ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

მალხაზ სულაძე

მეორე რიგის აპროქსიმაციის დეკომპოზიციის სქემები ევოლუციური განტოლებისათვის

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

ნაშრომი შესრულებულია მათემატიკის მეცნიერებათა მაგისტრის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

ხელმძღვანელი: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, ასოცირებული პროფესორი ჯემალ როგავა

თბილისი

2017

სარჩევი

ანოტაცია

კარგად არის ცნობილი, რომ ევოლუციური განტოლებისათვის კოშის ამოცანის ამონახსნი მოიცემა ნახევარჯგუფის საშუალებით. პრობლემის არსი მდგომარეობს შემდეგში: ევოლუციური ამ

ოცანის ამოხსნის რიცხვითი ალგორითმები აგებული და გამოკვლევულ იქნეს გამოსავალი უწყვეტი ამოცანის ამომხსნელი ოპერატორის (ნახევარჯგუფის) აპროქსიმაციის საფუძველზე, ტროტერისა და ჩერნოვის ტიპის ფორმულების საშუალებით. ტროტერის ტიპის ფორმულებს ჩვენ ვუწოდებთ ისეთ ფორმულებს, რომლებიც გვაძლევენ ნახევარჯგუფის აპროქსიმაციას მისი წარმომქმნელი ოპერატორის შესაკრებების მიერ წარმოქმნილი ნახევარჯგუფების კომბინაციით. ჩერნოვის ტიპის ფორმულებს ვუწოდებთ ისეთ ფორმულებს, რომლებიც მიიღებიან ტროტერის ტიპის ფორმულებისაგან, თუ მათში ნახევარჯგუფებს შევცვლით შესაბამისი რეზოლვენტებით.

სამაგისტრო ნაშრომში განხილულია არაერთგვაროვანი აბსტრაქტული ევოლუციური განტოლებისათვის კოშის ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის გ. ბეიკერისა და თ. ოლიფანტის სიმეტრიული, დიფერენციალური და სხვაობიანი დეკომპოზიციის სქემები. განხილულია აგრეთვე დ. გორდეზიანის გასაშუალოებული დიფერენციალური და სხვაობიანი დეკომპოზიციის სქემები. სხვაობიანი დეკომპოზიციის სქემები ორივე შემთხვევაში აგებულია კრანკ-ნიკოლსონის სქემის საფუძველზე.

ნახევარჯგუფის აპროქსიმაციის საფუძველზე მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილებისათვის მიღებულია ცხადი აპრიორული შეფასებები. ცხადი შეფასებების ქვეშ ჩვენ ვგულისხმობთ ამონახსნის ცდომილებისათვის ისეთ აპრიორულ შეფასებებს, სადაც მარჯვენა მხარეში შემავალი მუდმივები არ არიან დამოკიდებული საწყისი უწყვეტი ამოცანის ამონახსნზე, ე. ი. არიან აბსოლუტური კონსტანტები. დამტკიცებულია, რომ კრებადობის რიგი დროითი ბიჯის მიხედვით არის ორის ტოლი, ე. ი. ემთხვევა აპროქსიმაციის რიგს.

Annotation

It is well known that the solution of Cauchy problem for evolution equation can be represented by semigroup. The essence of the problem lies in the following: numerical solution algorithms to be constructed and investigated on the basis of the output continuous problem's solution operator(semigroup) approximation, with Trotter and Chernoff type formulas.

Trotter type formulas, we call such formulas that give us semigroup approximation by the semigroup combination of the terms of its generator operator. Chernoff type formulas, we call such formulas that are obtained from Trotter type formulas, if we interchange semigroups with their corresponding resolvents in them.

In the thesis, symmetrical differential and finite difference schemes of Baker and T. Oliphant are considered for the approximate solution of the Cauchy problem of nonhomogeneous abstract evolution equation. Averaged differential and finite difference decomposition schemes of D.Gordezian are also considered. In both cases, finite difference schemes are constructed on the basis of Crank-Nikolson method.

On the basis of semigroup approximation, for the approximate solution error, explicit a priori estimates are obtained. Under the explicit estimation we mean such a priori estimation for the solution error, where constants in the right-hand side do not depend on the solution of the initial continuous problem, i.e. are absolute constants.

It is proved, that the rate of convergence according to the time step is two, i.e. coincides with approximation rate.

შესავალი

მიუხედავად იმისა, რომ თანამედროვე გამოთვლითი ტექნოლოგიების შესაძლებლობები წარმოუდგენლად გაიზარდა, მათემატიკური ფიზიკის მრავალგანზომილებიანი ამოცანების რიცხვითი რეალიზაციის საკითხი კვლავ პრობლემატური რჩება. ძირითადი წინააღმდეგობა მდგომარეობს იმაში, რომ აღნიშნული ამოცანებისათვის კლასიკური მეთოდების გამოყენება მოითხოვს დიდი მოცულობის კომპიუტერულ რესურსებს და არითმეტიკულ ოპერაციათა დიდ რიცხვს, რაც სათუოს ხდის ასეთი ამოცანების რიცხვით ამოხსნას რეალურ დროში. აქედან გამომდინარე, მათემატიკური ფიზიკის მრავალგანზომილებიანი ამოცანებისათვის ეკონომიური სქემების აგების, გამოკვლევისა და მათთვის კომპიუტერული პროგრამების შექმნის საკითხი უაღრესად აქტუალურია.

ცნობილია, რომ დეკომპოზიციის მეთოდი წარმოადგენს მათემატიკური ფიზიკის მრავალგანზომილებიანი ამოცანებისათვის ეკონომიური სქემების აგების ზოგად მეთოდს, რომელიც საშუალებას იძლევა მრავალგანზომილებიანი ამოცანების რედუცირება მოვახდინოთ ერთგანზომილებიანი ამოცანების სერიაზე, რომელთა რიცხვითი რეალიზაცია ცხადია გაცილებით უფრო ნაკლებ მანქანურ რესურსებს საჭიროებს. ამ მიმართულებით მუშაობა დაიწყო მეოცე საუკუნის სამოციანი წლებიდან და დღესაც ინტენსიურად მიმდინარეობს, რაზეც მეტყველებს ის შრომები, რომლებიც ქვეყნდება მსოფლიოს ცნობილ სამეცნიერო გამოცემებში. წარმოდგენილ სადოქტორო ნაშრომში განხილული ოპერატორული გახლეჩის სქემები მიეკუთვნება დეკომპოზიციის სქემებს.

დეკომპოზიციის(წილადბიჯიანი, ჯამური აპროქსიმაციის) მეთოდი შეიძლება გავყოთ ორ ჯგუფად: მიმდევრობითი თვლის სქემები (იხ.[5],[6],[11],[12],[13],[14],[30],[31]) და პარალელური თვლის სქემები (იხ.[2],[3],[4]). დეკომპოზიციის სქემებთან მჭიდროდ არის დაკავშირებული ტროტერისა და ჩერნოვის ფორმულები (იხ.[17],[18],[31]). ტროტერის ფორმულასთან ასოცირებული დეკომპოზიციის სქემა საშუალებას გვაძლევს კოშის ამოცანა ევოლუციური განტოლებისათვის $A_1 + A_2$ ოპერატორით გავხლიჩოთ ორ ამოცანად, შესაბამისად A_1 და A_2 ოპერატორებით, რომელთაც ვხსნით მიმდევრობით t/n სიგრძის დროით ინტერვალებში.

ჩერნოვის ფორმულასთან ასოცირებული დეკომპოზიციის სქემა ცნობილია, როგორც წილადბიჯიანი მეთოდი (იხ.[12]).

არაწრფივი ევოლუციური ამოცანებისათვის დეკომპოზიციის მეთოდის გამოყენებას მივყავართ ტროტერისა და ჩერნოვის ფორმულების განზოგადოების აუცილებლობამდე. ამ მიმართულებით მიღებულია მნიშვნელოვანი შედეგები შემდეგ შრომებში : [15],[16],[19],[22 – 25],[27],[28]. ზემოთ აღნიშნულ საკითხებთან შეხება აქვს, აგრეთვე, შრომებს: [20],[21],[26],[29].

