ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის

სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მიმართულება: გამოყენებითი მათემატიკა

სამაგისტრო ნაშრომი თემაზე

სასრული ვარიაციის ფუნქციები და ფურიე-ვილენკინის მწკრივების ჩეზაროს უარყოფითი რიგით შეჯამებადობა

გვანცა შავარდენიძე

ხელმძღვანელი

პროფესორი: უშანგი გოგინავა

თბილისი

2017

სარჩევი

ანოტაცია:

1971 წელს ონევერმა და ვატერმანმა დაადგინეს საკმარისი პირობა იმისათვის, რომ უწყვეტი ფუნქციის ფურიე-ვილენკინის მწკრივი ყოფილიყო თანაბრად კრებადი. ნაშრომში მოყვანილია საკმარისი პირობა იმისათვის, რომ უწყვეტი ფუნქციის ფურიე-ვილენკინის მწკრივის ჩეზაროს უარყოფითი რიგის საშუალოები იყოს თანაბრად კრებადი. ასევე განხილულია სხვადასხვა განზოგადებული სასრული ოსცილაციის ფუნქციათა კლასები და ამ კლასების ტერმინებში დადგენილია საკმარისი პირობა ჩეზაროს უარყოფითი მეთოდით თანაბრად შეჯამებადობისათვის.

Abstract:

In 1971 Onneweer and Waterman establish sufficient condition, which guarantees uniform convergence of Vilenkin-Fourier series of continuous function. In the paper is proved sufficient condition, which guarantees uniform convergence of Cesáro means of negative order of Vilenkin-Fourier series of continuous function. In this work we investigated different classes of functions of generalized bounded oscilation and in the terms of these classes there is established sufficient condition for uniform convergence of Cesáro means of negative order.

შესავალი

ვთქვათ, $m := (m_k, k \in N)(N := \{0,1,...\}, P := N \setminus \{0\})$ არის ნატურალურ რიცხვთა რაიმე მიმდევრობა, რომლის თითოეული წევრი არაა ნაკლები 2 -ზე. Z_{m_k} სიმბოლოთი აღვნიშნოთ m_k რიგის ციკლური ჯგუფი. სახელდობრ, Z_{m_k} წარმოადგენს $\{0,1,...,m_k-1\}$ სიმრავლეს, რომელზედაც შემოტანილია mod m_k შეკრების ოპერაცია. ვთქვათ, $G_m := \prod_{k=0}^{\infty} Z_{m_k}$. ამ უკანასკნელი სიმრავლის ყოველი $x \in G_m$ ელემენტი შესაძლებელია, წარმოდგენილი იქნეს $x = (x_i, i \in N)$ მიმდევრობის სახით, სადაც $x_i \in Z_{m_i}$ $(i \in N)$.

G_m ჯგუფზე შეკრების ოპერაცია შესაბამისი კორდინატის მიმართ შეკრების ოპერაციით განიმარტება. $x + y = ((x_0 + y_0) \bmod m_0, \ldots, (x_k + y_k) \bmod m_k, \ldots)$.

თუ $\sup_{n \in N} m_n < \infty$, მაშინ G_m უწოდებენ შემოსაზღვრულ ვილენკინის ჯგუფს. თუ წარმომქმნელი m მიმდევრობა არაა შემოსაზღვრული, მაშინ G_m უწოდებენ არაშემოსაზღვრულ ვილენკინის ჯგუფს. ჩვენ განვიხილავთ შემოსაზღვრულ ვილენკინის ჯგუფებს. შევნიშნოთ, რომ თუ $m_k = 2 (k \in N)$, მაშინ G_m ემთხვევა ორობით (უოლშის) ჯგუფს.

ვთქვათ, $M_0 = 1, M_{n+1} := m_n M_n \, (n \in N)$ არის ეგრეთწოდებული განზოგადოებული ხარისხები. მაშინ ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვი წარმოიდგინება შემდეგი სახით

$$n = \sum_{i=0}^{\infty} n_i M_i \quad (n_i \in \{0,1,\ldots,m_i-1\}, \ i \in N),$$

სადაც მხოლოდ სასრული რაოდენობა n_i -ისა არის არანულოვანი. ვილენკინის ჯგუფზე შეგვიძლია განვსაზღვროთ მეტრიკა შემდეგნაირად

$$d(x,y) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{M_{i+1}} \quad (x, y \in G_m).$$

G_m -ს ქვესიმრავლეებს აქვთ შემდეგი სახე:

$I_0 := G_m, \qquad I_n(x) := I_n(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) := \{y \in G_m : y = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n, y_{n+1}, \ldots)\},$

$x \in G_m, n \in N.$

აღვნიშნოთ $I_n := I_n(0)$ და $\overline{I_n} := G_m \setminus I_n$, $\; e_n = (0, \ldots, 0, x_n = 1, 0, \ldots) \in G_m$, $\; (n \in N)$.

ვთქვათ $Z_{\beta}^{(k)} = (x_0, x_1, \cdots x_{k-1}, 0,0, \cdots)$, სადაც

$$\beta = \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{x_j}{M_{j+1}}\right) M_k \ , \ \left(x_j \in Z_{m_j}\right), \quad j = 0,1, \dots , n-1.$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$G_m = \bigcup_{\beta=0}^{M_k-1} \left(I_k + Z_{\beta}^{(k)}\right) . \tag{1}$$

განზოგადოებული რადემახერის ფუნქციები განიმარტება შემდეგი წესით

$$r_n(x) \coloneqq exp\left(2\pi \frac{x_n}{m_n}\right) \qquad \left(x \in G_m, \ \ n \in N, \ \ i \coloneqq \sqrt{-1}\right),$$

ხოლო n -ური ვილენკინის ფუნქცია ტოლობით

$$\Psi_n := \prod_{j=0}^{\infty} r_j^{n_j} \qquad (n \in N).$$

$\Psi := (\Psi_n : n \in N)$ სისტემას ვილენკინის სისტემას უწოდებენ. შევნიშნოთ, რომ ყოველი Ψ_n ფუნქცია G_m ჯგუფის მახასიათებელი ფუნქციაა და G_m ჯგუფის ყოველ მახასიათებელს აქვს მხოლოდ ზემოთ მოყვანილი სახე.

დირიხლეს გული განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$D_n := \sum_{k=0}^{n-1} \Psi_k \qquad (n \in N_+), \quad D_0 = 0.$$

ცნობილია, რომ

$$D_n = \begin{cases} M_n, \ x \in I_n \\ \ \ 0, \ x \in G_m \setminus I_n \end{cases} \tag{2}$$

და

$$. \int_{G_m} D_n(t) d\mu(t) = 1, \quad (n \in N_+) \tag{3}$$

ვთქვათ $n = n_k M_k + n'$. $0 < n_k < m_k$ და $0 \le n' < M_k$, მაშინ

$$D_n(x) = \frac{1-\Psi_{M_k}^{n_k}(x)}{1-\Psi_{M_k}(x)} D_{M_k}(x) + \Psi_{M_k}^{n_k}(x) D_{n'}(x), \tag{4}$$

$$D_{j+n_kM_k}(x) = D_{n_kM_k}(x) + \Psi_{n_kM_k}(x)D_j(x)\,, \tag{5}$$

$$D_{j+rM_k}(x) = \left(\sum_{q=0}^{r-1} \Psi_{M_k}^{q}(x)\right) D_{M_k}(x) + \Psi_{M_k}^{r}(x)D_j(x)\,. \tag{6}$$

ვთქვათ $0 \le j < n_sM_s$ და $0 \le n_s < M_s$, მაშინ

$$D_{n_sM_s-j}(x) = D_{n_sM_s}(x) + \Psi_{n_sM_s-1}(x)\overline{D_j(x)}. \tag{7}$$

ფურიე-ვილენკინის მწკრივის კერძო ჯამი განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$S_n(f;x) = \sum_{i=0}^{n-1} \hat{f}\,(i)\Psi_i(x),$$

სადაც $\hat{f}(i)$ წარმოადგენს f ფუნქციის ფურიე-ვილენკინის i-ურ კოეფიციენტს:

$$\hat{f}(i) := \int_{G_m} f(x)\overline{\Psi_i(x)}d\mu(x).$$

$C(G_m)$-ით აღვნიშნოთ უწყვეტი ფუნქციების სივრცე G_m-ზე . ნორმა განისაზღვრება ასე

$$\|f\|_C := \sup_{x\in G_m} |f(x)| \qquad (f \in G_m).$$

ვთქვათ $f \in C(G_m)$. უწყვეტობის მოდული განიმარტება შემდეგნაირად

$$\omega\left(f;\frac{1}{M_k}\right) := \sup_{x\in G_m} \sup_{t\in I_k} |f(x-t) - f(x)|.$$

ცნობილია, რომ არსებობს ისეთი უწყვეტი ფუნქცია, რომლის ფურიეს მწკრივი (ტრიგონომეტრიული სისტემის მიმართ, უოლშის სისტემის მიმართ, ვილენკინის სისტემის მიმართ) განშლადია წერტილში. მაშასადამე, გვჭირდება დამატებითი პირობები, რომლებიც უწყვეტ ფუნქციათა კლასიდან გამოყოფენ ქვეკლასს, რომლის ფურიეს მწკრივები თანაბრად კრებადია. ამ კლასების გამოსაყოფად ძირითადად გამოყენებულია 2 მიდგომა:

1. ქვეკლასების დახასიათება უწყვეტობის მოდულის ტერმინებში,
2. ქვეკლასების დახასიათება ფუნქციათა ოსცილაციის ტერმინებში.

თავის ერთ-ერთ ნაშრომში ჟორდანმა [5] შემოიღო BV კლასის ცნება და ეს კლასი გამოიყენა ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივების კრებადობის საკითხებში. ჟორდანის კლასი განაზოგადეს ვინერმა [10], მარცინკევიჩმა [7], ვატერმანმა [11], ჭანტურიამ [3], კიტას და იოდენამ [6], ახობაძემ [2], გოგინავამ [4]. ვილენკინის სისტემისთვის ერთგანზომილებიან შემთხვევაში სასრული რხევის ფუნქციათა კლასი BF და განზოგადებული სასრული რხევის ფუნციათა კლასი GBF შემოიღეს ონევერმა და ვატერმანმა [8].

შემოვიღოთ სასრული ოსცილაციის ფუნქციათა კლასის ცნება. ვთქვათ

$$O(f, M_k) = \sum_{\beta=0}^{M_k-1} \omega\left(f, I_k + Z_\beta^{(k)}\right),$$

სადაც

$$\omega\left(f, I_k + Z_\beta^{(k)}\right) = \sup_{x,x' \in I_k + Z_\beta^{(k)}} |f(x) - f(x')|.$$

განმარტება 1. ვიტყვით, რომ ფუნქცია ეკუთვნის სასრული ოსცილაციის ფუნქციათა კლასს $\left(f \in BO(G_m)\right)$, თუ

$$\sup_k O(f, M_k) < \infty.$$

ონევერმა და ვატერმანმა დაამტკიცეს, რომ სამართლიანია შემდეგი თეორემა

თეორემა OW1.

ვთქვათ f ფუნქცია უწყვეტია G_m-ზე. თუ

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\beta=1}^{M_k-1} \frac{1}{\beta} \left| \sum_{j=0}^{m_{k+1}-1} f\left(x - Z_\beta^{(k)} - jx_k\right) e^{2\pi i j n_k / m_{k+1}} \right| = 0$$

თანაბრად x-ის მიმართ, მაშინ f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი თანაბრად კრებადია f-კენ G_m-ზე.

