}{2}) & W_1(\tau) \end{pmatrix}.$$

5. ცდომილების შეფასება არაერთგვაროვანი ამოცანისთვის

შევაფასოთ სხვაობა:

$$\left\|\left(W_2(\tau) f(t_{k-1}) + 4W_2(\tau) f\left(\frac{t_k + t_{k-1}}{2}\right) - \sin\left(\tau A^{1/2}\right) A^{-1/2} f(t_{k-1}) - 4\sin\left(\tau A^{1/2}\right) A^{-1/2} f(t_k)\right)\right\| \le$$
$$\le \left\|W_2(\tau) f(t_{k-1}) - \sin\left(\tau A^{1/2}\right) A^{-1/2} f(t_{k-1})\right\| +$$
$$+4\left\|W_2(\tau) f\left(\frac{t_k + t_{k-1}}{2}\right) - \sin\left(\tau A^{1/2}\right) A^{-1/2} f\left(\frac{t_k + t_{k-1}}{2}\right)\right\| \le \left\|W_2(\tau) - \sin\left(\tau A^{1/2}\right) A^{-1/2}\right\| \left\|f(t_{k-1})\right\| +$$
$$+4\left\|W_2(\tau) - \sin\left(\tau A^{1/2}\right) A^{-1/2}\right\| \left\|f\left(\frac{t_k + t_{k-1}}{2}\right)\right\| \le K_1\tau^5 \left\|A^{5/2} f(t_{k-1})\right\| + 4K_1\tau^5 \left\|A^{5/2} f\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right)\right\|$$

თითოეული შესაკრები ფასდება $O\left(\tau^5\right)$ სიზუსტით. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ სიზუსტე გვაქვს $O\left(\tau^5\right)$ რიგის.

ანალოგიურად შეგვიძლია შევაფასოთ სხვაობა:

$$\left\|\left(W_1(\tau) f(t_{k-1}) + 4W_1(\tau) f\left(\frac{t_k + t_{k-1}}{2}\right) + f(t_k) - \cos\left(\tau A^{1/2}\right) f(t_{k-1}) - 4\cos\left(\tau A^{1/2}\right) f\left(\frac{t_k + t_{k-1}}{2}\right) - f(t_k)\right)\right\| \le$$
$$\le C_1\tau^6 \left\|A^3 f(t_{k-1})\right\| + 4C_1\tau^6 \left\|A^3 f\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right)\right\|$$

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ სიზუსტე გვაქვს $O\left(\tau^6\right)$ რიგის.

მიღებული შეფასებების საფუძველზე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ თეორემა არაერთგვაროვანი ამოცანისათვის:

თეორემა 5.1. *ვთქვათ, სრულდება შემდეგი პირობები:*

ა) A არის თვითშეუღლებული, დადებითად განსაზღვრული ოპერატორი;

ბ) $\varphi_0 \in D\left(A^3\right)$ და $\varphi_1 \in D\left(A^{5/2}\right)$;

გ) $f(t) \in c^4\left([0,T];H\right)$ და ყოველი ფიქსირებული t-სთვის $[0,T]$ შუალედიდან $f^{(IV)}(t) \in D\left(A^2\right)$.

მაშინ (4.8)-(4.9) სქემა მდგრადია და მართებულია შემდეგი შეფასება:

$$\max_{1\le k\le n}\left(\left\|A^{1/2}u\left(t_k\right)-\tilde{v}_k^{(1)}\right\|+\left\|u'\left(t_k\right)-\tilde{v}_k^{(2)}\right\|\right)=O\left(\tau^4\right).$$

დამტკიცება. (4.10) და (4.11) ფორმულებიდან მიიღება:

$$\tilde{w}_k=U^k\tilde{w}_0+\frac{\tau}{6}B_\tau\sum_{i=1}^{k}U^{i-1}\left(\tau\right)g_{k-i},$$
$$\tilde{v}_k=V^k\tilde{v}_0+\frac{\tau}{6}B_\tau\sum_{i=1}^{k}V^{i-1}\left(\tau\right)g_{k-i.}$$