მოცემულ ნაშრომში განხილულია მეორე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემები. მათი ცდომილებისათვის მიღებულია ცხადი აპრიორული შეფასებები ნახევარჯგუფების გამოყენებით. პარალელური ტიპის დეკომპოზიციის სქემების ცდომილებისათვის ცხადი შეფასებები მიღებულია შრომებში [7],[8],[10].

დეკომპოზიციის სქემების ცდომილებისათვის ცხადი აპრიორული შეფასებების მიღება უშუალოდ დაკავშირებულია ტროტერისა და ჩერნოვის ტიპის ფორმულების ცდომილების შეფასებასთან. ასეთი ფორმულებისათვის [9] მიღებულია შეფასებები თანაბარ ტოპოლოგიაში თვითშეუღლებული ოპერატორის შემთხვევაში. წარმოდგენილი სამაგისტრო ნაშრომი არსებითად ეყრდნობა შრომებს [32 - 33].

თავი I. დეკომპოზიციის დიფერენციალური სქემები

1.1 მიმდევრობითი ტიპის სიმეტრიული სქემა

განვიხილოთ X ბანახის სივრცეში კოშის ამოცანა

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \qquad u(0) = \varphi, \quad t > 0, \tag{1.1}$$

სადაც A არის წრფივი, მკვრივად განსაზღვრული, ჩაკეტილი ოპერატორი X ბანახის სივრცეში, რომელიც წარმოდგება შემდეგი სახით: $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2$. A_1 და A_2 ასევე წრფივი, მკვრივად განსაზღვრული, ჩაკეტილი ოპერატორებია X-ში.

(1.1) ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნისათვის გამოვიყენოთ დეკომპოზიციის შემდეგი დიფერენციალური სქემა (იხ. [13], [14]):

$$\frac{dv_k^{(1)}(t)}{dt} + \frac{1}{2}\mathrm{A}_1 v_k^{(1)}(t) = \sigma_0 f(t), v_k^{(1)}(t_{k-1}) = u_{k-1}(t_{k-1}), \quad u_0(0) = \varphi,$$

$$\frac{dv_k^{(2)}(t)}{dt} + \mathrm{A}_2 v_k^{(2)}(t) = (1 - (\sigma_0 + \sigma_1)) f(t), \quad v_k^{(2)}(t_{k-1}) = v_k^{(1)}(t_k), \tag{1.2}$$

$$\frac{du_k(t)}{dt} + \frac{1}{2}\mathrm{A}_1 u_k(t) = \sigma_1 f(t), \quad u_k(t_{k-1}) = v_k^{(2)}(t_k), \quad t \in [t_{k-1}, t_k].$$

(1.1) ამოცანის მიახლოებით ამოხსნად $t = t_k = \kappa\tau$ წერტილში ვაცხადებთ $u_k(t_k)$ -ს.

თეორემა 1.1. ვთქვათ, სრულდება შემდეგი პირობები

ა) არსებობს $\omega_0 > 0$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $\lambda > \omega_0$–თვის, ოპერატორი $\mathrm{A} + \lambda \mathrm{I}$ შებრუნებადია და მართებულია შეფასება

$$\left\| \left(\mathrm{A} + \lambda \mathrm{I} \right)^{-k} \right\| \leq \frac{\mathrm{M}}{\left(\lambda - \omega_0\right)^k}, \quad \mathrm{M} = const > 0, \quad k = 1, 2, \dots ;$$

ბ) არსებობს $\omega_1 > 0$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $\xi > \omega_1$–თვის, ოპერატორები $\mathrm{A}_i + \xi \mathrm{I}, \ i = 1,2,$ შებრუნებადია და მართებულია შეფასებები

$$\left\|\left(\mathrm{A}_i+\xi \mathrm{I}\right)^{-1}\right\| \le \frac{1}{\xi-\omega_1};$$

გ) $D\left(\mathrm{A}^m\right) \subset D\left(\mathrm{A}_i^m\right)$, $m=1,2,3$ $(i=1,2)$; A_i ოპერატორები $D\left(\mathrm{A}^{m-s}\right)$-ს $m=2,3$ ასახავენ $D\left(\mathrm{A}^{m-1}\right)$-ში $\left(\mathrm{A}_i : D\left(\mathrm{A}^m\right) \to D\left(\mathrm{A}^{m-1}\right)\right)$ და მართებულია უტოლობები

$$\left\|\mathrm{A}_i^2 u\right\| + \left\|\mathrm{A}_i \mathrm{A}_{3-i} u\right\| \le c\left\|\mathrm{A}_0^2 u\right\|, \quad u \in D\left(\mathrm{A}^2\right),$$

$$\left\|\mathrm{A}_i^3 u\right\| + \left\|\mathrm{A}_i^2 \mathrm{A}_{3-i} u\right\| + \left\|\mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2 \mathrm{A}_1 u\right\| \le c\left\|\mathrm{A}_0^3 u\right\|, \quad u \in D\left(\mathrm{A}^3\right),$$

სადაც $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A} - \lambda_0 \mathrm{I}$, λ_0 არის A ოპერატორის რეგულარული წერტილი $c = const > 0$;

დ) $f(t)$ ფუნქცია უწყვეტად დიფერენცირებადია და $f'(t)$ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას ყოველი ფიქსირებული t-სთვის $[0;+\infty)$-დან $f(t) \in D\left(\mathrm{A}^3\right)$, $f'(t) \in D(\mathrm{A})$ და $\varphi \in D\left(\mathrm{A}^3\right)$;

მაშინ, თუ $\sigma_0 = \sigma_1$, (1.2) სქემის ცდომილებისათვის სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$\left\|u(t_k) - u_k(t_k)\right\| \le c\tau^2 [e^{\omega t_k}\left(t_k\left\|\mathrm{A}_0^3\varphi\right\| + \int_0^{t_k}\left\|\mathrm{A}_0 f'(t)\right\|dt + \tau\sum_{i=1}^{k}\left(\left\|\mathrm{A}_0^2 f(t_{i-\frac{1}{2}})\right\| + \left\|\mathrm{A}_0 f(t_{i-\frac{1}{2}})\right\|\right) + t_k\right) +$$

$$+\int_0^{t_k}(t_k - s)e^{\omega(t_k - s)}\left\|\mathrm{A}_0^3 f(s)\right\|ds], \tag{1.3}$$

სადაც $\omega = \max(\omega_0\ ,2\omega_1)$, $c = const > 0$.

თეორემის დასამტკიცებლად ჩვენ დაგვჭირდება ორი ლემა: პირველი ეხება ნახევარჯგუფის აპროქსიმაციას ტროტერის ტიპის ფორმულის საშუალებით, ხოლო მეორე ნახევარჯგუფის შემცველი ინტეგრალის აპროქსიამაციას კვადრატული ფორმულის, კერძოდ ცენტრალური მართკუთხედის ფორმულის საშუალებით.

ლემა 1.2 თუ A_1, A_2 და A ოპერატორები აკმაყოფილებენ თეორემა 1.1-ის პირობებს, მაშინ ნებისმიერი ნატურალური n -სთვის მართებულია შეფასება

$$\left\| \left[U(t) - (V(\frac{t}{n}))^n \right] \varphi \right\| \leq \frac{ct^3}{n^2} e^{\omega t} \left\| \mathrm{A}^3 \varphi \right\|, \quad \varphi \in D\left(\mathrm{A}^3\right), \tag{1.4}$$

სადაც $V(t) = U_1(\frac{t}{2})U_2(t)U_1(\frac{t}{2})$, $U(t) = \exp(-tA)$ და $U_i(t) = \exp(-tA_i)$. შესაბამისად A და A_i $(i = 1,2)$ ოპერატორების მიერ წარმოქმნილი, ძლიერად უწყვეტი ნახევარჯგუფებია.