თეორემა OW2.

თუ $f \in C(G_m) \cap BO(G_m)$, მაშინ $S_n(f, x) \to f$ თანაბრად x-ის მიმართ G_m-ზე, როცა $n \to \infty$.

ვთქვათ $p(u)$ არის უწყვეტი, ნამდვილმნიშვნელობიანი, მკაცრად ზრდადი ფუნქცია განსაზღვრული როცა $u \geq 0$ ისეთი, რომ $p(0) = 0$ და $\lim_{u\to\infty} p(u) = \infty$.

ვთქვათ $q(u\,)$ არის $p(u)$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია. ვთქვათ

$$M(u) = \int_0^u p(t)\,dt \qquad \text{და} \qquad N(u) = \int_0^u q(t)dt.$$

M და N ფუნქციები აკმაყოფილებენ იუნგის უტოლობას

თუ $a, b \geq 0$, მაშინ $ab \leq M(a) + N(b)$.

განმარტება 2.

ფუნქცია f G_m-ზე არის განზოგადებული სასრული M- ოსცილაციის ფუნქცია

$(f \in BO_M)$, თუ არსებობს $C < \infty$ ისეთი, რომ ყოველი n-თვის

$$\sup_k \sum_{\beta=1}^{M_k-1} M\left(\omega\left(f, I_k + Z_\beta^{(k)}\right)\right) < C.$$

შედეგი [ონევერი, ვატერმანი [8]].

ვთქვათ $f \in C(G_m) \cap BO_M$ და $\sum_{k=1}^{\infty} N(k^{-1}) < \infty$, მაშინ f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი თანაბრად კრებადია f-კენ G_m-ზე.

ვილენკინ-ფურიეს მწკრივის (C, α) $(0 < \alpha < 1)$ საშუალოები განიმარტება შემდეგნაირად:

$$\sigma_n^\alpha(f; x) = \frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{-\alpha-1}\, S_\nu(x; f)$$

$$= \frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}} \sum_{\nu=0}^{n-1} A_{n-1-\nu}^{-\alpha}\, \hat{f}(\nu) \Psi_\nu(x)$$

$$= \int_{G_m} f\left(x-t\right) K_n^{-\alpha}(t) d\mu(t),$$

სადაც

$$A_0^{\alpha} = 0, \qquad A_n^{\alpha} = \frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}{n!}, \qquad \alpha \neq -1, -2, \dots,$$

$$K_n^{-\alpha}(t) = \frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}} \sum_{\nu=0}^{n-1} A_{n-1-\nu}^{-\alpha} \Psi_\nu(t).$$

ცნობილია, რომ [13]

$$A_n^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n-1} A_{n-k}^{\alpha-1} \tag{8}$$

$$A_n^{\alpha} \sim n^{\alpha} \tag{9}$$

$$A_n^{\alpha} - A_{n-1}^{\alpha} = A_n^{\alpha-1} \tag{10}$$

ნაშრომში მტკიცდება, რომ სამართლიანია შემდეგი.

თეორემა 1.

ვთქვათ $f \in C(G_m)$, $\alpha \in (0,1)$ და

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\beta=1}^{M_k-1} \frac{1}{\beta^{1-\alpha}} \left|\left(f\left(x - Z_\beta^{(k)}\right) - f\left(x - Z_\beta^{(k)} - e_k\right)\right)\right| = 0$$

თანაბრად x-ის მიმართ G_m-ზე. მაშინ

$$\lim_{k\to\infty} \|\sigma_n^{-\alpha}(f) - f\|_C = 0.$$

შემოვიღოთ ფუნქციის მახასიათებელი შემდეგნაირად :

$$\nu(M_k, f) = \sum_{\beta=0}^{M_k-1} \omega\left(f, I_k + Z_\beta^{(k)}\right),$$

რომელიც წარმოადგენს ჭანტურიას ცვლილების მოდულის ანალოგს ჯგუფებისათვის.

სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 2.

ვთქვათ $f \in C(G_m)$ და $\alpha \in (0,1)$. თუ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu(M_k, f)}{M_k^{1-\alpha}} < \infty,$$

მაშინ

$$\lim_{k \to \infty} \|\sigma_n^{-\alpha}(f) - f\|_C = 0.$$

აქედან გამომდინარეობს შემდეგი შედეგი

შედეგი 1.

ვთქვათ $f \in C(G_m) \cap BO_M$, $\alpha \in (0,1)$ და

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k^{\alpha} \, M^{-1}\left(\frac{1}{M_k}\right) < \infty,$$

მაშინ

$$\lim_{k \to \infty} \|\sigma_n^{-\alpha}(f) - f\|_C = 0.$$

შედეგი 2.

ვთქვათ $f \in C(G_m) \cap BO_p$, $0 < \alpha < \frac{1}{p}$, მაშინ

$$\lim_{k \to \infty} \|\sigma_n^{-\alpha}(f) - f\|_C = 0.$$

ძირითადი შედეგების ჩამოყალიბება

თეორემა 1.

ვთქვათ $f \in C(G_m)$, $\alpha \in (0,1)$ და

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\beta=1}^{M_k-1} \frac{1}{\beta^{1-\alpha}} \left| \left(f\left(x - Z_\beta^{(k)}\right) - f\left(x - Z_\beta^{(k)} - e_k\right) \right) \right| = 0$$

თანაბრად x-ის მიმართ G_m-ზე. მაშინ

$$\lim_{k\to\infty} \|\sigma_n^{-\alpha}(f) - f\|_C = 0.$$

თეორემა 2.

ვთქვათ $f \in C(G_m)$ და $\alpha \in (0,1)$. თუ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu(M_k, f)}{M_k^{1-\alpha}} < \infty,$$

მაშინ

$$\lim_{k\to\infty} \|\sigma_n^{-\alpha}(f) - f\|_C = 0.$$

აქედან გამომდინარეობს შემდეგი შედეგი

შედეგი 1.

ვთქვათ $f \in C(G_m) \cap BO_M$, $\alpha \in (0,1)$ და

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k^{\alpha}\, M^{-1}\left(\frac{1}{M_k}\right) < \infty,$$

მაშინ

$$\lim_{k\to\infty} \|\sigma_n^{-\alpha}(f) - f\|_C = 0.$$

შედეგი 2.

ვთქვათ $f \in C(G_m) \cap BO_p$, $0 < \alpha < \frac{1}{p}$, მაშინ

$$\lim_{k\to\infty} \|\sigma_n^{-\alpha}(f) - f\|_C = 0.$$

დამხმარე დებულებები

ვთქვათ $n \coloneqq n^{(A)} = n_A M_A + \cdots + n_0 M_0, \quad n_A \neq 0.$

ლემა 1. ვთქვათ $\alpha \epsilon (0,1)$, მაშინ

$$\sum_{j=1}^{n} A_{n-j}^{-\alpha-1} D_j(x) = \sum_{k=0}^{A} \prod_{l=k+1}^{A} \Psi_{n_l M_l}(x) D_{n_k M_k}(x)\, A_{n^{(k)}-1}^{-\alpha}$$

$$-\sum_{k=0}^{A} \prod_{l=k+1}^{A} \Psi_{n_l M_l}(x) \sum_{j=0}^{n_k M_k - 1} \Psi_{n_k M_k - 1}(x) A_{n^{(k-1)}+j}^{-\alpha-1} \overline{D_j(x)}$$

დამტკიცება.

(5) და (8) თვისებების გამოყენებით გვექნება

$$\sum_{j=1}^{n} A_{n-j}^{-\alpha-1} D_j(x) = \sum_{j=1}^{n_A M_A} A_{n-j}^{-\alpha-1} D_j(x) + \sum_{j=n_A M_A+1}^{n} A_{n-j}^{-\alpha-1} D_j(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n_A M_A} A_{n-j}^{-\alpha-1} D_j(x) + \sum_{j=1}^{n^{(A-1)}} A_{n^{(A-1)}-j}^{-\alpha-1} D_{n_A M_A + j}(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n_A M_A} A_{n-j}^{-\alpha-1} D_j(x) + \sum_{j=1}^{n^{(A-1)}} A_{n^{(A-1)}-j}^{-\alpha-1} D_{n_A M_A} + \sum_{j=1}^{n^{(A-1)}} A_{n^{(A-1)}-j}^{-\alpha-1} \Psi_{n_A M_A}(x) D_j(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n_A M_A} A_{n-j}^{-\alpha-1} D_j(x) + D_{n_A M_A} \sum_{j=0}^{n^{(A-1)}-1} A_{n^{(A-1)}-1-j}^{-\alpha-1} + \Psi_{n_A M_A}(x) \sum_{j=1}^{n^{(A-1)}} A_{n^{(A-1)}-j}^{-\alpha-1} D_j(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n_A M_A} A_{n-j}^{-\alpha-1} D_j(x) + D_{n_A M_A} A_{n^{(A-1)}-1}^{-\alpha} + \Psi_{n_A M_A}(x) \sum_{j=1}^{n^{(A-1)}} A_{n^{(A-1)}-j}^{-\alpha-1} D_j(x)$$

გამოვიყენოთ იტერაცია, გვექნება

$$\sum_{j=1}^{n^{(A-1)}} A_{n^{(A-1)}-j}^{-\alpha-1} D_j(x) = \sum_{j=1}^{n_{A-1} M_{A-1}} A_{n^{(A-1)}-j}^{-\alpha-1} D_j(x) + \sum_{j=n_{A-1} M_{A-1}+1}^{n^{(A-1)}} A_{n^{(A-1)}-j}^{-\alpha-1} D_j(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n_{A-1} M_{A-1}} A_{n^{(A-1)}-j}^{-\alpha-1} D_j(x) + \sum_{j=1}^{n^{(A-2)}} A_{n^{(A-2)}-j}^{-\alpha-1} D_{n_{A-1} M_{A-1}+j}(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n_{A-1}M_{A-1}} A_{n^{(A-1)}-j}^{-\alpha-1} D_j(x) + \sum_{j=1}^{n^{(A-2)}} A_{n^{(A-2)}-j}^{-\alpha-1} D_{n_{A-1}M_{A-1}}(x) + \sum_{j=1}^{n^{(A-2)}} A_{n^{(A-2)}-j}^{-\alpha-1} \Psi_{n_{A-1}M_{A-1}}(x) D_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n_{A-1}M_{A-1}} A_{n^{(A-1)}-j}^{-\alpha-1} D_j(x) + D_{n_{A-1}M_{A-1}}(x) \sum_{j=0}^{n^{(A-2)}-1} A_{n^{(A-2)}-1-j}^{-\alpha-1} + \Psi_{n_{A-1}M_{A-1}}(x) \sum_{j=1}^{n^{(A-2)}} A_{n^{(A-2)}-j}^{-\alpha-1} D_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n_{A-1}M_{A-1}} A_{n^{(A-1)}-j}^{-\alpha-1} D_j(x) + D_{n_{A-1}M_{A-1}}(x) A_{n^{(A-2)}-1}^{-\alpha} + \Psi_{n_{A-1}M_{A-1}}(x) \sum_{j=1}^{n^{(A-2)}} A_{n^{(A-2)}-j}^{-\alpha-1} D_j$$