ამ ფორმულებიდან გამომდინარეობს შემდეგი წარმოდგენა:

$$\tilde{w}_k-\tilde{v}_k=\left(U^K(\tau)-V^K(\tau)\right)\tilde{w}_0+\frac{\tau}{6}\left(B_\tau-\tilde{B}_\tau\right)\sum_{i=1}^{k}\left(U^{i-1}\left(\tau\right)-V^{i-1}\left(\tau\right)\right)g_{k-i}=$$
$$=\sum_{i=1}^{k}V^{k-1}\left(\tau\right)\left(U\left(\tau\right)-V\left(\tau\right)\right)U^{i-1}\left(\tau\right)\tilde{w}_0+$$
$$+\frac{\tau}{6}\left(B_\tau-\tilde{B}_\tau\right)\sum_{i=1}^{k}g_{k-i}\sum_{j=1}^{i-1}V^{i-1-j}\left(\tau\right)\left(U\left(\tau\right)-V\left(\tau\right)\right)U^{j-1}\left(\tau\right)$$

აქედან (3.2), (3.7) და $\left\|U\left(\tau\right)\right\|\le 1$ შეფასებების გათვალისწინებით გამომდინარეობს დასამტკიცებელი შეფასება.

6. არაწრფივი ამოცანა

განვიხილოთ არაერთგვაროვანი ამოცანა არაწრფივ შემთხვევაში. უფრო კონკრეტულად კი, შემთხვევა, როდესაც (4.1)-(4.2) ამოცანას განტოლების მარჯვენა მხარეში სუსტად არაწრფივი წევრი ემატება:

$$u''(t) + Au(t) = f(t) + M\left(u\left(t\right)\right) \quad t \in [0,T], \tag{6.1}$$

$$u(0) = \varphi_0, \; u'(0) = \varphi_1, \tag{6.2}$$

$$\left\| M\left(u\right) - M\left(v\right) \right\| \le c\left\| u - v \right\| \tag{6.3}$$

(6.1)-(6.3) ამოცანისთის შეგვიძლია ჩავწეროთ (4.3) ამონახსნის მსგავსი ტოლობა, რომელიც არაწრფივ შემთხვევაში მხოლოდ იგივეობად გვევლინება:

$$u(t) = \cos(tA^{1/2})\varphi_0 + \sin(tA^{1/2})A^{-1/2}\varphi_1 + \int_0^t \sin(A^{1/2}(t-s))A^{-1/2}(f(s) + M(u(s))ds \tag{6.4}$$

დავყოთ შუალედი $\left[0,T\right]$ $n \ge 2$ ტოლ ნაწილად. კვანძითი წერტილები აღვნიშნოთ t_k -თი, $t_k = k\tau, \; \tau = \dfrac{T}{n}, \; k = 0,1,\ldots,n$. განვიხილოთ (6.1)-(6.3) ამოცანა $\left[t_{k-1}, t_k\right]$ შუალედში. (6.4) ფორმულის თანახმად მიიღება:

$$u(t_k) = \cos(\tau A^{1/2})u\left(t_{k-1}\right) + \sin(\tau A^{1/2})A^{-1/2}u'\left(t_{k-1}\right) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sin(A^{1/2}(t_k - s))A^{-1/2}\left(f(s) + M\left(u\left(s\right)\right)\right)ds \tag{6.5}$$

და

$$u'(t_k) = -\sin(\tau A^{1/2})A^{1/2}u\left(t_{k-1}\right) + \cos(\tau A^{1/2})u'\left(t_{k-1}\right) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \cos(A^{1/2}(t_k - s))\left(f(s) + M\left(u\left(s\right)\right)\right)ds \tag{6.6}$$

ამ ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნისთვის სიმპსონის ფორმულა აღარ გვადგება, რადგან ამ შემთხვევაში, $u\left(t_k\right)$-ს საპოვნელად მოგვიწევდა $M\left(u\left(t_k\right)\right)$-ს მნიშვნელობის გამოყენება, რაც შეუძლებელია, რადგან ეს უკანასკნელიც არაა ცნობილი. ამიტომ

ამოცანის ამოსახსნელად ვიყენებთ ტრაპეციის ფორმულას. რისი უარყოფითი მხარეცაა მაღალი რიგის სიზუსტეზე უარის თქმა.