დამტკიცება. ნახევარჯგუფის თვისებების თანახმად გვაქვს

$$\left[U(t_n) - (V(\frac{t_n}{n}))^n \right] \varphi = \left[(U(\tau))^n - (V(\tau))^n \right] \varphi, \tag{1.5}$$

სადაც $\tau = \frac{t}{n}$. მართებულია იგივეობა

$$(U(\tau))^n - (V(\tau))^n = \sum_{i=1}^{n} \left(V(\tau)\right)^{n-i} \left[U(\tau) - V(\tau)\right] U(t_{i-1}) \tag{1.6}$$

შევაფასოთ სხვაობა $U(\tau) - V(\tau)$.

ადვილად მტკიცდება, რომ $U(t)$ ნახევარჯგუფისათვის მართებულია შემდეგი გაშლა

$$U(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^k}{k!} \mathrm{A}^k + R^{(n+1)}(t), \tag{1.7}$$

სადაც

$$R^{(n+1)}(t) = (-\mathrm{A})^{(n+1)} \int_0^t \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} \dots \int_0^{s_n} U(s) ds ds_n ds_{n-1} \dots ds_1 .$$

(1.7) ფორმულის გამოყენებით მიიღება

$$V(\tau)=U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)U_2(\tau)U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)=U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)U_2(\tau)\left(\mathrm{I}-\frac{\tau}{2}\mathrm{A}_1+\frac{\tau^2}{8}\mathrm{A}_1^2+R_1^{(3)}(\frac{\tau}{2})\right)=$$

$$=U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)\left(U_2(\tau)-\frac{\tau}{2}U_2(\tau)\mathrm{A}_1+\frac{\tau^2}{8}U_2(\tau)\mathrm{A}_1^2+U_2(\tau)R_1^{(3)}(\frac{\tau}{2})\right)=$$

$$=U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)\left[\mathrm{I}-\tau\mathrm{A}_2+\frac{\tau^2}{2}\mathrm{A}_2^2+R_2^{(3)}(\tau)-\frac{\tau}{2}(\mathrm{I}-\tau\mathrm{A}_2+R_2^{(2)}(\tau))\mathrm{A}_1+\frac{\tau^2}{8}(\mathrm{I}+R_2^1(\tau))\mathrm{A}_1^2+U_2(\tau)R_1^{(3)}(\frac{\tau}{2})\right]=$$

$$=U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)\left[\mathrm{I}-\frac{\tau}{2}(2\mathrm{A}_2+\mathrm{A}_1)+\frac{\tau^2}{8}(4\mathrm{A}_2^2+4\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_1^2)+\right.$$

$$\left.+R_2^{(3)}(\tau)-\frac{\tau}{2}R_2^{(2)}(\tau)\mathrm{A}_1+\frac{\tau^2}{8}R_2^1(\tau)\mathrm{A}_1^2+U_2(\tau)R_1^{(3)}(\frac{\tau}{2})\right]=$$

$$=U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)-\frac{\tau}{2}U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)(2\mathrm{A}_2+\mathrm{A}_1)+\frac{\tau^2}{8}U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)(4\mathrm{A}_2^2+4\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_1^2)+$$

$$+U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)(R_2^3(\tau)-\frac{\tau}{2}R_2^2(\tau)\mathrm{A}_1+\frac{\tau^2}{8}R_2^1(\tau)\mathrm{A}_1^2+U_2(\tau)R_1^{(3)}(\frac{\tau}{2}))=$$

$$=\mathrm{I}-\frac{\tau}{2}\mathrm{A}_1+\frac{\tau^2}{8}\mathrm{A}_1^2+R_1^{(3)}(\frac{\tau}{2})-\frac{\tau}{2}\left(\mathrm{I}-\frac{\tau}{2}\mathrm{A}_1+R_1^{(2)}(\frac{\tau}{2})\right)(2\mathrm{A}_2+\mathrm{A}_1)+$$

$$+\frac{\tau^2}{8}\left(\mathrm{I}+R_1^{(1)}(\frac{\tau}{2})\right)(4\mathrm{A}_2^2+4\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_1^2)+U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)(R_2^3(\tau)-\frac{\tau}{2}R_2^2(\tau)\mathrm{A}_1+$$

$$+\frac{\tau^2}{8}R_2^1(\tau)\mathrm{A}_1^2+U_2(\tau)R_1^{(3)}(\frac{\tau}{2}))=\mathrm{I}-\tau(\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2)+\frac{\tau^2}{2}\left(\mathrm{A}_1^2+\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2+\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2^2\right)+R_3(\tau)$$

სადაც

$$R_3(\tau)=\sum_{j=1}^{7}R_{3,j}(\tau)\ , \tag{1.8}$$

$$R_{3,1}(\tau)=R^{(3)}{}_1(\frac{\tau}{2}),\quad R_{3,2}(\tau)=-\frac{\tau}{2}R_1^{(2)}\left(\frac{\tau}{2}\right)(2\mathrm{A}_2+\mathrm{A}_1),\quad R_{3,3}(\tau)=U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)R_2^{(3)}(\tau),$$

$$R_{3,4}(\tau) = -\frac{\tau}{2} R_2^{(2)}(\tau)\mathrm{A}_1, \quad R_{3,5}(\tau) = \frac{\tau^2}{8} R_1^{(1)}\left(\frac{\tau}{4}\right)\left(4\mathrm{A}_2^2 + 4\mathrm{A}_2\mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_1^2\right) ,$$

$$R_{3,6}(\tau) = -\frac{\tau}{8} R_2^{(1)}(\tau)\mathrm{A}_1^2, \qquad R_{3,7}(\tau) = U_2(\tau) R_1^{(3)}\left(\frac{\tau}{2}\right).$$

ვინაიდან $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2$ და

$$\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}_1^2 + \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_2\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2^2 ,$$

ამიტომ $V(\tau)$ მიიღებს შემდეგ სახეს

$$V(\tau) = \mathrm{I} - \tau\mathrm{A} + \frac{\tau^2}{2}\mathrm{A}^2 + R_3(\tau). \tag{1.9}$$

(1.7) და (1.9) ფორმულების თანახმად გვაქვს

$$U(\tau) - V(\tau) = R^3(\tau) - R_3(\tau). \tag{1.10}$$

თუ (1.6)-ში გადავალთ ნორმებზე და გავითვალისწინებთ (1.10)-ს მივიღებთ

$$\left\| \left[(U(\tau))^n - (V(\tau))^n \right] \varphi \right\| = \sum_{i=1}^{k} \left\| (V(\tau))^{k-i} \right\| \left\| \left[R^3(\tau) - R_3(\tau) \right] U(t_{i-1}) \varphi \right\|. \tag{1.11}$$

ცხადია, უტოლობა

$$\left\| \left[R^3(\tau) - R_3(\tau) \right] U(t_{i-1}) \varphi \right\| \le \sum_{j=1}^{7} \left\| R_{3,j}(\tau) U(t_{i-1}) \varphi \right\| + \left\| R^{(3)}(\tau) U(t_{i-1}) \varphi \right\| . \tag{1.12}$$

თეორემა 1.1-ის ა) და ბ) პირობების თანახმად გვაქვს

$$\left\| U(t) \right\| \le M e^{\omega_0 t} , \tag{1.13}$$

$$\left\| U_i(t) \right\| \le e^{\omega_1 t} . \tag{1.14}$$

(1.13) - (1.14) შეფასებებისა და თეორემა 1.1-ის გ) პირობის თანახმად მიიღება

$$\left\|R_{3,1}(\tau)U(t_{i-1})\varphi\right\| = \left\|\mathrm{A}_1^3\int_0^{\frac{\tau}{2}}\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}U_1(s)U(t_{i-1})\varphi ds ds_2 ds_1\right\| \le$$

$$\le \int_0^{\frac{\tau}{2}}\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}\left\|U_1(s)\right\|\left\|U(t_{i-1})\right\|\left\|\mathrm{A}_1^3\varphi\right\| ds ds_2 ds_1 \le c\tau^3 e^{\omega t_i}\left\|\mathrm{A}_0^3\varphi\right\|,\ \varphi\in D\left(\mathrm{A}^3\right). \quad (1.15)$$