… … …

$$\sum_{j=1}^{n^{(1)}} A_{n^{(1)}-j}^{-\alpha-1} D_j(x) = \sum_{j=1}^{n_1M_1} A_{n^{(1)}-j}^{-\alpha-1} D_j(x) + \sum_{j=n_1M_1+1}^{n^{(1)}} A_{n^{(A-1)}-j}^{-\alpha-1} D_j(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n_1M_1} A_{n^{(1)}-j}^{-\alpha-1} D_j(x) + \sum_{j=1}^{n^{(0)}} A_{n^{(0)}-j}^{-\alpha-1} D_{n_1M_1+j}(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n_1M_1} A_{n^{(1)}-j}^{-\alpha-1} D_j(x) + \sum_{j=1}^{n^{(0)}} A_{n^{(0)}-j}^{-\alpha-1} D_{n_1M_1}(x) + \sum_{j=1}^{n^{(0)}} A_{n^{(0)}-j}^{-\alpha-1} \Psi_{n_1M_1}(x) D_j(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n_1M_1} A_{n^{(1)}-j}^{-\alpha-1} D_j(x) + D_{n_1M_1}(x) \sum_{j=0}^{n^{(0)}-1} A_{n^{(0)}-1-j}^{-\alpha-1} + \Psi_{n_1M_1}(x) \sum_{j=1}^{n^{(0)}} A_{n^{(0)}-j}^{-\alpha-1} D_j(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n_1M_1} A_{n^{(1)}-j}^{-\alpha-1} D_j(x) + D_{n_1M_1}(x) A_{n^{(0)}-1}^{-\alpha} + \Psi_{n_1M_1}(x) \sum_{j=1}^{n^{(0)}} A_{n^{(0)}-j}^{-\alpha-1} D_j(x)$$

საბოლოოდ მივიღებთ, რომ

$$\sum_{j=1}^{n} A_{n-j}^{-\alpha-1} D_j(x) = \sum_{k=0}^{A} \prod_{l=k+1}^{A} \Psi_{n_lM_l}(x) \sum_{j=1}^{n_kM_k} A_{n^{(k)}-j}^{-\alpha-1} D_j(x) + \tag{11}$$

$$+ \sum_{k=0}^{A} \prod_{l=k+1}^{A} \Psi_{n_lM_l}(x) D_{n_kM_k}(x) A_{n^{(k-1)}-1}^{-\alpha} = J_1 + J_2.$$

(7) თვისების გამოყენებით გვექნება

$$J_1=\sum_{k=0}^{A}\prod_{l=k+1}^{A}\Psi_{n_lM_l}(x)\sum_{j=1}^{n_kM_k}A_{n^{(k)}-j}^{-\alpha-1}D_j(x)=\sum_{k=0}^{A}\prod_{l=k+1}^{A}\Psi_{n_lM_l}(x)\sum_{j=1}^{n_kM_k}A_{n^{(k-1)}+n_kM_k-j}^{-\alpha-1}D_j(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{A}\prod_{l=k+1}^{A}\Psi_{n_lM_l}(x)\sum_{j=0}^{n_kM_k-1}A_{n^{(k-1)}+j}^{-\alpha-1}D_{n_kM_k-j}(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{A}\prod_{l=k+1}^{A}\Psi_{n_lM_l}(x)\sum_{j=0}^{n_kM_k-1}A_{n^{(k-1)}+j}^{-\alpha-1}D_{n_kM_k}(x) \tag{12}$$

$$-\sum_{k=0}^{A}\prod_{l=k+1}^{A}\Psi_{n_lM_l}(x)\sum_{j=0}^{n_kM_k-1}A_{n^{(k-1)}+j}^{-\alpha-1}\Psi_{n_kM_k-1}(x)\overline{D_j(x)}$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$\sum_{j=0}^{n_kM_k-1}A_{n^{(k-1)}+j}^{-\alpha-1}=\sum_{j=n^{(k-1)}}^{n^{(k-1)}+n_kM_k-1}A_j^{-\alpha-1}=\sum_{j=n^{(k-1)}}^{n^{(k)}-1}A_j^{-\alpha-1} \tag{13}$$

$$=\sum_{j=0}^{n^{(k)}-1}A_j^{-\alpha-1}-\sum_{j=0}^{n^{(k-1)}-1}A_j^{-\alpha-1}=A_{n^{(k)}-1}^{-\alpha}-A_{n^{(k-1)}-1}^{-\alpha}$$

დავუშვათ, რომ $n^{(-1)}=0$.

(12) და (13) ჩავსვათ (11)-ში, მივიღებთ

$$\sum_{j=1}^{n}A_{n-j}^{-\alpha-1}D_j(x)=\sum_{k=0}^{A}\prod_{l=k+1}^{A}\Psi_{n_lM_l}(x)D_{n_kM_k}(x)\sum_{j=0}^{n_kM_k-1}A_{n^{(k-1)}+j}^{-\alpha-1}$$

$$-\sum_{k=0}^{A}\prod_{l=k+1}^{A}\Psi_{n_lM_l}(x)\sum_{j=0}^{n_kM_k-1}A_{n^{(k-1)}+j}^{-\alpha-1}\Psi_{n_kM_k-1}(x)\overline{D_j(x)}$$

$$+\sum_{k=0}^{A}\prod_{l=k+1}^{A}\Psi_{n_lM_l}(x)D_{n_kM_k}(x)A_{n^{(k-1)}-1}^{-\alpha}$$

$$= \sum_{k=1}^{A} \prod_{l=k+1}^{A} \Psi_{n_l M_l}(x) D_{n_k M_k}(x) \left(A_{n^{(k)}-1}^{-\alpha} - A_{n^{(k-1)}-1}^{-\alpha} \right)$$

$$+ \prod_{l=1}^{A} \Psi_{n_l M_l}(x) D_{n_0 M_0}(x) \sum_{j=0}^{n_0 M_0 - 1} A_{n^{(k-1)}+j}^{-\alpha-1}$$

$$- \sum_{k=0}^{A} \prod_{l=k+1}^{A} \Psi_{n_l M_l}(x) \sum_{j=0}^{n_k M_k - 1} A_{n^{(k-1)}+j}^{-\alpha-1} \Psi_{n_k M_k - 1}(x) \overline{D_j(x)}$$

$$+ \sum_{k=0}^{A} \prod_{l=k+1}^{A} \Psi_{n_l M_l}(x) D_{n_k M_k}(x) A_{n^{(k-1)}-1}^{-\alpha}$$

$$= \sum_{k=0}^{A} \prod_{l=k+1}^{A} \Psi_{n_l M_l}(x) D_{n_k M_k}(x)\, A_{n^{(k)}-1}^{-\alpha}$$

$$- \sum_{k=0}^{A} \prod_{l=k+1}^{A} \Psi_{n_l M_l}(x) \sum_{j=0}^{n_k M_k - 1} \Psi_{n_k M_k - 1}(x) A_{n^{(k-1)}+j}^{-\alpha-1} \overline{D_j(x)}$$

ლემა 1 დამტკიცებულია.

ლემა 2. ვთქვათ $\alpha \epsilon (0,1)$, მაშინ

$$|K_n^{-\alpha}(x)| \le \frac{c(\alpha)}{A_{n-1}^{-\alpha}} \sum_{l=0}^{A} M_l^{-\alpha} D_{M_l}(x)$$

დამტკიცება.

ლემა 1-ის გათვალისწინებით გვაქვს

$$\left| \sum_{j=1}^{n} A_{n-j}^{-\alpha-1} D_j(x) \right| \le \sum_{k=0}^{A} D_{n_k M_k}(x) A_{n^{(k)}-1}^{-\alpha} + \sum_{k=0}^{A} \sum_{j=0}^{n_k M_k - 1} \left| A_{n^{(k-1)}+j}^{-\alpha-1} \right| \left| D_j(x) \right| := B_1 + B_2$$

დავუშვათ, რომ $n_k \neq 0$.

$$D_{n_A M_A}(x) = \sum_{\nu=0}^{n_A M_A - 1} \Psi_\nu(x) = \sum_{r=0}^{n_A - 1} \sum_{\nu = r M_A}^{(r+1) M_A - 1} \Psi_\nu(x) = \sum_{r=0}^{n_A - 1} \sum_{\nu=0}^{M_A - 1} \Psi_{\nu + r M_A}(x)$$

$$= \sum_{r=0}^{n_A-1} \sum_{\nu=0}^{M_A-1} \Psi_\nu(x)\Psi_{rM_A}(x) = \sum_{r=0}^{n_A-1} \Psi_{M_A}^r(x) \sum_{\nu=0}^{M_A-1} \Psi_\nu(x) = \sum_{r=0}^{n_A-1} \Psi_{M_A}^r(x) D_{M_A}(x)$$

(9) თვისების გამოყენებით $A_{n^{(k)}-1}^{-\alpha} \sim M_k^{-\alpha}$. გვექნება, რომ

$$B_1 \leq c(\alpha) \sum_{k=0}^{A} M_k^{-\alpha} D_{M_k}(x)$$

B_2-ის შესაფასებლად გამოვიყენოთ (6) .

$$B_2 = \sum_{k=0}^{A} \sum_{j=0}^{n_k M_k-1} \left|A_{n^{(k-1)}+j}^{-\alpha-1}\right| \left|D_j(x)\right|$$

$$= \sum_{k=0}^{A} \sum_{r=0}^{n_k-1} \sum_{j=rM_k}^{(r+1)M_k-1} \left|A_{n^{(k-1)}+j}^{-\alpha-1}\right| \left|D_j(x)\right|$$

$$= \sum_{k=0}^{A} \sum_{r=0}^{n_k-1} \sum_{j=0}^{M_k-1} \left|A_{n^{(k-1)}+j+rM_k}^{-\alpha-1}\right| \left|D_{j+rM_k}(x)\right|$$

$$= \sum_{k=0}^{A} \sum_{r=0}^{n_k-1} \sum_{j=0}^{M_k-1} \left|A_{n^{(k-1)}+j+rM_k}^{-\alpha-1}\right| D_{M_K}(x) + \sum_{k=0}^{A} \sum_{r=0}^{n_k-1} \sum_{j=0}^{M_k-1} \left|A_{n^{(k-1)}+j+rM_k}^{-\alpha-1}\right| \left|D_j(x)\right| = B_{21} + B_{22}$$

როცა $r \neq 0$, მაშინ $A_{n^{(k-1)}+j+rM_k}^{-\alpha-1} \sim M_k^{-\alpha-1}$

$$B_{21} \leq \sum_{k=0}^{A} \sum_{j=0}^{M_k-1} M_k^{-\alpha-1} D_{M_K}(x) = \sum_{k=0}^{A} M_k^{-\alpha-1} D_{M_K}(x) M_k = \sum_{k=0}^{A} M_k^{-\alpha} D_{M_k}(x).$$

ცნობილია, რომ [9]

$$D_n(x) = \Psi_n(x) \sum_{j=0}^{\infty} D_{M_j}(x) \sum_{a=m_j-n_j}^{m_j-1} r_j^a$$