(6.5)-ისთვის ტრაპეციის ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$
\begin{aligned}
u(t_k) &= \cos(\tau A^{1/2})u\left(t_{k-1}\right)+\sin(\tau A^{1/2})A^{-1/2}u'\left(t_{k-1}\right)+\\
&\quad +\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sin(A^{1/2}(t_k-s))A^{-1/2}\left(f(s)+M\left(u\left(s\right)\right)\right)ds=\\
&= \cos(\tau A^{1/2})u\left(t_{k-1}\right)+\sin(\tau A^{1/2})A^{-1/2}u'\left(t_{k-1}\right)+\\
&\quad +\frac{\tau}{2}\left[\sin\left(\tau A^{1/2}\right)A^{-1/2}\left(f\left(t_{k-1}\right)+M\left(u\left(t_{k-1}\right)\right)\right)+0\right]+R_k\left(\tau\right)\\
&= \cos(\tau A^{1/2})u\left(t_{k-1}\right)+\sin(\tau A^{1/2})A^{-1/2}u'\left(t_{k-1}\right)+\\
&\quad +\frac{\tau}{2}\sin\left(\tau A^{1/2}\right)A^{-1/2}\left(f\left(t_{k-1}\right)+M\left(u\left(t_{k-1}\right)\right)\right)+R_k^{(1)}\left(\tau\right)
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

თუ გადავაგდებთ $R_k^{(1)}\left(\tau\right)$ -ს, მივიღებთ:

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}(t_k) &= \cos(\tau A^{1/2})\tilde{u}\left(t_{k-1}\right)+\sin(\tau A^{1/2})A^{-1/2}\tilde{u}'\left(t_{k-1}\right)+\\
&\quad +\frac{\tau}{2}\sin\left(\tau A^{1/2}\right)A^{-1/2}\left(f\left(t_{k-1}\right)+M\left(\tilde{u}\left(t_{k-1}\right)\right)\right)
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

ანალოგიური მოქმედებების ჩატარებით გვექნება

$$
\begin{aligned}
u'(t_k) &= -\sin(\tau A^{1/2})A^{1/2}u\left(t_{k-1}\right)+\cos(\tau A^{1/2})u'\left(t_{k-1}\right)+\\
&\quad +\int_{t_{k-1}}^{t_k}\cos(A^{1/2}(t_k-s))\left(f(s)+M\left(u\left(s\right)\right)\right)ds=\\
&= -\sin(\tau A^{1/2})A^{1/2}u\left(t_{k-1}\right)+\cos(\tau A^{1/2})u'\left(t_{k-1}\right)+\\
&\quad +\frac{\tau}{2}\left[\cos\left(\tau A^{1/2}\right)\left(f\left(t_{k-1}\right)+M\left(u\left(t_{k-1}\right)\right)\right)+\left(f\left(t_k\right)+M\left(u\left(t_k\right)\right)\right)\right]+\\
&\quad +R_k^{(2)}\left(\tau\right)
\end{aligned}
\tag{6.7'}
$$

და

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}\left(t_k\right) &= -\sin(\tau A^{1/2})A^{1/2}\tilde{u}\left(t_{k-1}\right)+\cos(\tau A^{1/2})\tilde{u}'\left(t_{k-1}\right)+\\
&\quad +\frac{\tau}{2}\left[\cos\left(\tau A^{1/2}\right)\left(f\left(t_{k-1}\right)+M\left(\tilde{u}\left(t_{k-1}\right)\right)\right)+\left(f\left(t_k\right)+M\left(\tilde{u}\left(t_k\right)\right)\right)\right]
\end{aligned}
\tag{6.8'}
$$

თუ (6.7) ტოლობას გამოვაკლებთ (6.8)-ს, გვექნება

$$
\begin{aligned}
u(t_k)-\tilde{u}(t_k) &= \cos(\tau A^{1/2})\left(u\left(t_{k-1}\right)-\tilde{u}\left(t_{k-1}\right)\right)+\sin(\tau A^{1/2})A^{-1/2}\left(u'\left(t_{k-1}\right)-\tilde{u}'\left(t_{k-1}\right)\right)+\\
&\quad +\frac{\tau}{2}\sin\left(\tau A^{1/2}\right)A^{-1/2}\left(M\left(u\left(t_{k-1}\right)\right)-M\left(\tilde{u}\left(t_{k-1}\right)\right)\right)+R_k^{(1)}\left(\tau\right)
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$z\left(t_k\right)=u\left(t_k\right)-\tilde{u}\left(t_k\right).$$

მაშინ გვექნება

$$\begin{aligned}z(t_k)&=\cos(\tau A^{1/2})\left(z\left(t_{k-1}\right)\right)+\sin(\tau A^{1/2})A^{-1/2}\left(z'\left(t_{k-1}\right)\right)+\\&+\frac{\tau}{2}\sin\left(\tau A^{1/2}\right)A^{-1/2}\left(M\left(u\left(t_{k-1}\right)\right)-M\left(\tilde{u}\left(t_{k-1}\right)\right)\right)+R_k^{(1)}\left(\tau\right),\end{aligned}\tag{6.10}$$