ანალოგიურად მიიღება შემდეგი შეფასებები

$$\left\|R_{3,j}(\tau)U(t_{i-1})\varphi\right\| \le c\tau^3 e^{\omega t_{i-1}}\left\|\mathrm{A}_0^3\varphi\right\|, \qquad \varphi\in D\left(\mathrm{A}^3\right),\ j=2,\cdots,7, \quad (1.16)$$

$$\left\|R^{(3)}(\tau)U(t_{i-1})\varphi\right\| \le c\tau^3 e^{\omega_0 t_i}\left\|\mathrm{A}^3\varphi\right\|, \qquad \varphi\in D\left(\mathrm{A}^3\right).$$

რადგან მართებულია წარმოდეგნა

$$\mathrm{A}^3\left(\mathrm{A}-\lambda_0\mathrm{I}\right)^{-3} = (\mathrm{A}(\mathrm{A}-\lambda_0\mathrm{I})^{-1})^3 = (\mathrm{I}+\lambda_0(\mathrm{A}-\lambda_0\mathrm{I})^{-1})^3,$$

ამიტომ გვაქვს

$$\left\|R^{(3)}(\tau)U(t_{i-1})\varphi\right\| \le c\tau^3 e^{\omega_0 t_i}\left\|\mathrm{A}_0^3\varphi\right\|, \quad \varphi\in D\left(\mathrm{A}^3\right). \quad (1.17)$$

(1.12)-დან (1.15),(1.16) და (1.17) შეფასეებების გათვალისწინებით მიიღება

$$\left\|\left[R^3(\tau)-R_3(\tau)\right]U(t_{i-1})\varphi\right\| \le c\tau^3 e^{\omega_0} t_i\left\|\mathrm{A}_0^3\varphi\right\|, \quad \varphi\in D\left(\mathrm{A}^3\right). \quad (1.18)$$

(1.11)-დან (1.14) და (1.18) შეფასებების თანახმად მიიღება შემდეგი შეფასება

$$\left\|\left[(U(\tau))^n-(V(\tau))^n\right]\varphi\right\| \le c\tau^3\left\|\mathrm{A}_0^3\varphi\right\|\sum_{i=1}^n\left(\left\|U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)\right\|\left\|U_2(\tau)\right\|\left\|U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)\right\|\right)^{n-i} e^{\omega t_i} \le$$

$$\le c\left\|\mathrm{A}_0^3\varphi\right\|\sum_{i=1}^n e^{2\omega_1 t_{n-i}}e^{\omega t_i} \le c\tau^2 t_n e^{\omega t_n}\left\|\mathrm{A}_0^3\varphi\right\|. \quad (1.19)$$

ლემა 1.2 დამტკიცებულია ■

შემდეგი ლემა, რომელიც ჩვენ დაგვჭირდება ძირითადი თეორემის დასამტკიცებლად, ეხება ნახევარჯგუფის შემცველი ინტეგრალის კვადრატული ფორმულით აპროქსიმაციის ცდომილების შეფასებას.

ლემა 1.3 ვთქვათ, A ოპერატორი და $f(t)$ ფუნქცია აკმაყოფიკებენ თეორემა 1.1-ის პრიორობებს, მაშინ მართებულია შეფასება

$$\left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} U(t_i - s) f(s) - \tau U\left(\frac{\tau}{2}\right) f(t_{i-\frac{1}{2}}) \right\| \le$$

$$\le c\tau^2 e^{\omega_0 \tau} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\| \mathrm{A} f'(t) \right\| dt + \tau \left(\left\| \mathrm{A}^2 f(t_{i-1}) \right\| + 1 \right) \right), c = const > 0 \qquad (1.20)$$

სადაც $U(t) = \exp(-tA)$ არის A ოპერატორის მიერ წარმოქმნილი ძლიერად უწყვეტი ნახევარჯგუფი, $\tau = t_i - t_{i-1} \quad (t_i \ge t_{i-1} \ge 0)$.

დამტკიცება. ცხადია უტოლობა

$$\left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} U(t_i - s) f(s) - \tau U\left(\frac{\tau}{2}\right) f(t_{i-\frac{1}{2}}) \right\| \le \left\| \mathrm{I}_0 \right\| + \left\| \mathrm{I}_1 \right\|, \qquad (1.21)$$

სადაც

$$\mathrm{I}_0 = \int_{t_{i-1}}^{t_i} U\left(t_i - t_{i-\frac{1}{2}} \right) f(s) ds - \int_{t_{i-1}}^{t_i} U(t_i - s) f(s) ds ,$$

$$I_1 = U\left(\frac{\tau}{2}\right) \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(s) ds - \tau f(t_{i-\frac{1}{2}}) \right).$$

შევაფასოთ I_0. ცხადია, გვაქვს

$$I_0 = I_{0,1} + I_{0,2} , \qquad (1.22)$$

სადაც

$$I_{0,1}=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left[U\left(t_i-t_{i-\frac{1}{2}}\right)-U(t_i-s)\right]\left[f(s)-f(t_{i-\frac{1}{2}})\right]ds,$$

$$I_{0,2}=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left[U\left(t_i-t_{i-\frac{1}{2}}\right)-U(t_i-s)\right]f(t_{i-\frac{1}{2}})ds.$$

$I_{0,1}$ წევრისათვის მართებულია წარმოდგენა

$$I_{0,1}=\int_{t_{i-1}}^{t_{i-\frac{1}{2}}}\left[U\left(t_i-t_{i-\frac{1}{2}}\right)-U(t_i-s)\right]\left[f(s)-f(t_{i-\frac{1}{2}})\right]ds+$$

$$+\int_{t_{i-\frac{1}{2}}}^{t_i}\left[U\left(t_i-t_{i-\frac{1}{2}}\right)-U(t_i-s)\right]\left[f(s)-f(t_{i-\frac{1}{2}})\right]ds=$$

$$=-A\int_{t_{i-1}}^{t_{i-\frac{1}{2}}}\left(\int_{\frac{\tau}{2}}^{t_i-s}U(t)dt\int_s^{t_{i-\frac{1}{2}}}f'(t)dt\right)ds-A\int_{t_{i-\frac{1}{2}}}^{t_i}\left(\int_{t_i-s}^{\frac{\tau}{2}}U(t)dt\int_{t_{i-\frac{1}{2}}}^{s}f'(t)dt\right)ds \qquad (1.23)$$

აქ ჩვენ გამოვიყენეთ შემდეგი ფორმულა (იხ. [34])

$$A\int_r^t U(s)ds=U(r)-U(t),\quad 0\le r\le t.$$

თუ (1.23)-ში გადავალთ ნორმებზე და გავითვალისწინებთ (1.13)-ს, მივიღებთ

$$\left\|I_{0,1}\right\|=\int_{t_{i-1}}^{t_{i-\frac{1}{2}}}\left(\int_{\frac{\tau}{2}}^{t_i-s}\left\|U(t)\right\|dt\int_s^{t_{i-\frac{1}{2}}}\left\|Af'(t)\right\|dt\right)ds+\int_{t_{i-\frac{1}{2}}}^{t_i}\left(\int_{t_i-s}^{\frac{\tau}{2}}\left\|U(t)\right\|dt\int_{t_{i-\frac{1}{2}}}^{s}\left\|Af'(t)\right\|dt\right)ds\le$$

$$\le M\int_{t_{i-1}}^{t_{i-\frac{1}{2}}}\left(\int_{\frac{\tau}{2}}^{t_i-s}e^{\omega_0 t}dt\int_s^{t_{i-\frac{1}{2}}}\left\|Af'(t)\right\|dt\right)ds+M\int_{t_{i-\frac{1}{2}}}^{t_i}\left(\int_{t_i-s}^{\frac{\tau}{2}}e^{\omega_0 t}dt\int_{t_{i-\frac{1}{2}}}^{s}\left\|Af'(t)\right\|dt\right)ds\le$$

$$\leq M\int_{t_{i-1}}^{t_{i-\frac{1}{2}}}\|Af'(t)\|dt\int_{t_{i-1}}^{t_{i-\frac{1}{2}}}(t_{i-\frac{1}{2}}-s)e^{\omega_0 t_i-s}ds+M\int_{t_{i-\frac{1}{2}}}^{t_i}\left(\int_{t-s}^{\frac{\tau}{2}}\|Af'(t)\|dt\int_{t_{i-\frac{1}{2}}}^{t_i}(s-t_{i-\frac{1}{2}})e^{\omega_0\frac{\tau}{2}}\right)ds\leq$$

$$\frac{1}{4}Me^{\omega_0\frac{\tau}{2}}\tau^2\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|Af'(t)\|dt\,.$$