$n^{(k-1)} = n_{k-1}M_{k-1} + \cdots + n_0 M_0$

დავუშვათ, რომ $n_{k-1} = n_{k-2} = \cdots = n_{t+1} = 0$ და $n_t \neq 0$. მაშინ

$$B_{22} \leq \sum_{k=0}^{A} \sum_{q=0}^{k-1} \sum_{j=M_q}^{M_{q+1}-1} \left|A_{n^{(k-1)}+j}^{-\alpha-1}\right| \left|D_j(x)\right|$$

$$= \sum_{k=0}^{A} \sum_{q=0}^{t} \sum_{j=M_q}^{M_{q+1}-1} \left| A_{n^{(k-1)}+j}^{-\alpha-1} \right| \left| D_j(x) \right| + \sum_{k=0}^{A} \sum_{q=t+1}^{k-1} \sum_{j=M_q}^{M_{q+1}-1} \left| A_{n^{(k-1)}+j}^{-\alpha-1} \right| \left| D_j(x) \right|$$

$$\sum_{q=0}^{t} \sum_{j=M_q}^{M_{q+1}-1} \left| A_{n^{(k-1)}+j}^{-\alpha-1} \right| \left| D_j(x) \right| \leq \sum_{q=0}^{t} \sum_{j=M_q}^{M_{q+1}-1} M_t^{-\alpha-1} \sum_{l=0}^{q} D_{M_l}(x)$$

$$\leq \sum_{q=0}^{t} \left(M_{q+1} - M_q \right) M_t^{-\alpha-1} \sum_{l=0}^{q} D_{M_l}(x) \leq \sum_{q=0}^{t} \left(M_{q+1} - M_q \right) M_t^{-\alpha-1} \sum_{l=0}^{t} D_{M_l}(x)$$

$$= M_t \cdot M_t^{-\alpha-1} \sum_{l=0}^{t} D_{M_l}(x) = M_t^{-\alpha} \sum_{l=0}^{t} D_{M_l}(x)$$

$$\sum_{t=0}^{A} M_t^{-\alpha} \sum_{l=0}^{t} D_{M_l}(x) \leq \sum_{t=0}^{A} D_{M_l}(x) \sum_{t=l}^{A} M_t^{-\alpha} \leq \sum_{l=0}^{A} M_l^{-\alpha} D_{M_l}(x)$$

დაშვების ძალით $n_{k-1} = n_{k-2} = \cdots = n_{t+1} = 0$. რადგანაც

$$\left| D_j(x) \right| = \sum_{l=0}^{q} D_{M_l}(x) = \sum_{l=0}^{t} D_{M_l}(x),$$

ამიტომ

$$\sum_{q=t+1}^{k-1} \sum_{j=M_q}^{M_{q+1}-1} \left| A_{n^{(k-1)}+j}^{-\alpha-1} \right| \left| D_j(x) \right| \leq \sum_{q=t+1}^{k-1} \sum_{j=M_q}^{M_{q+1}-1} M_q^{-\alpha-1} \sum_{l=0}^{q} D_{M_l}(x)$$

$$\leq \sum_{q=t+1}^{k-1} M_q^{-\alpha} \sum_{l=0}^{q} D_{M_l}(x) \leq M_t^{-\alpha} \sum_{l=0}^{t} D_{M_l}(x).$$

$$B_{22} \leq c(\alpha) \sum_{l=0}^{A} M_l^{-\alpha} D_{M_l}(x).$$

საბოლოოდ დავასკვნით , რომ

$$\left| K_n^{-\alpha}(x) \right| \leq \frac{c(\alpha)}{A_{n-1}^{-\alpha}} \sum_{l=0}^{A} M_l^{-\alpha} D_{M_l}(x).$$

დავუშვათ, რომ $Z_\beta^{(k)} = \left(0, \cdots 0, x_q \neq 0, x_{q+1}, \cdots x_{k-1}, 0,0, \cdots\right)$, მაშინ

$$\beta = \sum_{j=q}^{k-1} \left(\frac{x_j}{M_{j+1}}\right) M_k \sim \frac{M_k}{M_q}$$

ლემა 3.

ვთქვათ $\alpha \in (0,1)$. მაშინ

$$\left|K_n^{-\alpha}\left(Z_\beta^{(k)}\right)\right| \leq \frac{c(\alpha)}{\beta^{1-\alpha}} {M_k}^{1-\alpha}$$

დამტკიცება.

(9) თვისების გამოყენებით გვექნება

$$\left|K_n^{-\alpha}\left(Z_\beta^{(k)}\right)\right| \leq \frac{c(\alpha)}{A_{n-1}^{-\alpha}} \sum_{l=0}^{A} M_l^{-\alpha} D_{M_l}\left(Z_\beta^{(k)}\right) \leq \frac{c(\alpha)}{A_{n-1}^{-\alpha}} \sum_{l=0}^{q} M_l^{-\alpha} M_l = \frac{c(\alpha)}{A_{n-1}^{-\alpha}} \sum_{l=0}^{q} M_l^{1-\alpha}$$

$$\leq \frac{c(\alpha)}{M_k^{-\alpha}} M_q^{1-\alpha} = \frac{c(\alpha) \cdot M_k}{M_k^{1-\alpha}} M_q^{1-\alpha} = \frac{c(\alpha)}{\beta^{1-\alpha}} M_k.$$

ლემა 4. [10] ვთქვათ $f \in L^p(G_m)$, $p \in [1, \infty]$. მაშინ $\forall \alpha \in (0,1)$- თვის გვაქვს შემდეგი შეფასება

$$\frac{1}{A_n^{-\alpha}} \left\| \int_{G_m} \sum_{\nu=0}^{M_{k-1}-1} A_{n-1-\nu}^{-\alpha} \Psi_\nu(t) \left[f\left(x-t\right) - f\left(x\right) \right] \right\|_p d\mu(t) \leq c(p, \alpha) \sum_{r=0}^{k-1} \frac{M_r}{M_k} \, \omega\left(f, \frac{1}{M_k}\right).$$

ლემა 5. [1] ვთქვათ $a_1, \cdots, a_n$ ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ

$$\frac{1}{n} \int_{G_m} \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \, D_k(t) \right| d\mu(t) \leq \frac{c}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{1/2},$$

სადაც $c = const.$

ძირითადი შედეგების დამტკიცება

თეორემა 1.

ვთქვათ $f \in C(G_m)$, $\alpha \in (0,1)$ და

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\beta=1}^{M_k-1} \frac{1}{\beta^{1-\alpha}} \left| \left(f\left(x - Z_\beta^{(k)}\right) - f\left(x - Z_\beta^{(k)} - e_k\right) \right) \right| = 0$$

თანაბრად x-ის მიმართ G_m-ზე. მაშინ

$$\lim_{k\to\infty} \|\sigma_n^{-\alpha}(f) - f\|_C = 0.$$

დამტკიცება.

$$\sigma_n^{-\alpha}(x,f) - f(x) = \int_{G_m} \left[f\left(x-t\right) - f\left(x\right) \right] K_n^{-\alpha}(t) d\mu(t)$$

$$= \frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}} \int_{G_m} \sum_{\nu=0}^{n-1} A_{n-1-\nu}^{-\alpha} \Psi_\nu(t) [f(x-t) - f(x)] d\mu(t)$$

$$= \frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}} \int_{G_m} \sum_{\nu=0}^{M_{k-1}-1} A_{n-1-\nu}^{-\alpha} \Psi_\nu(t) \left[f\left(x-t\right) - f\left(x\right) \right] d\mu(t)$$

$$= \frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}} \int_{G_m} \sum_{\nu=M_{k-1}}^{M_k-1} A_{n-1-\nu}^{-\alpha} \Psi_\nu(t) \left[f\left(x-t\right) - f\left(x\right) \right] d\mu(t)$$

$$= \frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}} \int_{G_m} \sum_{\nu=M_k}^{n_k M_k-1} A_{n-1-\nu}^{-\alpha} \Psi_\nu(t) \left[f\left(x-t\right) - f\left(x\right) \right] d\mu(t)$$

$$= \frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}} \int_{G_m} \sum_{\nu=n_k M_k}^{n-1} A_{n-1-\nu}^{-\alpha} \Psi_\nu(t) \left[f\left(x-t\right) - f\left(x\right) \right] d\mu(t)$$

$$= I + II + III + IV$$

თავდაპირველად შევაფასოთ $IV.$

$$IV = \frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}} \int_{G_m} \sum_{\nu=n_k M_k}^{n-1} A_{n-1-\nu}^{-\alpha} \Psi_\nu(t) \left[f\left(x-t\right) - f\left(x\right) \right] d\mu(t)$$

$$=\frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}}\int\limits_{G_m}\sum_{\nu=0}^{n'-1}A_{n-1-\nu}^{-\alpha}\,\Psi_\nu(t)\Psi_{M_k}^{n_k}(t)\left[f\left(x-t\right)-f\left(x\right)\right]d\mu(t)$$

$$=\frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}}\int\limits_{G_m}\Psi_{M_k}^{n_k}(t)\sum_{\nu=0}^{n'}A_{n-\nu}^{-\alpha}\,D_\nu(t)\left[f\left(x-t\right)-f\left(x\right)\right]d\mu(t)$$

$$=\frac{A_{n'-1}^{-\alpha}}{A_{n-1}^{-\alpha}}\int\limits_{G_m}\Psi_{M_k}^{n_k}(t)\,K_{n'}^{-\alpha}(t)\left[f\left(x-t\right)-f\left(x\right)\right]d\mu(t)$$

გამოვიყენოთ G_m –ის (1) წარმოდგენა.

თუ $x\in I_k,\quad 0\le\beta<M_k$, მაშინ

$$D_{n'}\left(Z_\beta^{(k)}+t\right)=\sum_{i=0}^{n'-1}\Psi_i\left(Z_\beta^{(k)}\right)\Psi_i(t)=\sum_{i=0}^{n'-1}\Psi_i\left(Z_\beta^{(k)}\right)=D_{n'}\left(Z_\beta^{(k)}\right),$$

$$K_{n'}\left(Z_\beta^{(k)}+t\right)=K_{n'}\left(Z_\beta^{(k)}\right).$$

$\Psi_k(t)$-ების ორთოგონალურობის გამო

$$\int\limits_{G_m}f(x)\Psi_{M_k}^{n_k}(t)\,K_{n'}^{-\alpha}(t)d\mu(t)=0.$$

$$IV=\frac{A_{n'-1}^{-\alpha}}{A_{n-1}^{-\alpha}}\int\limits_{G_m}f(x-t)\,\Psi_{M_k}^{n_k}(t)\,K_{n'}^{-\alpha}(t)d\mu(t)$$

$$=\frac{A_{n'-1}^{-\alpha}}{A_{n-1}^{-\alpha}}\sum_{\beta=0}^{M_k-1}\int\limits_{I_k+Z_\beta^{(k)}}f(x-t)\,\Psi_{M_k}^{n_k}(t)\,K_{n'}^{-\alpha}(t)d\mu(t)$$

$$=\frac{A_{n'-1}^{-\alpha}}{A_{n-1}^{-\alpha}}\sum_{\beta=0}^{M_k-1}\int\limits_{I_k}f\left(x-t-Z_\beta^{(k)}\right)\Psi_{M_k}^{n_k}(t)\,\Psi_{M_k}^{n_k}\left(Z_\beta^{(k)}\right)K_{n'}^{-\alpha}\left(Z_\beta^{(k)}+t\right)d\mu(t)$$

$$=\frac{A_{n'-1}^{-\alpha}}{A_{n-1}^{-\alpha}}\int\limits_{I_k}f(x-t)\,\Psi_{M_k}^{n_k}(t)\,\Psi_{M_k}^{n_k}(0)\,K_{n'}^{-\alpha}(0)d\mu(t)$$

$$+\frac{A_{n'-1}^{-\alpha}}{A_{n-1}^{-\alpha}}\sum_{\beta=1}^{M_k-1}\int\limits_{I_k}f\left(x-t-Z_\beta^{(k)}\right)\Psi_{M_k}^{n_k}(t)\,\Psi_{M_k}^{n_k}\left(Z_\beta^{(k)}\right)K_{n'}^{-\alpha}\left(Z_\beta^{(k)}\right)d\mu(t)=IV_1+IV_2$$

შევნიშნოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი

$$\Psi_{M_k}^{-n_k}(e_k)\,\Psi_{M_k}^{n_k}(t)=e^{\frac{-2\pi i}{m_k}n_k}e^{\frac{2\pi i t_k}{m_k}n_k}=e^{\frac{2\pi i(t_k-1)}{m_k}n_k}=\ \Psi_{M_k}^{n_k}(t-e_k)$$

ასევე გვაქვს შემდეგი შეფასება :

$$\left|1\ -\ \Psi_{M_k}^{-n_k}(e_k)\right|=\left|1-\cos\frac{2\pi}{m_k}n_k+i\ \sin\frac{2\pi}{m_k}n_k\right|$$

$$=\sqrt{1-2\cos\frac{2\pi}{m_k}n_k+\cos^2\frac{2\pi}{m_k}n_k+\sin^2\frac{2\pi}{m_k}n_k}$$

$$=\sqrt{2-2\cos\frac{2\pi}{m_k}n_k}=\left|2\sin\frac{\pi}{m_k}n_k\right|\geq 2\sin\frac{\pi}{m}=c$$

$$\Psi_{M_k}^{-n_k}(e_k)IV_1=\ \Psi_{M_k}^{-n_k}(e_k)\frac{A_{n'-1}^{-\alpha}}{A_{n-1}^{-\alpha}}\int\limits_{I_k}\ f(x-t)\,K_{n'}^{-\alpha}(0)\,\Psi_{M_k}^{n_k}(t)d\mu(t)$$

$$=\frac{A_{n'-1}^{-\alpha}}{A_{n-1}^{-\alpha}}\int\limits_{I_k}\ f(x-t)\,K_{n'}^{-\alpha}(0)\,\Psi_{M_k}^{n_k}(t-e_k)d\mu(t)$$

$$=\frac{A_{n'-1}^{-\alpha}}{A_{n-1}^{-\alpha}}\int\limits_{I_k}\ f(x-t-e_k)\,K_{n'}^{-\alpha}(0)\,\Psi_{M_k}^{n_k}(t)d\mu(t).$$

აქედან გამომდინარე გვექნება

$$\left|\,IV_1-\Psi_{M_k}^{-n_k}(e_k)IV_1\right|\leq\left|1\ -\ \Psi_{M_k}^{-n_k}(e_k)\right|$$

$$\times\frac{A_{n'-1}^{-\alpha}}{A_{n-1}^{-\alpha}}\int\limits_{I_k}\ \left|\big(f(x-t)\ -f(x-t-e_k)\big)K_{n'}^{-\alpha}(0)\,\Psi_{M_k}^{n_k}(t)\right|d\mu(t)$$

$$\leq c\frac{n'^{-\alpha}n'}{n^{-\alpha}M_k}\omega\left(f,\frac{1}{M_k}\right)\leq c\frac{n'^{1-\alpha}}{n^{1-\alpha}}\omega\left(f,\frac{1}{M_k}\right)=c\left(\frac{n'}{n}\right)^{1-\alpha}\omega\left(f,\frac{1}{M_k}\right)\leq c\ \omega\left(f,\frac{1}{M_k}\right)$$

ლემა 3-ის გათვალისწინებით

$$\left|K_n^{-\alpha}\left(Z_\beta^{(k)}\right)\right|\leq\frac{c(\alpha)}{\beta^{1-\alpha}}{M_k}^{1-\alpha}$$

IV_1-ის შეფასების ანალოგიურად IV_2-თვის გვექნება

$$\left| IV_2 - \Psi_{M_k}^{-n_k}(e_k) IV_2 \right| \leq \left| 1 - \Psi_{M_k}^{-n_k}(e_k) \right|$$

$$\times \frac{A_{n'-1}^{-\alpha}}{A_{n-1}^{-\alpha}} \int_{I_k} \sum_{\beta=1}^{M_k-1} \frac{1}{\beta^{1-\alpha}} \left| \left(f\left(x-t-Z_\beta^{(k)}\right) - f\left(x-t-Z_\beta^{(k)}-e_k\right)\right) \Psi_{M_k}^{n_k}(t) \right| d\mu(t)$$

$$\leq \frac{c(\alpha) n'^{-\alpha}}{{M_k}^{1-\alpha}} {M_k}^{1-\alpha} o(1)$$

ახლა შევაფასოთ III წევრი.

$$III = \frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}} \int_{G_m} \sum_{\nu=M_k}^{n_k M_k-1} A_{n-1-\nu}^{-\alpha} \Psi_\nu(t) \left[f\left(x-t\right) - f\left(x\right) \right] d\mu(t)$$

$$= \frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}} \int_{G_m} \sum_{\nu=M_k}^{(n_k-1)M_k-1} A_{n-1-\nu}^{-\alpha} \Psi_\nu(t) \left[f\left(x-t\right) - f\left(x\right) \right] d\mu(t)$$

$$+ \frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}} \int_{G_m} \sum_{\nu=(n_k-1)M_k}^{n_k M_k-1} A_{n-1-\nu}^{-\alpha} \Psi_\nu(t) \left[f\left(x-t\right) - f\left(x\right) \right] d\mu(t) = III_1 + III_2$$

სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$\left\| f - S_{M_k}(f) \right\|_C = \left\| \int_{G_m} \left(f(\cdot - t) - f(\cdot) \right) D_{M_k}(t) d\mu(t) \right\|_C$$

$$\leq \int_{G_m} \| f(\cdot - t) - f(\cdot) \|_C D_{M_k}(t) d\mu(t)$$

$$= M_k \int_{I_k} \| f(\cdot - t) - f(\cdot) \|_C d\mu(t) \leq \omega\left(f, \frac{1}{M_k}\right).$$

ამ შეფასების, აბელის გარდაქმნისა და (9) თვისების გამოყენებით გვექნება

$$|III_1| \leq \frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}} \int_{G_m} \left| \sum_{\nu=M_k}^{(n_k-1)M_k-1} A_{n-1-\nu}^{-\alpha} \Psi_\nu(t) \left(f(x-t) - S_{M_k}(f, x-t) \right) \right| d\mu(t)$$

$$\leq \frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}} \int\limits_{G_m} \left| \sum_{\nu=M_k}^{(n_k-1)M_k-1} A_{n-1-\nu}^{-\alpha} \Psi_\nu(t) \right| \omega\left(f, \frac{1}{M_k}\right)_C d\mu(t)$$

$$\leq n^\alpha \int\limits_{G_m} \left| \sum_{\nu=M_k}^{(n_k-1)M_k-2} A_{n-1-\nu}^{-\alpha-1} D_\nu(t) \right| \omega\left(f, \frac{1}{M_k}\right)_C d\mu(t)$$

$$+n^\alpha \int\limits_{G_m} \left| A_{n-1-(n_k-1)M_k-1}^{-\alpha} D_{(n_k-1)M_k-1}(t) \right| \omega\left(f, \frac{1}{M_k}\right)_C d\mu(t)$$

$$+n^\alpha \int\limits_{G_m} A_{n-1-M_k}^{-\alpha} D_{M_k}(t) \omega\left(f, \frac{1}{M_k}\right)_C d\mu(t) = III_{11} + III_{12} + III_{13}$$

III_{11}-ის შესაფასებლად გამოვიყენოთ შემდეგი ლემა 5.

$$III_{11} \leq c \cdot \sqrt{n} \cdot n^\alpha \left(\sum_{\nu=M_k}^{(n_k-1)M_k-2} (n-1-\nu)^{-2\alpha-2} \right)^{1/2} \omega\left(f, \frac{1}{M_k}\right)_C$$

$$\leq c \cdot M_k^{1/2+\alpha} M_k^{-\alpha-1} M_k^{1/2} \omega\left(f, \frac{1}{M_k}\right)_C \leq c \cdot \omega\left(f, \frac{1}{M_k}\right)_C$$

$$III_{12} = n^\alpha \int\limits_{G_m} \left| A_{n-1-(n_k-1)M_k-1}^{-\alpha} D_{(n_k-1)M_k-1}(t) \right| \omega\left(f, \frac{1}{M_k}\right)_C d\mu(t)$$

$$D_{(n_k-1)M_k-1}(t) = \sum_{\nu=0}^{(n_k-1)M_k-1} \Psi_\nu(t) - \Psi_{(n_k-1)M_k-1}(t)$$

$$= \sum_{r=0}^{(n_k-2)} \sum_{\nu=rM_k}^{(r+1)M_k-1} \Psi_\nu(t) - \Psi_{(n_k-1)M_k-1}(t)$$

$$= \sum_{r=0}^{(n_k-2)} \sum_{\nu=0}^{M_k-1} \Psi_{\nu+rM_k}(t) - \Psi_{(n_k-1)M_k-1}(t)$$

$$= \sum_{r=0}^{(n_k-2)} \sum_{\nu=0}^{M_k-1} \Psi_\nu(t) \Psi_{rM_k}(t) - \Psi_{(n_k-1)M_k-1}(t)$$

$$= \sum_{r=0}^{(n_k-2)} \Psi_{rM_k}(t) \sum_{\nu=0}^{M_k-1} \Psi_\nu(t) - \Psi_{(n_k-1)M_k-1}(t)$$

$$= \sum_{r=0}^{(n_k-2)} \Psi_{rM_k}(t)\, D_{M_k}(t) - \Psi_{(n_k-1)M_k-1}(t).$$

ამ შეფასებისა, (2) და (9) თვისებების გამოყენებით

$$III_{12} \le c\, \omega\left(f, \frac{1}{M_k}\right)_C.$$

$$III_{13} = n^{\alpha} \int_{G_m} A_{n-1-M_k}^{-\alpha} D_{M_k}(t) \omega\left(f, \frac{1}{M_k}\right)_C d\mu(t)$$

$$\le c\, M_k^{\alpha}\, M_k^{-\alpha} M_k \int_{I_k} \omega\left(f, \frac{1}{M_k}\right)_C d\mu(t) \le c\, \omega\left(f, \frac{1}{M_k}\right)_C.$$

$$III_2 = \frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}} \int_{G_m} \sum_{\nu=(n_k-1)M_k}^{n_k M_k - 1} A_{n-1-\nu}^{-\alpha}\, \Psi_\nu(t) \left[f(x-t) - f(x) \right] d\mu(t)$$

$$\sum_{\nu=(n_k-1)M_k}^{n_k M_k - 1} A_{n-1-\nu}^{-\alpha}\, \Psi_\nu(t) = \sum_{\nu=0}^{M_k-1} A_{n-1-(n_k-1)M_k-\nu}^{-\alpha}\, \Psi_{\nu+(n_k-1)M_k}(t)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{M_k-1} A_{n-1-(n_k-1)M_k-\nu}^{-\alpha}\, \Psi_\nu(t) \Psi_{M_k}^{n_k-1}(t)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-1-(n_k-1)M_k} A_{n-1-(n_k-1)M_k-\nu}^{-\alpha}\, \Psi_\nu(t) \Psi_{M_k}^{n_k-1}(t)$$