სადაც

$$\begin{aligned}&z'\left(t_k\right)=u'\left(t_k\right)-\tilde{u}'\left(t_k\right)=-\sin(\tau A^{1/2})\left(A^{1/2}z\left(t_{k-1}\right)\right)+\\&+\cos(\tau A^{1/2})\left(z'\left(t_{k-1}\right)\right)+\\&+\frac{\tau}{2}\left[\cos\left(\tau A^{1/2}\right)\left(\left(M\left(u\left(t_{k-1}\right)\right)\right)-M\left(\tilde{u}\left(t_{k-1}\right)\right)\right)+\left(M\left(u\left(t_k\right)\right)-M\left(\tilde{u}\left(t_k\right)\right)\right)\right]+\\&+R_k^{(2)}\left(\tau\right)\end{aligned}\tag{6.10'}$$

(6.10) ტოლობის ორივე მხარეს მოვდოთ $A^{1/2}$ ოპერატორი. გვექნება

$$\begin{aligned}A^{1/2}z(t_k)&=\cos(\tau A^{1/2})\left(A^{1/2}z\left(t_{k-1}\right)\right)+\sin(\tau A^{1/2})\left(z'\left(t_{k-1}\right)\right)+\\&+\frac{\tau}{2}\sin\left(\tau A^{1/2}\right)\left(M\left(u\left(t_{k-1}\right)\right)-M\left(\tilde{u}\left(t_{k-1}\right)\right)\right)+R_k^{(1)}\left(\tau\right)\end{aligned}$$

ამ უკანასკნელისა და (6.10')-ის გათვალისწინები,თ შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}A^{1/2}z\left(t_k\right)\\ z'\left(t_k\right)\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\cos\left(\tau A^{1/2}\right) & \sin\left(\tau A^{1/2}\right)\\ -\sin\left(\tau A^{1/2}\right) & \cos\left(\tau A^{1/2}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{1/2}z\left(t_{k-1}\right)\\ z'\left(t_{k-1}\right)\end{pmatrix}+\\&+\frac{\tau}{2}\begin{pmatrix}\sin\left(\tau A^{1/2}\right) & 0\\ \cos\left(\tau A^{1/2}\right) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M\left(u\left(t_{k-1}\right)\right)-M\left(\tilde{u}\left(t_{k-1}\right)\right)\\ M\left(u\left(t_k\right)\right)-M\left(\tilde{u}\left(t_k\right)\right)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A^{1/2}R_k^{(1)}\left(\tau\right)\\ R_k^{(2)}\left(\tau\right)\end{pmatrix},\end{aligned}\tag{6.11}$$

ნაშთითი წევრი ფასდება $O\left(\tau^4\right)$-ით და შეგვიძლია დროებით უგულებელვყოთ. შევისწავლოთ დანარჩენი წევრების ნორმა. შემოვიტანოთ აღნიშვნა:

$$\left\|Y_k\right\|\equiv\begin{pmatrix}A^{1/2}z\left(t_k\right)\\ z'\left(t_k\right)\end{pmatrix}$$

სინუს- და კოსინუს- ოპერატორ-ფუნქციების შემცველი მატრიცების ნორმის და M ოპერატორის სუსტად არაწრფივობის გათვალისწინებით, გვექნება:

$$\left\|Y_k\right\|\le 1\left\|Y_{k-1}\right\|+c\tau\left(\left\|z\left(t_{k-1}\right)\right\|+\left\|z\left(t_k\right)\right\|\right)$$

გავიხსენოთ, რომ

$$\|Y_k\| = \sqrt{\|z'(t_k)\|^2 + \|A^{1/2} z(t_k)\|^2} \geq \|z(t_k)\|$$

და, შესაბამისად,

$$\|Y_{k-1}\| \geq \|z(t_{k-1})\|.$$

ყოველივე ამის გათალისწინებით გვექნება შეფასება:

$$\|Y_k\| \leq 1\|Y_{k-1}\| + c\tau\left(\|Y_{k-1}\| + \|Y_k\|\right)$$

აქედან,

$$(1 - c\tau)\|Y_k\| \leq (1 + c\tau)\|Y_{k-1}\|$$

$$\|Y_k\| \leq \frac{1+c\tau}{1-c\tau}\|Y_{k-1}\| \leq \left(\frac{1+c\tau}{1-c\tau}\right)^k \|Y_0\| \leq \left(\frac{1+c\tau}{1-c\tau}\right)^N \|Y_0\|$$