ამრიგად, მივიღეთ შეფასება

$$\|I_{0,1}\|\leq\frac{1}{4}Me^{\omega_0\frac{\tau}{2}}\tau^2\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|Af'(t)\|dt \tag{1.24}$$

$I_{0,2}$-თვის ადგილი აქვს წარმოდგენას

$$I_{0,2}=\int_{t_{i-1}}^{t_{i-\frac{1}{2}}}\left[U\left(t_i-t_{i-\frac{1}{2}}\right)-U(t_i-s)\right]f(t_{i-\frac{1}{2}})ds+\int_{t_{i\backslash\frac{1}{2}}}^{t_i}\left[U\left(t_i-t_{i-\frac{1}{2}}\right)-U(t_i-s)\right]f(t_{i-\frac{1}{2}})ds=$$

$$=A\int_{t_{i-1}}^{t_{i-\frac{1}{2}}}\int_{s}^{t_{i-\frac{1}{2}}}\left[U\left(t_i-t_{i-\frac{1}{2}}\right)-U(t_i-t)\right]f(t_{i-\frac{1}{2}})dtds+$$

$$+A\int_{t_{i-\frac{1}{2}}}^{t_i}\int_{t_{i-\frac{1}{2}}}^{s}\left[U(t_i-t)-U\left(t_i-t_{i-\frac{1}{2}}\right)\right]f(t_{i-\frac{1}{2}})dtds=$$

$$=\int_{t_{i-1}}^{t_{-\frac{1}{2}}}\int_{s}^{t_{i-\frac{1}{2}}}\int_{\frac{\tau}{2}}^{t_i-t}U(\xi)\mathrm{A}^2f(t_{i-\frac{1}{2}})d\xi dtds+\int_{t_{i-\frac{1}{2}}}^{t_i}\int_{t_{i-\frac{1}{2}}}^{s}\int_{t_i-t}^{\frac{\tau}{2}}U(\xi)\mathrm{A}^2f(t_{i-\frac{1}{2}})d\xi dtds.$$

თუ ამ ტოლობაში გადავალთ ნორმებზე და გავითვალისწინებთ (1.13)-ს მივიღებთ

$$\|I_{0,2}\|\leq M\|A^2f(t_{i-1})\|\left(\int_{t_{i-1}}^{t_{i-\frac{1}{2}}}\int_{s}^{t_{i-\frac{1}{2}}}\int_{\frac{\tau}{2}}^{t_i-t}e^{\omega_0\xi}d\xi dtds+\int_{t_{i-\frac{1}{2}}}^{t_i}\int_{t_{i-\frac{1}{2}}}^{s}\int_{t_i-t}^{\frac{\tau}{2}}e^{\omega_0\xi}d\xi dtds\right)\leq\frac{1}{48}Me^{\omega_0\tau}\tau^3\left\|\mathrm{A}^2f(t_{i-\frac{1}{2}})\right\|$$

(1.25)

(1.22)-დან (1.24) და (1.25) უტოლობების გათვალისწინებით გამომდინარეობს შემდეგი შეფასება

$$\mathrm{I}_0=\int_{t_{i-1}}^{t_i}U\left(t_i-t_{i-\frac{1}{2}}\right)f(s)ds-\int_{t_{i-1}}^{t_i}U(t_i-s)f(s)ds\le$$

$$\le ce^{\omega_0\tau}\tau^2\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|Af'(t)\|dt+\tau\left\|\mathrm{A}^2f(t_{i-\frac{1}{2}})\right\|\right). \qquad (1.26)$$

შევაფასოთ I_1 ცხადია, გვაქვს

$$I_1=U\left(\frac{\tau}{2}\right)\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}f(s)ds-\tau f(t_{i-\frac{1}{2}})\right)=$$

$$=U\left(\frac{\tau}{2}\right)\left(\int_{t_{i-1}}^{t_{i-\frac{1}{2}}}\int_{s}^{t_{i-\frac{1}{2}}}(f'(t_{i-\frac{1}{2}})-f'(t))dtds-\int_{t_{i-\frac{1}{2}}}^{t_i}\int_{t_{i-\frac{1}{2}}}^{s}(f'(t)-f'(t_{i-\frac{1}{2}}))dtds\right).$$

თუ ამ ტოლობაში გადავალთ ნორმებზე და გავითვალისწინებთ, რომ $f'(t)$ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას, მივიღებთ

$$\left\|U\left(\frac{\tau}{2}\right)\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}f(s)ds-\tau f(t_{i-\frac{1}{2}})\right)\right\|\le$$

$$\le ce^{\omega_0\frac{\tau}{2}}\left(\int_{t_{i-1}}^{t_{i-\frac{1}{2}}}\int_{s}^{t_{i-\frac{1}{2}}}(t_{i-\frac{1}{2}}-t)dtds-\int_{t_{i-\frac{1}{2}}}^{t_i}\int_{t_{i-\frac{1}{2}}}^{s}(t-t_{i-\frac{1}{2}})dtds\right)\le\frac{1}{24}c\tau^3e^{\omega_0\frac{\tau}{2}}. \qquad (1.27)$$

(1.21)-დან (1.26) და (1.27) შეფასებების გათვალისწინებით გამომდინარეობს (1.20) შეფასება.

ლემა 1.3 დამტკიცებულია ■

ახლა დავამტკიცოთ ძირითადი თეორემა.

თეორემა 1.1-ის დამტკიცება. როგორც ცნობილია, $U(t)=\exp(-tA)$ ნახევარჯგუფის საშუალებით (1.1) ამოცანის ამონახსნი წარმოიდგინება შემდეგი ფორმულით (იხ. [34])

$$u(t) = U(t)\varphi + \int_0^t U(t-s)\,f(s)ds\,. \qquad (1.28)$$

ამ ფორმულის თანახმად (1.2) სქემის პირველი განტოლებისათვის მივიღებთ

$$v_k^{(1)}(t) = U_1(\frac{1}{2}(t-t_{k-1}))u_{k-1}(t_{k-1}) + \sigma_0 \int_{t_{k-1}}^{t_k} U_1(\frac{1}{2}(t_k - s))\,f(s)ds\,.$$

$t = t_k$ წერტილში, გვაქვს

$$v_k^{(1)}(t) = U_1(\frac{\tau}{2})u_{k-1}(t_{k-1}) + \sigma_0 \int_{t_{k-1}}^{t_k} U_1(\frac{1}{2}(t_k - s))\,f(s)ds\,. \qquad (1.29)$$