$$- \sum_{\nu=M_k}^{n-1-(n_k-1)M_k} A_{n-1-(n_k-1)M_k-\nu}^{-\alpha}\, \Psi_\nu(t) \Psi_{M_k}^{n_k-1}(t)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-1-(n_k-1)M_k} A_{n-1-(n_k-1)M_k-\nu}^{-\alpha}\, \Psi_\nu(t) \Psi_{M_k}^{n_k-1}(t)$$

$$- \sum_{\nu=0}^{n-1-n_k M_k} A_{n-1-n_k M_k-\nu}^{-\alpha}\, \Psi_\nu(t) \Psi_{M_k}(t) \Psi_{M_k}^{n_k-1}(t)$$

$$= \Psi_{M_k}^{n_k-1}(t) A_{n-1-(n_k-1)M_k}^{-\alpha} K_{n-1-(n_k-1)M_k}^{-\alpha}(t)$$

$$-\Psi_{M_k}^{n_k}(t) A_{n-1-n_k M_k}^{-\alpha} K_{n-1-n_k M_k}^{-\alpha}(t).$$

$$III_2 = \frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}} \int_{G_m} A_{n-1-(n_k-1)M_k}^{-\alpha} K_{n-1-(n_k-1)M_k}^{-\alpha}(t) \Psi_{M_k}^{n_k-1}(t) \left[f\left(x-t\right) - f\left(x\right) \right] d\mu(t)$$

$$-\frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}} \int_{G_m} A_{n-1-n_kM_k}^{-\alpha} K_{n-1-n_kM_k}^{-\alpha}(t) \Psi_{M_k}^{n_k}(t) \left[f\left(x-t\right) - f\left(x\right) \right] d\mu(t) = III_{21} - III_{22}$$

$\Psi_\nu(t)$-ის ორთოგონალურობის გამო

$$. \int_{G_m} f(x) \Psi_{M_k}^{n_k-1}(t) K_{n-1-(n_k-1)M_k}^{-\alpha}(t)\, d\mu(t) = \int_{G_m} f(x) \Psi_{M_k}^{n_k}(t) K_{n-1-n_kM_k}^{-\alpha}(t) d\mu(t) = 0.$$

$$III_{21} = \frac{A_{n-1-(n_k-1)M_k}^{-\alpha}}{A_{n-1}^{-\alpha}} \int_{G_m} f(x-t) K_{n-1-(n_k-1)M_k}^{-\alpha}(t) \Psi_{M_k}^{n_k-1}(t) d\mu(t)$$

$$= \frac{A_{n-1-(n_k-1)M_k}^{-\alpha}}{A_{n-1}^{-\alpha}} \sum_{\beta=0}^{M_k-1} \int_{I_k+Z_\beta^{(k)}} f(x-t)\, \Psi_{M_k}^{n_k-1}(t) K_{n-1-(n_k-1)M_k}^{-\alpha}(t) d\mu(t)$$

$$= \frac{A_{n-1-(n_k-1)M_k}^{-\alpha}}{A_{n-1}^{-\alpha}} \sum_{\beta=0}^{M_k-1} \int_{I_k} f\left(x - t - Z_\beta^{(k)}\right) \Psi_{M_k}^{n_k-1}\left(t + Z_\beta^{(k)}\right) K_{n-1-(n_k-1)M_k}^{-\alpha}(t) \left(Z_\beta^{(k)} + t\right) d\mu(t)$$

$$= \frac{A_{n-1-(n_k-1)M_k}^{-\alpha}}{A_{n-1}^{-\alpha}} \int_{I_k} f(x-t)\, \Psi_{M_k}^{n_k-1}(t)\, \Psi_{M_k}^{n_k-1}(0)\, K_{n-1-(n_k-1)M_k}^{-\alpha}(0) d\mu(t)$$

$$+ \frac{A_{n-1-(n_k-1)M_k}^{-\alpha}}{A_{n-1}^{-\alpha}} \sum_{\beta=1}^{M_k-1} \int_{I_k} f\left(x - t - Z_\beta^{(k)}\right) \Psi_{M_k}^{n_k-1}(t)\, \Psi_{M_k}^{n_k-1}\left(Z_\beta^{(k)}\right) K_{n-1-(n_k-1)M_k}^{-\alpha}\left(Z_\beta^{(k)}\right) d\mu(t)$$

$$= III_{211} + III_{212}$$

შევნიშნოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი

$$\Psi_{M_k}^{-(n_k-1)}(e_k)\, \Psi_{M_k}^{n_k-1}(t) = e^{\frac{-2\pi i}{m_k}(n_k-1)} e^{\frac{2\pi i t_k}{m_k}(n_k-1)} = e^{\frac{2\pi i (t_k-1)}{m_k}(n_k-1)} = \Psi_{M_k}^{n_k-1}(t - e_k)$$

ასევე გვაქვს შემდეგი შეფასება :

$$\left|1 - \Psi_{M_k}^{-(n_k-1)}(e_k)\right| = \left|1 - \cos\frac{2\pi}{m_k}(n_k-1) + i\, \sin\frac{2\pi}{m_k}(n_k-1)\right|$$

$$= \sqrt{1 - 2\cos\frac{2\pi}{m_k}(n_k - 1) + \cos^2\frac{2\pi}{m_k}(n_k - 1) + \sin^2\frac{2\pi}{m_k}(n_k - 1)}$$

$$= \sqrt{2 - 2\cos\frac{2\pi}{m_k}(n_k - 1)} = \left|2\sin\frac{\pi}{m_k}(n_k - 1)\right| \geq 2\sin\frac{\pi}{m} = c,$$

ამიტომ

$$\Psi_{M_k}^{-(n_k-1)}(e_k)III_{211}$$

$$= \Psi_{M_k}^{-(n_k-1)}(e_k)\frac{A_{n-1-(n_k-1)M_k}^{-\alpha}}{A_{n-1}^{-\alpha}}\int_{I_k} f(x-t)\, K_{n-1-(n_k-1)M_k}^{-\alpha}(0)\, \Psi_{M_k}^{n_k-1}(t)d\mu(t)$$

$$= \frac{A_{n-1-(n_k-1)M_k}^{-\alpha}}{A_{n-1}^{-\alpha}}\int_{I_k} f(x-t)\, K_{n-1-(n_k-1)M_k}^{-\alpha}(0)\, \Psi_{M_k}^{n_k-1}(t-e_k)d\mu(t)$$

$$= \frac{A_{n-1-(n_k-1)M_k}^{-\alpha}}{A_{n-1}^{-\alpha}}\int_{I_k} f(x-t-e_k)\, K_{n-1-(n_k-1)M_k}^{-\alpha}(0)\, \Psi_{M_k}^{n_k-1}(t)d\mu(t).$$

აქედან გამომდინარე გვექნება

$$\left|III_{211} - \Psi_{M_k}^{-(n_k-1)}(e_k)III_{211}\right| \leq \left|1 - \Psi_{M_k}^{-(n_k-1)}(e_k)\right|$$

$$\times \frac{A_{n-1-(n_k-1)M_k}^{-\alpha}}{A_{n-1}^{-\alpha}}\int_{I_k} \left|\left(f(x-t) - f(x-t-e_k)\right)K_{n-1-(n_k-1)M_k}^{-\alpha}(0)\, \Psi_{M_k}^{n_k-1}(t)\right|d\mu(t)$$

$$\leq c\,\frac{{M_k}^{-\alpha}M_k}{{M_k}^{-\alpha}M_k}\,\omega\left(f, \frac{1}{M_k}\right) \leq c\,\omega\left(f, \frac{1}{M_k}\right)$$

III_{211}-ის შეფასების ანალოგიურად III_{212}-თვის გვექნება

$$\left|III_{212} - \Psi_{M_k}^{-(n_k-1)}(e_k)III_{212}\right| \leq \left|1 - \Psi_{M_k}^{-(n_k-1)}(e_k)\right|$$

$$\times \frac{A_{n-1-(n_k-1)M_k}^{-\alpha}}{A_{n-1}^{-\alpha}}\int_{I_k} \sum_{\beta=1}^{M_k-1}\frac{1}{\beta^{1-\alpha}}\left|\left(f\left(x-t-Z_\beta^{(k)}\right) - f\left(x-t-Z_\beta^{(k)}-e_k\right)\right)\, \Psi_{M_k}^{n_k-1}(t)\right|d\mu(t)$$

$$\leq \frac{c(\alpha){M_k}^{-\alpha}}{{M_k}^{1-\alpha}}{M_k}^{1-\alpha}o(1).$$

ანალოგიურად შეფასდება III_{22}.

$$II=\frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}}\int\limits_{G_m}\sum_{\nu=M_{k-1}}^{M_k-1}A_{n-1-\nu}^{-\alpha}\Psi_\nu(t)\left[f\left(x-t\right)-f\left(x\right)\right]d\mu(t)$$

$$=\frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}}\int\limits_{G_m}\sum_{\nu=M_{k-1}}^{m_{k-1}M_{k-1}-1}A_{n-1-\nu}^{-\alpha}\Psi_\nu(t)\left[f\left(x-t\right)-f\left(x\right)\right]d\mu(t)$$

$$=\frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}}\int\limits_{G_m}\sum_{\nu=M_{k-1}}^{(m_{k-1}-1)M_{k-1}-1}A_{n-1-\nu}^{-\alpha}\Psi_\nu(t)\left[f\left(x-t\right)-f\left(x\right)\right]d\mu(t)$$

$$+\frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}}\int\limits_{G_m}\sum_{\nu=(m_{k-1}-1)M_{k-1}}^{m_{k-1}M_{k-1}-1}A_{n-1-\nu}^{-\alpha}\Psi_\nu(t)\left[f\left(x-t\right)-f\left(x\right)\right]d\mu(t)=II_1+II_2.$$

შევაფასოთ II_1.

$$II_1=\frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}}\int\limits_{G_m}\sum_{\nu=M_{k-1}}^{(m_{k-1}-1)M_{k-1}-1}A_{n-1-\nu}^{-\alpha}\Psi_\nu(t)\left[f(x-t)-S_{M_{k-1}}(x-t,f)\right]d\mu(t)$$

$$|II_1|\le\frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}}\int\limits_{G_m}\left|\sum_{\nu=M_{k-1}}^{(m_{k-1}-1)M_{k-1}-1}A_{n-1-\nu}^{-\alpha}\Psi_\nu(t)\left[f(x-t)-S_{M_{k-1}}(x-t,f)\right]\right|d\mu(t)$$

$$\le\frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}}\int\limits_{G_m}\left|\sum_{\nu=M_{k-1}}^{(m_{k-1}-1)M_{k-1}-1}A_{n-1-\nu}^{-\alpha}\Psi_\nu(t)\right|\omega\left(f,\frac{1}{M_{k-1}}\right)_C d\mu(t)$$

$$\le n^\alpha\int\limits_{G_m}\left|\sum_{\nu=M_{k-1}}^{(m_{k-1}-1)M_{k-1}-2}A_{n-1-\nu}^{-\alpha}D_\nu(t)\right|\omega\left(f,\frac{1}{M_{k-1}}\right)_C d\mu(t)$$

$$+n^\alpha\int\limits_{G_m}\left|A_{n-1-(m_{k-1}-1)M_{k-1}-1}^{-\alpha}D_{(m_{k-1}-1)M_{k-1}-1}(t)\right|\omega\left(f,\frac{1}{M_{k-1}}\right)_C d\mu(t)$$

$$+n^\alpha\int\limits_{G_m}\left|A_{n-1-M_{k-1}}^{-\alpha}D_{M_{k-1}}(t)\right|\omega\left(f,\frac{1}{M_{k-1}}\right)_C d\mu(t)=II_{11}+II_{12}+II_{13}.$$

$$II_{11}\le c\cdot\sqrt{n}\cdot n^\alpha\left(\sum_{\nu=M_{k-1}}^{(m_{k-1}-1)M_k-2}(n-1-\nu)^{-2\alpha-2}\right)^{1/2}\omega\left(f,\frac{1}{M_{k-1}}\right)_C$$

$$\leq c\cdot M_k^{1/2+\alpha}M_k^{-\alpha-1}M_k^{1/2}\omega\left(f,\frac{1}{M_k}\right)_C \leq c\cdot\omega\left(f,\frac{1}{M_{k-1}}\right)_C.$$

$$II_{12}=n^{\alpha}\int_{G_m}\left|A_{n-1-(m_{k-1}-1)M_k-1}^{-\alpha}D_{(n_k-1)M_k-1}(t)\right|\omega\left(f,\frac{1}{M_{k-1}}\right)_C d\mu(t).$$