საბოლოოდ გვაქვს:

$$\|Y_k\| \leq \left(\frac{1 + c\dfrac{T}{N}}{1 - c\dfrac{T}{N}}\right)^N \|Y_0\|.$$

ახლა კი შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ

თეორემა 6.1. *ვთქვათ, სრულდება შემდეგი პირობები:*

ა) A არის თვითშეუღლებული, დადებითად განსაზღვრული ოპერატორი;

ბ) $\varphi_0 \in D(A^3)$ და $\varphi_1 \in D(A^{5/2})$;

გ) $f(t) \in c^4([0,T]; H)$ და ყოველი ფიქსირებული t -სთვის $[0,T]$ შუალედიდან $f^{(IV)}(t) \in D(A^2)$;

დ) M სუსტად არაწრფივი ოპერატორია.

მაშინ (6.8)-(6.8') სქემა მდგრადია, და ადგილი აქვს შეფასებას:

$$\max_{1 \leq k \leq n}\left(\|A^{1/2}u(t_k) - \tilde{u}(t_k)\| + \|u'(t_k) - \tilde{u}'(t_k)\|\right) = O(\tau^2).$$

დასკვნა

როგორც ცნობილია, რომ პირველი რიგის არასტაციონარული ოპერატორული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი მოიცემა ნახევარჯგუფის საშუალებით, ხოლო მეორე რიგის ოპერატორული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი კი – სინუს და კოსინუს ოპერატორ-ფუნქციების საშუალებით. პრობლემის არსი მდგომარეობს შემდეგში: არასტაციონარული ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები აგებული და გამოკვლეული იქნას უწყვეტი ამოცანის ამომხსნელი ოპერატორის (ნახევარჯგუფის, სინუს და კოსინუს ოპერატორ-ფუნქციების) აპროქსიმაციის საფუძველზე.

სამაგისტრო ნაშრომში განხილულია აბსტრაქტული ჰიპერბოლური განტოლებისთვის კოშის ამოცანა. ამ ამოცანის ამონახსნი მოიცემა სინუს და კოსინუს ოპერატორული ფუნქციების საშუალებით. ეს ფაქტი იძლევა საშუალებას უცნობი ფუნქცია და მისი წარმოებული ვექტორულად განისაზღვროს, დროით ცვლადზე დამოკიდებული ისეთი მატრიცული ოპერატორის საშუალებით, რომლებიც ქმნიან უნიტარულ ჯგუფს.

ნაშრომში უნიტარული ჯგუფისთვის მაღალი რიგის რაციონალური აპროქსიმაციის საშუალებით აგებულია ორშრიანი ვექტორული სქემა, რომელიც იძლევა საშუალებას ყოველ დროით შრეზე ვიპოვოთ როგორც უცნობი ფუნქციის, ასევე მისი წარმოებულის მნიშვნელობა. გამოკვლეული ამ სქემის მდგრადობა, კერძოდ დამტკიცებულია, რომ გადასვლის მატრიცა-ოპერატორის ნორმა არ აღემატება ერთს, რაც უზრუნველყოფს განხილული სქემის მდგრადობას ნებისმიერი სასრული დროის შუალედში. დამტკიცებულია, რომ აგებული რაციონალური აპროცსიმაცია, რომელიც პაქტიურად წარმოადგენს პადეს სკალარული აპროქსიმაციის ოპერატორულ ანალოგს, იძლევა უცნობი ფუნქციის და მისი წარმოებულის მნიშვნელობას ნებისმიერ დროით შრეზე მეოთხე რიგის სიზუსტით.

წინამდებარე ნაშრომში წრფივი ამოცანისთვის აგებული სქემა გავრცელებულია ასევე არაწრფივი ამოცანისთვის. კერძოდ, განხილულია შემთხვევა, როცა წრფივ

ძირითად ნაწილს ემატება ისეთი არაწრფივი ოპერატორი, რომელიც აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას.

ლიტერატურა

[1] Alibekov Kh. A. and Sobolevskii P. E., “On the stability of finite-difference schemes for parabolic equations,” Dokl. Akad. Nauk 232, 737–740 (1967).

[2] Ashyralyev A. and Sobolevskii P. E., Well-Posedness of Parabolic Difference Equations, Ser. Operator Theory: Advances and Applications (Birkhauser, Berlin, 1994), Vol. 69.

[3] Ashyralyev A. and Sobolevskii P. E., New Difference Schemes for Partial Differential Equations, Ser. Operator Theory: Advances and Applications (Birkhauser, Berlin, 2004), Vol. 148.