(1.2) სისტემის მეორე და მესამე განტოლებებიდან (1.28)-ის თანახმად მიიღება

$$v_k^{(2)}(t) = U_2(\tau)v_k^{(1)} + (1-\sigma_0-\sigma_1)\int_{t_{k-1}}^{t_k} U_2((t_k - s))\,f(s)ds\,, \qquad (1.30)$$

$$u_k(t_k) = U_1(\frac{\tau}{2})v_k^2(t_k) + \sigma_1 \int_{t_{k-1}}^{t_k} U_1(\frac{1}{2}(t_k - s))\,f(s)ds\,. \qquad (1.31)$$

(1.31)-დან (1.29) და (1.30)-ის გათვალისწინებით მიიღება

$$\begin{aligned} u_k(t_k) &= U_1(\frac{\tau}{2})U_2(\tau)U_1(\frac{\tau}{2})u_{k-1}(t_{k-1}) + \sigma_0 \int_{t_{k-1}}^{t_k} U_1(\frac{\tau}{2})U_2(\tau)U_1(\frac{1}{2}(t_k - s))\,f(s)ds + \\ &+ (1-\sigma_0-\sigma_1)\int_{t_{k-1}}^{t_k} U_1(\frac{\tau}{2})U_2(t_k - s)\,f(s)ds + \sigma_1 \int_{t_{k-1}}^{t_k} U_1(\frac{1}{2}(t_k - s))\,f(s)ds \end{aligned} \qquad (1.32)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$V(\tau) = U_1(\frac{\tau}{2})U_2(\tau)U_1(\frac{\tau}{2})\,,$$

$$V_0(\tau,t) = \sigma_0\, U_1(\frac{\tau}{2})U_2(\tau)U_1(\frac{t}{2}) + (1-\sigma_0-\sigma_1)U_1(\frac{\tau}{2})U_2(t) + \sigma_1 U_1(\frac{t}{2})\,,$$

მაშინ (1.32) ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$u_k(t_k) = V(\tau)u_{k-1}(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} V_0(\tau, t_k - s) f(s)ds \, .$$

აქედან მიიღება

$$u_k(t\ \ ) = (V(\tau))^k \varphi + \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (V(\tau))^{k-i} V_0(\tau, t_i - s) f(s)ds \, . \qquad (1.33)$$

(1.28) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$u(t_k) = U(t_k)\varphi + \int_0^{t_k} U(t_k - s) f(s)ds \, .$$

აქედან მიიღება

$$u(t_k) = (U(\tau))^k \varphi + \sum_{i=1}^{k} \int_0^{t_k} U(t_k - s) f(s)ds \, . \qquad (1.34)$$

თუ გავითვალისწინებთ იგივეობას

$$U(t_k - s) = U(t_{k-i})U(t_i - s) = (U(\tau))^{k-i} U(t_i - s) \, ,$$

მაშინ (1.34) შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$u(t_k) = (U(\tau))^k \varphi + \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (U(\tau))^{k-i} (U(t_i - s)) f(s)ds \, .$$

(1.35)

(1.33) და (1.35) ფორმულების თანახმად მიიღება

$$u(t_k) - u_{\ k}(t_k) = \left[\left(U(\tau)\right)^k - \left(V(\tau)\right)^k \right]\phi + \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\left(U(\tau)\right)^{k-i} - \left(V(\tau)\right)^{k-i} \right] U(t_i - s) f(s)ds +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} (V(\tau))^{k-i} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[U(t_i - s) - V_0(\tau, t_i - s) \right] f(s)ds \, . \qquad (1.36)$$

ლემა 1.2-ის თანახმად მართებულია შეფასება

$$\left\|\left[(U(\tau))^{k-i}-(V(\tau))^{k-i}\right]\varphi\right\| \le c\tau^2 t_{k-i} e^{\omega t_{k-i}} \left\|A_0^3\varphi\right\|.$$

აქედან გამომდინარეობს

$$\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left\|\left[(U(\tau))^{k-i}-(V(\tau))^{k-i}\right]U(t_i-s)f(s)\right\|ds \le$$

$$\le c\tau^2\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} t_{k-i}e^{\omega t_{k-i}}\left\|\mathrm{A}^3 U(t_i-s)f(s)\right\|ds \le$$

$$\le c\tau^2\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} t_{k-i}e^{\omega t_{k-i}}e^{\omega t_{ii}-s}\left\|\mathrm{A}^3 f(s)\right\|ds = c\tau^2\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} t_{k-i}e^{\omega(t_{ki}-s)}\left\|\mathrm{A}^3 f(s)\right\|ds \le$$

$$\le c\tau^2\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_k-s)e^{\omega(t_{ki}-s)}\left\|\mathrm{A}^3 f(s)\right\|ds = c\tau^2\int_{0_{i-1}}^{t_k}(t_k-s)e^{\omega(t_{ki}-s)}\left\|\mathrm{A}^3 f(s)\right\|ds$$

ამრიგად, გვაქვს

$$\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left\|\left[(U(\tau))^{k-i}-(V(\tau))^{k-i}\right]U(t_i-s)f(s)\right\|ds \le$$
$$\le c\tau^2\int_{0_{i-1}}^{t_k}(t_k-s)e^{\omega(t_{ki}-s)}\left\|\mathrm{A}^3 f(s)\right\|ds \qquad (1.37)$$

(1.36) ტოლობის მეორე ჯამში მოთავსებულ ინტეგრალს მივცეთ შემდეგი სახე

$$\left[U(t_i-s)-V_0(\tau,t_i-s)\right]f(s)ds = J_1+J_2+J_3,$$

სადაც

$$J_1=\int_{t_{i-1}}^{t_i}U(t_i-s)f(s)ds-\tau U\left(t_i-t_{i-\frac{1}{2}}\right)f\left(t_{i-\frac{1}{2}}\right),$$

$$J_2=\tau\left[U\left(t_i-t_{i-\frac{1}{2}}\right)-V_0\left(\tau,t_i-t_{i-\frac{1}{2}}\right)\right]f\left(t_{i-\frac{1}{2}}\right),$$

$$J_3 = \tau V_0\left(\tau, t_i - t_{i-\frac{1}{2}}\right) f\left(t_{i-\frac{1}{2}}\right) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} V_0(\tau, t_i - s) f(s) ds .$$

ცხადია, J_3-თვის გავქვს შემდეგი წარმოდგენა

$$J_3 = -\left[\sigma_0 J_{3,1} + (1-\sigma_0-\sigma_1) J_{3,2} + \sigma_1 J_{3,3}\right],$$

სადაც

$$J_{3,1} = U_1\left(\frac{\tau}{2}\right) U_2(\tau) \left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} U_1\left(\frac{1}{2}(t_i - s)\right) f(s) ds - \tau U_1\left(\frac{1}{2}\left(t_i - t_{i-\frac{1}{2}}\right)\right) f\left(t_{i-\frac{1}{2}}\right)\right],$$

$$J_{3,2} = U_1\left(\frac{\tau}{2}\right) \left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} U_2(t_i - s) f(s) ds - \tau U_2\left(t_i - t_{i-\frac{1}{2}}\right) f\left(t_{i-\frac{1}{2}}\right)\right],$$

$$J_{3,3} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} U_1\left(\frac{1}{2}(t_i - s)\right) f(s) ds - \tau U_1\left(\frac{1}{2}\left(t_i - t_{i-\frac{1}{2}}\right)\right) f\left(t_{i-\frac{1}{2}}\right).$$

ლემა 1.3-ის თანახმად მართებულია შეფასებები

$$\left\|J_{3,1}\right\| \le c e^{2\omega_1 \tau} \tau^2 \left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\|\mathrm{A}_1 f'(t)\right\| dt + \tau\left(\left\|\mathrm{A}_1^2 f(t_{i-\frac{1}{2}})\right\| + 1\right)\right],$$

$$\left\|J_{3,2}\right\| \le c e^{2\omega_1 \tau} \tau^2 \left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\|\mathrm{A}_1 f'(t)\right\| dt + \tau\left(\left\|\mathrm{A}_2^2 f(t_{i-\frac{1}{2}})\right\| + 1\right)\right],$$

$$\left\|J_{3,3}\right\| \le c e^{\omega_1 \tau} \tau^2 \left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\|\mathrm{A}_1 f'(t)\right\| dt + \tau\left(\left\|\mathrm{A}_1^2 f(t_{i-\frac{1}{2}})\right\| + 1\right)\right],$$

$$\left\|J_1\right\| \le c e^{\omega_0 \tau} \tau^2 \left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\|\mathrm{A} f'(t)\right\| dt + \tau\left(\left\|\mathrm{A}^2 f(t_{i-\frac{1}{2}})\right\| + 1\right)\right].$$