სამართლიანია შემდეგი ტოლობები

$$D_{(m_{k-1}-1)M_k-1}(t)=\sum_{\nu=0}^{(m_{k-1}-1)M_{k-1}-1}\Psi_\nu(t)-\Psi_{(m_{k-1}-1)M_k-1}(t)$$

$$=\sum_{r=0}^{(m_{k-1}-2)}\sum_{\nu=rM_{k-1}}^{(r+1)M_{k-1}-1}\Psi_\nu(t)-\Psi_{(m_{k-1}-1)M_k-1}(t)$$

$$=\sum_{r=0}^{(m_{k-1}-2)}\sum_{\nu=0}^{M_{k-1}-1}\Psi_{\nu+rM_{k-1}}(t)-\Psi_{(m_{k-1}-1)M_k-1}(t)$$

$$=\sum_{r=0}^{(m_{k-1}-2)}\sum_{\nu=0}^{M_{k-1}-1}\Psi_\nu(t)\Psi_{rM_{k-1}}(t)-\Psi_{(m_{k-1}-1)M_k-1}(t)$$

$$=\sum_{r=0}^{(m_{k-1}-2)}\Psi_{rM_{k-1}}(t)\sum_{\nu=0}^{M_{k-1}-1}\Psi_\nu(t)-\Psi_{(m_{k-1}-1)M_k-1}(t)$$

$$=\sum_{r=0}^{(m_{k-1}-2)}\Psi_{rM_{k-1}}(t)\,D_{M_{k-1}}(t)-\Psi_{(m_{k-1}-1)M_k-1}(t).$$

II_{12} -თვის გვექნება შემდეგი შეფასება

$$II_{12}\leq c\,\omega\left(f,\frac{1}{M_{k-1}}\right)_C.$$

$$II_{13}=n^{\alpha}\int_{G_m}A_{n-1-M_{k-1}}^{-\alpha}D_{M_{k-1}}(t)\omega\left(f,\frac{1}{M_{k-1}}\right)_C d\mu(t)$$

$$\leq c\,M_k^{\alpha}\,M_k^{-\alpha}M_{k-1}\int_{I_{k-1}}\omega\left(f,\frac{1}{M_{k-1}}\right)_C d\mu(t)\leq c\,\omega\left(f,\frac{1}{M_{k-1}}\right)_C.$$

ახლა შევაფასოთ II_2.

$$II_2 = \frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}} \int\limits_{G_m} \sum_{\nu=0}^{M_{k-1}-1} A_{n-1-(m_{k-1}-1)M_{k-1}-\nu}^{-\alpha} \Psi_{\nu+(m_{k-1}-1)M_{k-1}}(t)\left[f\left(x-t\right)- f\left(x\right)\right] d\mu(t)$$

$$= \frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}} \int\limits_{G_m} \sum_{\nu=0}^{M_{k-1}-1} A_{n-1-(m_{k-1}-1)M_{k-1}-\nu}^{-\alpha} \Psi_{\nu}(t)\Psi_{M_{k-1}}^{m_{k-1}-1}(t)\left[f\left(x-t\right)- f\left(x\right)\right] d\mu(t)$$

$$= \frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}} \sum_{\beta=0}^{M_k-1} \int\limits_{I_k+Z_\beta^{(k)}} \sum_{\nu=0}^{M_{k-1}-1} A_{n-1-(m_{k-1}-1)M_{k-1}-\nu}^{-\alpha} \Psi_{\nu}(t)\Psi_{M_{k-1}}^{m_{k-1}-1}(t) f(x-t) d\mu(t)$$

$$= \frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}} \sum_{\beta=0}^{M_k-1} \int\limits_{I_k} \sum_{\nu=0}^{M_{k-1}-1} A_{n-1-(m_{k-1}-1)M_{k-1}-\nu}^{-\alpha} \Psi_{\nu}(t)\Psi_{\nu}\left(Z_\beta^{(k)}\right) \Psi_{M_{k-1}}^{m_{k-1}-1}(t)$$

$$\times \Psi_{M_{k-1}}^{m_{k-1}-1}\left(Z_\beta^{(k)}\right) f\left(x-t-Z_\beta^{(k)}\right) d\mu(t)$$

$$= \frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}} \int\limits_{I_k} \sum_{\nu=0}^{M_{k-1}-1} A_{n-1-(m_{k-1}-1)M_{k-1}-\nu}^{-\alpha} \Psi_{\nu}(t)\Psi_{\nu}(0)\Psi_{M_{k-1}}^{m_{k-1}-1}(t)\, \Psi_{M_{k-1}}^{m_{k-1}-1}(0) f(x-t)\, d\mu(t)$$

$$+ \frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}} \sum_{\beta=1}^{M_k-1} \int\limits_{I_k} \sum_{\nu=0}^{M_{k-1}-1} A_{n-1-(m_{k-1}-1)M_{k-1}-\nu}^{-\alpha} \Psi_{\nu}(t)\Psi_{\nu}\left(Z_\beta^{(k)}\right) \Psi_{M_{k-1}}^{m_{k-1}-1}(t)$$

$$\times \Psi_{M_{k-1}}^{m_{k-1}-1}\left(Z_\beta^{(k)}\right) f\left(x-t-Z_\beta^{(k)}\right) d\mu(t) = II_{21} + II_{22}.$$

შევნიშნოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი

$$\Psi_{M_{k-1}}^{-(m_{k-1}-1)}(e_{k-1})\, \Psi_{M_{k-1}}^{m_{k-1}-1}(t) = e^{\frac{-2\pi i}{m_{k-1}}(m_{k-1}-1)} e^{\frac{2\pi i t_k}{m_{k-1}}(m_{k-1}-1)}$$

$$= e^{\frac{2\pi i (t_k-1)}{m_{k-1}}(m_{k-1}-1)} = \Psi_{M_{k-1}}^{m_{k-1}-1}(t-e_{k-1})$$

ასევე გვაქვს შემდეგი შეფასება :

$$\left|1 - \Psi_{M_{k-1}}^{-(m_{k-1}-1)}(e_{k-1})\right| = \left|1 - \cos\frac{2\pi}{m_{k-1}}(m_{k-1}-1) + i\ \sin\frac{2\pi}{m_{k-1}}(m_{k-1}-1)\right|$$

$$= \sqrt{1 - 2\cos\frac{2\pi}{m_{k-1}}(m_{k-1}-1) + \cos^2\frac{2\pi}{m_{k-1}}(m_{k-1}-1) + \sin^2\frac{2\pi}{m_{k-1}}(m_{k-1}-1)}$$

$$= \sqrt{2 - 2\cos\frac{2\pi}{m_{k-1}}(m_{k-1} - 1)} = \left|2\sin\frac{\pi}{m_{k-1}}(m_{k-1} - 1)\right| \geq 2\sin\frac{\pi}{m} = c$$

$$\Psi_{M_{k-1}}^{-(m_{k-1}-1)}(e_{k-1})II_{21} = \Psi_{M_{k-1}}^{-(m_{k-1}-1)}(e_{k-1})\frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}}\int\limits_{I_k}\sum_{\nu=0}^{M_{k-1}-1} A_{n-1-(m_{k-1}-1)M_{k-1}-\nu}^{-\alpha}$$

$$\times\ \Psi_\nu(t)\Psi_\nu(0)\Psi_{M_{k-1}}^{m_{k-1}-1}(t)\ \Psi_{M_{k-1}}^{m_{k-1}-1}(0)f(x-t)\,d\mu(t)$$

$$= \frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}}\int\limits_{I_k}\sum_{\nu=0}^{M_{k-1}-1} A_{n-1-(m_{k-1}-1)M_{k-1}-\nu}^{-\alpha}\ \Psi_\nu(t)\,\Psi_\nu(0)\Psi_{M_{k-1}}^{m_{k-1}-1}(t - e_{k-1})$$

$$\times\ \Psi_{M_{k-1}}^{m_{k-1}-1}(0)f(x-t)\,d\mu(t)$$

$$= \frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}}\int\limits_{I_k}\sum_{\nu=0}^{M_{k-1}-1} A_{n-1-(m_{k-1}-1)M_{k-1}-\nu}^{-\alpha}\ \Psi_\nu(t - e_{k-1})\Psi_\nu(0)\Psi_{M_{k-1}}^{m_{k-1}-1}(t)$$

$$\times\ \Psi_{M_{k-1}}^{m_{k-1}-1}(0)f(x-t-e_{k-1})\,d\mu(t).$$

$$\left|II_{21} - \Psi_{M_{k-1}}^{-(m_{k-1}-1)}(e_{k-1})II_{21}\right| \leq \left|1 - \Psi_{M_{k-1}}^{-(m_{k-1}-1)}(e_{k-1})\right|$$

$$\times\frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}}\int\limits_{I_k}\left|\sum_{\nu=0}^{M_{k-1}-1} A_{n-1-(m_{k-1}-1)M_{k-1}-\nu}^{-\alpha}\ \Psi_\nu(t)\Psi_{M_{k-1}}^{m_{k-1}-1}(t)\big(f(x-t) - f(x-t-e_{k-1})\big)\right| d\mu(t)$$

$$\leq c\,\frac{1}{A_{n-1}^{-\alpha}}\int\limits_{I_k}\left|\sum_{\nu=0}^{M_{k-1}-1} A_{n-1-(m_{k-1}-1)M_{k-1}-\nu}^{-\alpha}\,\Psi_\nu(t)\right|\omega\left(f,\frac{1}{M_{k-1}}\right)_C d\mu(t)$$

$$\sum_{\nu=0}^{M_{k-1}-1} A_{n-1-(m_{k-1}-1)M_{k-1}-\nu}^{-\alpha}\,\Psi_\nu(t) = \sum_{\nu=0}^{n-1-(m_{k-1}-1)M_{k-1}} A_{n-1-(m_{k-1}-1)M_{k-1}-\nu}^{-\alpha}\,\Psi_\nu(t)$$

$$- \sum_{\nu=M_{k-1}}^{n-1-(m_{k-1}-1)M_{k-1}} A_{n-1-(m_{k-1}-1)M_{k-1}-\nu}^{-\alpha}\,\Psi_\nu(t)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-1-(m_{k-1}-1)M_{k-1}} A_{n-1-(m_{k-1}-1)M_{k-1}-\nu}^{-\alpha}\,\Psi_\nu(t)$$

$$-\sum_{\nu=0}^{n-1-m_{k-1}M_{k-1}} A_{n-1-m_{k-1}M_{k-1}-\nu}^{-\alpha}\Psi_{\nu}(t)\Psi_{M_{k-1}}(t)$$

$$=A_{n-1-(m_{k-1}-1)M_{k-1}}^{-\alpha}K_{n-1-(m_{k-1}-1)M_{k-1}}^{-\alpha}$$

$$-\Psi_{M_{k-1}}(t)A_{n-1-m_{k-1}M_{k-1}}^{-\alpha}K_{n-1-m_{k-1}M_{k-1}}^{-\alpha}$$

$$\left|II_{21}-\Psi_{M_k}^{-(m_{k-1}-1)}(e_{k-1})II_{21}\right|$$

$$\leq c(\alpha)\left(\left(\frac{n-1-m_{k-1}M_{k-1}}{n}\right)^{1-\alpha}+\left(\frac{n-1-(m_{k-1}-1)M_{k-1}}{n}\right)^{1-\alpha}\right)\omega\left(f,\frac{1}{M_{k-1}}\right)_C$$

$$\leq c(\alpha)\cdot c\cdot\omega\left(f,\frac{1}{M_{k-1}}\right)_C.$$

ანალოგიურად

$$\left|II_{22}-\Psi_{M_k}^{-(m_{k-1}-1)}(e_{k-1})II_{22}\right|\leq c(\alpha)\cdot c\cdot\omega\left(f,\frac{1}{M_{k-1}}\right)_C.$$