[4] Baker G. A., Error estimates for finite element methods for second order hyperbolic equations, SIAM J. Numer. Anal., 1976, 13, 14, pp. 564-576.

[5] Baker G. A., Douglis V. A., Serbin S. M., An approximation theorem for second-order evolution equation, Numerische Mathematik, 1980, 35, N2, pp. 127-142.

[6] Baker G. A., Bramble J.H. , Semidiscrete and single step fully discrete approximations for second order hyperbolic equations, Rep. 1 22, Centre de Mathematiques Appliquees, Ecole Polytechnique, Paris, 1977

[7] Bales L. A., Semidiscrete and single step fully discrete finite element approximations for second order hyperbolic equations with nonsmooth solutions. RAIRO Model Math. Anal. Numer., 1933.27.11, pp.55-63.

[8] Brull L., On the Existence theory for nonlinear Schrodinger and wave equations without Lipschitz-estimates, Numerical Analysis, Theory, Methods & Applications, Vol. 7, No 11, 1983, pp. 1193-1208.

[9] Godunov S. K. and Ryaben’kii V. S., Finite Difference Schemes (Nauka, Moscow, 1973) [in Russian].

[10] Kacur J., Application of Rothe’s method to perturbed linear hyperbolic equations and variational inequalities, Czech Math. J. 34(109), 1984, pp. 92-106.

[11] Kacur J., Application of Rothe’s method to evolution integrodifferential equations, J. Reine. Angew. Math. 388, 1988, pp. 73-105.

[12] Kantorovich L. V., Akilov G. P., Functional Analysis, Pergamon Press, Mew York, NY, 1982.

[13] Kato T., Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, Germany, Berlin, 1980.

[14] Lomtadze T., Rogava J., Tsiklauri M., Approximate solution of Cauchy problem for abstract hyperbolic equation using unitary group approximation method, Proceedings of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, Vol. 54-55, (2004-2005), p. 55-64.

[15] Marchuk G. I., Methods of Numerical Mathematics, 2nd ed. (Nauka, Moscow, 1977; Springer, New York, 1982).

[16] Richtmyer R. D. and Morton K. W., Difference Methods for Initial-Value Problems (Wiley, New York, 1967; Mir,Moscow, 1972).

[17] Rogava J., Dikhaminjia N., Tsiklauri M., Operator Splitting for Quasi-linear Abstract Hyperbolic Equation. Of the International Conference Lie Groups, Differential Equations and Geometry, Batumi, 2013, Vol. 1, pp. 85-90.

[18] Rogava J., Dikhaminjia N., Tsiklauri M., Construction of High Order Accuracy Decomposition Scheme for an Abstract Hyperbolic Equation with the Lipschitz Continuous Operator on the Basis of Rational Splitting of the Cosine-Operator Function. AIP Conf. Proc. NUMERICAL ANALYSIS AND APPLIED MATHEMATICS ICNAAM, 2011, Vol. 1389, 1679-1682.

[19] Rogava J., Dikhaminjia N., Tsiklauri M., Construction and Investigation of a Fourth Order of Accuracy Decomposition Scheme for Nonhomogeneous Multidimensional Hyperbolic Equation, Journal of Numerical Functional Analysis and Optimization, Vol. 35, (2014), p. 275-293, Taylor & Francis.

[20] Samarskii A. A., Theory of Finite Difference Schemes (Nauka, Moscow, 1977; Marcel Dekker, New York, 2001).

[21] Yanenko, N. N. The Method of Fractional Steps (Nauka, Novosibirsk, 1967; Springer, Berlin, 1971).

[22] Крейн С., Линейные уравнения в Банаховом пространстве, Наука, М 1971.

[23] Ладыженская О. А., О решении нестационарных операторных уравнений, Матем. сб., 1956, том 39(81), сю 491-524.

[24] Рогава Дж. Л., Об исследовании устойчивости полудискретных схем с помощью ортогональных полиномов Чебишева, Сообж. АН ГССР, 1976, т. 83, 13, с. 545-548.

[25] Рогава Дж. Л., Устойчивость и сходимость метода полудискретизации для гиперболического уравнения, Сообж. АН ГССР, 1984, т. 116. 12, с. 273-276.

[26] Соболевский П. Е., Чеботарева Л. М., Приближенное решение методом прямых задачи Коши для абстрактного гиперболического уравнения, Изв. вузов. Матем., 1977, 15. (180), с. 103–116.