თეორემა 1.1-ის გ) პირობის თანახმად, ამ უტოლობებიდან გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობები

$$\left\|J_{3,j}\right\| \leq c e^{\omega\tau}\tau^2\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left\|\mathrm{A}_0 f'(t)\right\|dt + \tau\left(\left\|\mathrm{A}_0^2 f(t_{i-\frac{1}{2}})\right\| + 1\right)\right], \quad j = 1,2,3. \tag{1.38}$$

$$\left\|J_1\right\| \leq c e^{\omega\tau}\tau^2\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left\|\mathrm{A}_0 f'(t)\right\|dt + \tau\left(\left\|\mathrm{A}_0^2 f(t_{i-\frac{1}{2}})\right\| + 1\right)\right]. \tag{1.39}$$

(1.38) შეფასებების თანახმად J_3-სთვის გვაქვს

$$\left\|J_3\right\| \leq c e^{\omega\tau}\tau^2\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left\|\mathrm{A}_0 f'(t)\right\|dt + \tau\left(\left\|\mathrm{A}_0^2 f(t_{i-\frac{1}{2}})\right\| + 1\right)\right]. \tag{1.40}$$

შევაფასოთ J_2-ის ნორმა. (1.7) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$V_0\left(\tau, \frac{\tau}{2}\right) = \sigma_0 U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)U_2(\tau)U_1\left(\frac{\tau}{4}\right) + (1-(\sigma_0+\sigma_1))U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)U_2\left(\frac{\tau}{2}\right) + \sigma_1 U_1\left(\frac{\tau}{4}\right) =$$

$$= \sigma_0 U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)U_2(\tau)\left(\mathrm{I} - \frac{\tau}{4}\mathrm{A}_1 + R_1^{(2)}\left(\frac{\tau}{4}\right)\right) + (1-(\sigma_0+\sigma_1))U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)U_2\left(\frac{\tau}{2}\right) + \sigma_1 U_1\left(\frac{\tau}{4}\right) =$$

$$= \sigma_0 U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)\left(U_2(\tau) - \frac{\tau}{4}U_2(\tau)\mathrm{A}_1 + U_2(\tau)R_1^{(2)}\left(\frac{\tau}{4}\right)\right) + (1-(\sigma_0+\sigma_1))U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)U_2\left(\frac{\tau}{2}\right) + \sigma_1 U_1\left(\frac{\tau}{4}\right) =$$

$$= \sigma_0 U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)\left[I - \tau\mathrm{A}_2 + R_2^{(2)}(\tau) - \frac{\tau}{4}\left(\mathrm{I} + R_2^{(1)}(\tau)\right)\mathrm{A}_1 + U_2(\tau)R_1^{(2)}\left(\frac{\tau}{4}\right)\right] +$$

$$+ (1-(\sigma_0+\sigma_1))U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)\left(\mathrm{I} - \frac{\tau}{2}\mathrm{A}_2 + R_2^{(2)}\left(\frac{\tau}{2}\right)\right) + \sigma_1 U_1\left(\frac{\tau}{4}\right) =$$

$$=\sigma_0\left[U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)-\tau U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{A}_2+U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)R_2^{(2)}(\tau)-\frac{\tau}{4}U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)\left(\mathrm{I}+R_2^{(1)}(\tau)\right)\mathrm{A}_1+U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)U_2(\tau)R_1^{(2)}\left(\frac{\tau}{4}\right)\right]+$$

$$+(1-(\sigma_0+\sigma_1))\left(U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)-\frac{\tau}{2}U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{A}_2+U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)R_2^{(2)}\left(\frac{\tau}{2}\right)\right)+\sigma_1U_1\left(\frac{\tau}{4}\right)=$$

$$=\sigma_0[\mathrm{I}-\frac{\tau}{2}\mathrm{A}_1+R_1^{(2)}\left(\frac{\tau}{2}\right)-\tau\left(\mathrm{I}+R_1^{(1)}\left(\frac{\tau}{2}\right)\right)\mathrm{A}_2+U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)R_2^{(2)}(\tau)-\frac{\tau}{4}U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)\left(\mathrm{I}+R_2^{(1)}(\tau)\right)\mathrm{A}_1-$$

$$-\frac{\tau}{4}\left(\mathrm{I}+R_1^{(2)}(\frac{\tau}{2})\right)\mathrm{A}_1+U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)U_2(\tau)R_1^{(2)}\left(\frac{\tau}{4}\right)]+$$

$$+(1-(\sigma_0+\sigma_1))\left(\mathrm{I}-\frac{\tau}{2}\mathrm{A}_1+R_1^{(2)}\left(\frac{\tau}{2}\right)-\frac{\tau}{2}\left(\mathrm{I}+R_1^{(1)}\left(\frac{\tau}{2}\right)\right)\mathrm{A}_2+U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)R_2^{(2)}\left(\frac{\tau}{2}\right)\right)+$$

$$+\sigma_1\left(\mathrm{I}-\frac{\tau}{4}\mathrm{A}_1+R_1^{(2)}\left(\frac{\tau}{4}\right)\right)=$$

$$=\mathrm{I}-\tau(\frac{1}{4}\sigma_0-\frac{1}{4}\sigma_1+\frac{1}{2})\mathrm{A}_1-\tau(\frac{1}{2}\sigma_0-\frac{1}{2}\sigma_1+\frac{1}{2})\mathrm{A}_2+R_2(\tau)$$

სადაც

$$R_2(\tau)=\sum_{j=1}^{5}R_{2,j}(\tau), \tag{1.41}$$

$$R_{2,1}(\tau)=\left(\sigma_0U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)U_2(\tau)+\sigma_1\mathrm{I}\right)R_1^{(2)}\left(\frac{\tau}{4}\right),\quad R_{2,2}(\tau)=-\sigma_0\frac{\tau}{4}U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)R_2^{(1)}(\tau)\mathrm{A}_1,$$

$$R_{2,3}=-\tau(3-\sigma_0-\sigma_1)R_1^{(1)}\left(\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{A}_2,\quad R_{2,4}=(1-\sigma_1)R_1^{(2)}\left(\frac{\tau}{2}\right),$$

$$R_{2,5}(\tau)=(1-\sigma_1)U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)R_2^{(2)}(\tau).$$

ამრიგად, მივიღეთ

$$V_0\left(\tau,\frac{\tau}{2}\right)=I-\tau\left(\frac{1}{4}\sigma_0-\frac{1}{4}\sigma_1+\frac{1}{2}\right)\mathrm{A}_1-\tau\left(\frac{1}{2}\sigma_0-\frac{1}{2}\sigma_1+\frac{1}{2}\right)\mathrm{A}_2+R_2(\tau). \tag{1.42}$$

$U\left(\frac{\tau}{2}\right)$-სთვის (1.7) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$U\left(\frac{\tau}{2}\right)=\mathrm{I}-\frac{\tau}{2}\left(\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2\right)+R^{(2)}\left(\frac{\tau}{2}\right). \tag{1.43}$$

(1.42) და (1.43) წარმოდგენების საფუძველზე ვასკვნით: იმისათვის, რომ $U\left(\frac{\tau}{2}\right)-V_0\left(\tau,\frac{\tau}{2}\right)$ სხვაობა იყოს τ^2-ს რიგის, აუცილებელია σ_0 და σ_1-მა დააკმაყოფილონ შემდეგი სისტემა

$$\frac{1}{4}\sigma_0-\frac{1}{4}\sigma_1+\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}\sigma_0-\frac{1}{2}\sigma_1+\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

აქედან გამომდინარეობს,რომ $\sigma_0=\sigma_1$. ამრიგად, როცა $\sigma_0=\sigma_1$, გვაქვს

$$U\left(\frac{\tau}{2}\right)-V_0\left(\tau,\frac{\tau}{2}\right)=R_2(\tau)-R^{(2)}\left(\frac{\tau}{2}\right),$$

სადაც $R_2(\tau)$ და $R^{(2)}\left(\frac{\tau}{2}\right)$ შესაბამისად განისაზღვრება (1.41) და (1.7) ფორმულებით.