ლემა 4-ის გათვალისწინებით I წევრი მიდის 0-კენ.

თეორემა 2.

ვთქვათ $f\in C(G_m)$ და $\alpha\in(0,1)$. თუ

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\nu(M_k,f)}{M_k^{1-\alpha}}<\infty,$$

მაშინ

$$\lim_{k\to\infty}\|\sigma_n^{-\alpha}(f)-f\|_C=0.$$

დამტკიცება.

ცხადია, რომ

$$\sum_{\beta=1}^{M_k-1}\frac{1}{\beta^{1-\alpha}}\left|\left(f\left(x-Z_\beta^{(k)}\right)-f\left(x-Z_\beta^{(k)}-e_k\right)\right)\right|$$

$$=\sum_{r=0}^{k-1}\sum_{\beta=M_r}^{M_{r+1}-1}\frac{1}{\beta^{1-\alpha}}\left|\left(f\left(x-Z_\beta^{(k)}\right)-f\left(x-Z_\beta^{(k)}-e_k\right)\right)\right|$$

$$=\sum_{r=0}^{k-1}\frac{1}{M_r^{1-\alpha}}\sum_{\beta=M_r}^{M_{r+1}-1}\left|f\left(x-Z_\beta^{(k)}\right)-f\left(x-Z_\beta^{(k)}-e_k\right)\right|$$

$$=\sum_{r=0}^{\gamma(k)}\frac{1}{M_r^{1-\alpha}}\sum_{\beta=M_r}^{M_{r+1}-1}\left|f\left(x-Z_\beta^{(k)}\right)-f\left(x-Z_\beta^{(k)}-e_k\right)\right|$$

$$+\sum_{r=\gamma(k)}^{k-1}\frac{1}{M_r^{1-\alpha}}\sum_{\beta=M_r}^{M_{r+1}-1}\left|f\left(x-Z_\beta^{(k)}\right)-f\left(x-Z_\beta^{(k)}-e_k\right)\right|$$

$$\leq\omega\left(f,\frac{1}{M_k}\right)\sum_{r=0}^{\gamma(k)}M_r^\alpha+\sum_{r=\gamma(k)}^{k-1}\frac{1}{M_r^{1-\alpha}}\nu(M_r,f)$$

$$\leq\omega\left(f,\frac{1}{M_k}\right)M_{\gamma(k)}^\alpha+\sum_{r=\gamma(k)}^{k-1}\frac{1}{M_r^{1-\alpha}}\nu(M_r,f)$$

არსებობს ისეთი $\gamma(k)\to\infty$, და ამასთან $\omega\left(f,\frac{1}{M_k}\right)M_{\gamma(k)}^\alpha\to 0.$

თეორემის პირობიდან გამომდინარე

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\nu(M_k,f)}{M_k^{1-\alpha}}<\infty,$$

ამიტომ დავასკვნით, რომ

$$\sum_{r=\gamma(k)}^{k-1}\frac{1}{M_r^{1-\alpha}}\nu(M_r,f)\to 0\,,\qquad \text{როცა}\quad k\to\infty.$$

შედეგი 1.

ვთქვათ $f\in C(G_m)\bigcap BO_M$, $\alpha\in(0,1)$ და

$$\sum_{k=1}^{\infty}M_k^\alpha\,M^{-1}\left(\frac{1}{M_k}\right)<\infty,$$

მაშინ

$$\lim_{k\to\infty}\|\sigma_n^{-\alpha}(f)-f\|_C=0.$$

დამტკიცება.

$$M\left(\frac{\nu(M_k,f)}{M_k}\right)=M\left(\frac{1}{M_k}\sum_{\beta=1}^{M_k-1}\omega\left(f,I_k+Z_\beta^{(k)}\right)\right).$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა

$$\sup_k\left(\sum_{\beta=1}^{M_k-1}M\left(\omega\left(f,I_k+Z_\beta^{(k)}\right)\right)\right)\equiv O_M.$$

ვთქვათ $O_M<1,$ მაშინ იენსენის უტოლობის ძალით

$$M\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\le\frac{1}{n}\big(M(x_1)+\cdots+M(x_n)\big).$$

მაშასადამე,

$$M\left(\frac{1}{M_k}\sum_{\beta=0}^{M_k-1}\omega\left(f,I_k+Z_\beta^{(k)}\right)\right)\le\frac{1}{M_k}M\left(\sum_{\beta=0}^{M_k-1}\omega\left(f,I_k+Z_\beta^{(k)}\right)\right)\le\frac{1}{M_k}O_M\le\frac{1}{M_k}$$

$$\frac{\nu(M_k,f)}{M_k}\le M^{-1}\left(\frac{1}{M_k}\right),$$

$$\nu(M_k,f)\le M_kM^{-1}\left(\frac{1}{M_k}\right),$$

საბოლოოდ დავასკვნით, რომ

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\nu(M_k,f)}{M_k^{1-\alpha}}\le\sum_{k=1}^{\infty}M_k^{\alpha-1}M^{-1}\left(\frac{1}{M_k}\right)<\infty.$$

ვთქვათ $O_M>1,$ მაშინ

$M(tx+(1-t)y)\le tM(x)+(1-t)M(y)\quad M(0)=0.$

თუ $y=0,$ მაშინ $M(tx)\le tM(x)\quad(0<t<1).$ მაშასადამე,

$$M\left(\frac{\nu(M_k,f)}{M_k\cdot O_M}\right)\le\frac{1}{O_M}M\left(\frac{\nu(M_k,f)}{M_k}\right)\le\frac{1}{O_M}\frac{1}{M_k}O_M=\frac{1}{M_k}$$

$$\frac{\nu(M_k, f)}{M_k \cdot O_M} \le M^{-1}\left(\frac{1}{M_k}\right)$$

$$\frac{\nu(M_k, f)}{M_k} \le O_M M^{-1}\left(\frac{1}{M_k}\right)$$

თეორემა 1-ის ძალით

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu(M_k, f)}{M_k^{1-\alpha}} \le \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{\alpha}\, M^{-1}\left(\frac{1}{M_k}\right) < \infty.$$

შედეგი 2.

ვთქვათ $f \in C(G_m) \cap BO_p$, $0 < \alpha < \frac{1}{p}$, მაშინ

$$\lim_{k\to\infty} \|\sigma_n^{-\alpha}(f) - f\|_C = 0.$$

დამტკიცება.

ვთქვათ $M(u) = u^p$, მაშინ $\mathrm{M}^{-1}(u) = u^{1/p}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k^{\alpha} M^{-1}\left(\frac{1}{M_k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k^{\alpha}}{M_k^{1/p}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{M_k^{1/p-\alpha}} < \infty,$$

როცა $1/p - \alpha > 0$.

დასკვნა

- დადგენილია ჩეზაროს უარყოფითი საშუალოების გულების წერტილოვანი შეფასებები.
- მოყვანილია საკმარისი პირობა, რომელიც უზრუნველყოფს ფურიე-ვილენკინის მწკრივების ჩეზაროს უარყოფითი რიგის საშუალოების თანაბარ კრებადობას.
- ვილენკინის ჯგუფებისათვის შემოღებულია ჭანტურიას ცვლილების მოდულის ანალოგი და მის ტერმინებში დადგენილია საკმარისი პირობა, რომელიც უზრუნველყოფს ფურიე-ვილენკინის მწკრივების ჩეზაროს უარყოფითი რიგის საშუალოების თანაბრად შეჯამებადობას.
- ვილენკინის ჯგუფებისათვის ონევერმა და ვატერმანმა შემოიღეს განზოგადებული M-ოსცილაციის ფუნქციათა კლასები. აღნიშნული ფუნქციათა კლასებისათვის დადგენილია საკმარისი პირობა იმისათვის, რომ ფურიე-ვილენკინის მწკრივების ჩეზაროს უარყოფითი რიგის საშუალოები იყოს თანაბრად კრებადი.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. G. N. Agaev, N.Ya. Vilenkin, G.M. Dzhafarli and A.I. Rubinshtejn, Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on zero-dimensional groups, Baku, Ehlm,1981 (in Russian).
2. T. Akhobadze, A generalization of bounded variation. Acta Math. Hungar. 97 (2002),no. 3, 223-256.
3. Z. A. Chanturia,The modulus of variation of a function and its application in the theory of Fourier series, Soviet. Math. Dokl. 15 (1974), 67-71.
4. U. Goginava, On the uniform convergence of Walsh-Fourier series. Acta Math. Hungar. 93(1-2), (2001), 59-70.
5. C. Jordan, Sur la series de Fourier. C.R. Acad. Sci. Paris. 92(1881), 228-230.
6. H. Kita and K. Yoneda, A generalization of bounded variation. Acta Math. Hungar. 56 (1990), no. 3-4, 229{238.
7. J. Marcinkiewicz, On a class of functions and their Fourier series. Compt. Rend. Soc.Sci. Warsowie, 26 (1934), 71-77..
8. C. W. Onneweer and D. Waterman, Uniform convergence of Fourier series on groups,I, Michigan Math. J., 18 (1971) 265-273.
9. SCHIPP, F-WADE, W.R.-SIMON, P.-PÁL, J.: Walsh Series, an Introduction to Dyadic Harmonic Analysis, *Adam Hilger, Bristol-New York, 1990*
10. T. Tepnadze, On the approximation properties of Cesa`ro means of negative order of Vilenkin-Fourier series. Studia Sci. Math. Hungar. 53(4), pp. 532544.
11. N. Wiener N, The quadratic variation of a function and its Fourier coe_cients. Massachusetts J. Math., 3 (1924), 72-94.
12. D. Waterman, On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation. Studia Math., 44, 1 (1972), 107-117.
13. A. Zygmund, Trigonometric series. 2nd ed.Vol. I. Cambridge University Press, New York, 1959.