ცხადია, უტოლობა

$$\left\|\left(V_0\left(\tau,\frac{\tau}{2}\right)-U\left(\frac{\tau}{2}\right)\right)\varphi\right\|\le\sum_{j=1}^{4}\left\|R_{2,j}(\tau)\varphi\right\|+\left\|R^{(2)}\left(\frac{\tau}{2}\right)\varphi\right\|. \tag{1.44}$$

(1.3) და (1.4) შეფასებებისა და თეორემა 1.1-ის გ) პირობის თანახმად გვაქვს

$$\left\|R_{2,1}(\tau)\varphi\right\|\le\left\|(\sigma_0U_1\left(\frac{\tau}{2}\right)U_2(\tau)+\sigma_1I)R_1^{(2)}\left(\frac{\tau}{4}\right)\varphi\le\right\|$$

$$\le ce^{\omega_1\frac{\tau}{2}}e^{\omega_1\tau}\int_0^{\frac{\tau}{4}}\int_0^{s_1}\|U_1(s)\|\|\mathrm{A}_1^2\varphi\|dsds_1 \le c\tau^2 e^{2\omega_1\tau}\|\mathrm{A}_0^2\varphi\|, \quad \varphi\in D(\mathrm{A}^2)\,. \tag{1.45}$$

ანალოგიურად მიიღება შემდეგი შეფასებები

$$\|R_{2,j}(\tau)\varphi\| \le c\tau^2 e^{2\omega_1\tau}\|\mathrm{A}_0^2\varphi\|, \quad \varphi\in D(\mathrm{A}^3), \quad j=1,2,3,4,5. \tag{1.46}$$

$$\left\|R^{(2)}(\frac{\tau}{2})\varphi\right\| \le \left\|\mathrm{A}^2\int_0^{\frac{\tau}{2}}\int_0^{s_1}\|U_1(s)\varphi dsds_1\|\right\| \le c\tau^2 e^{\omega_0\frac{\tau}{2}}\|\mathrm{A}^2\varphi\| \le$$

$$\le c\tau^2 e^{\omega_0\frac{\tau}{2}}\|\mathrm{A}_0^2\varphi\|, \quad \varphi\in D(\mathrm{A}^2) \tag{1.47}$$

(1.44)-დან (1.45), (1.46), (1.47) შეფასებების გათვალისწინებით მიიღება

$$\left\|\left(V_0\left(\tau,\frac{\tau}{2}\right)-U\left(\frac{\tau}{2}\right)\right)\varphi\right\| \le c\tau^2 e^{\omega_0\frac{\tau}{2}}\|\mathrm{A}_0^2\varphi\|, \quad \varphi\in D(\mathrm{A}^2)\,. \tag{1.48}$$

(1.36)-დან, (1.19), (1.37), (1.39), (1.40), (1.48) და (1.14) შეფასებების გათვალისწინებით, გამომდინარეობს (1.3) შეფასება.

თეორემა 1.1 დამტკიცებულია ■

1.2 გასაშუალოებული სიმეტრიული სქემა

(1.1) ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნისათვის გამოვიყენოთ დეკომპოზიციის გასაშუალოებული დიფერენციალური სქემა, რომელიც ეკუთვნის დ.გორდეზიანს (იხ.[1]).

$$\frac{dv_k^{(1)}(t)}{dt}+A_1v_k^{(1)}(t)=\sigma_0 f(t), \quad v_k^{(2)}(t_{k-1})=u_{k-1}(t_{k-1}), \quad u_0(0)=\varphi,$$

$$\frac{dv_k^{(2)}(t)}{dt}+A_2v_k^{(2)}(t)=(1-\sigma_0)f(t), \quad v_k^{(2)}(t_{k-1})=v_k^{(1)}(t_k); \tag{1.49}$$

$$\frac{dw_k^{(1)}(t)}{dt}+A_2 w_k^{(1)}(t)=\sigma_1 f(t), \quad w_k^{(1)}(t_{k-1})=u_{k-1}(t_{k-1}), \quad u_0(0)=\varphi,$$

$$\frac{dw_k^{(2)}(t)}{dt}+A_1 w_k^{(2)}(t)=(1-\sigma_1) f(t), \quad w_k^{(2)}(t_{k-1})=w_k^{(1)}(t_k); \tag{1.50}$$

$$u_k(t_k)=\frac{1}{2}(v_k^{(2)}(t_k)+w_k^{(2)}(t_k)). \tag{1.51}$$

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას

თეორემა 1.4. ვთქვათ, სრულდება თეორემა 1.1–ის პირობები, მაშინ თუ $\sigma_1=1-\sigma_0$ (1.49)-(1.51) სქემის ცდომილებისათვის მართებულია შემდეგი შეფასება

$$\|u(t_k)-u_k(t_k)\|\le c\tau^2[e^{\omega t_k}\left(t_k\left\|\mathrm{A}_0^3\varphi\right\|+\int_0^{t_k}\|\mathrm{A}_0 f'(t)\|dt+\tau\sum_{i=1}^{k}\left(\left\|\mathrm{A}_0^2 f(t_{i-\frac{1}{2}})\right\|+\left\|\mathrm{A}_0 f(t_{i-\frac{1}{2}})\right\|\right)+t_k\right)+$$

$$+\int_0^{t_k}(t_k-s)e^{\omega(t_k-s)}\left\|\mathrm{A}_0^3 f(s)\right\|ds], \tag{1.52}$$

სადაც $\omega=\max(\omega_0,2\omega_1)$, $c=const>0$.

თეორემა 1.4-ის დამტკიცებისათვის ჩვენ დაგვჭირდება ლემა 1.2-ის ანალოგიური ლემა.

ლემა 1.5. თუ A_1, A_2 და A ოპერატორები აკმაყოფილებენ თეორემა 1.4-ის პირობებს, მაშინ ნებისმიერი ნატურალური n -თვის მართებულია შეფასება

$$\left\|\left[U(t)-(V(\frac{t}{n}))^n\right]\varphi\right\|\le\frac{ct^3}{n^2}e^{\omega t}\left\|\mathrm{A}^3\varphi\right\|, \quad \varphi\in D(\mathrm{A}^3), \tag{1.53}$$

სადაც

$$V(t)=\frac{1}{2}\left[U_1(t)U_2(t)+U_2(t)U_1(t)\right],$$

$U(t)=\exp(-tA)$ და $U_i(t)=\exp(-tA_i)$ შესაბამისად A და A_i $(i=1,2)$ ოპერატორების მიერ წარმოქმნილი ძლიერად უწყვეტი ნახევარჯგუფებია.

ლემა 1.5 მტკიცდება ლემა 1.2-ის ანალოგიურად. შევნიშნავთ, რომ ამ შემთხვევაში (1.7) ფორმულის თანახმად მიიღება

$$V(\tau)=\frac{1}{2}\left[U_1(\tau)U_2(\tau)+U_2(\tau)U_1(\tau)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[U_1(\tau)\left(I-\tau\mathrm{A}_2+\frac{\tau^2}{2}\mathrm{A}_2^2+R_2^{(3)}(\tau)\right)+U_2(\tau)\left(I-\tau\mathrm{A}_1+\frac{\tau^2}{2}\mathrm{A}_1^2+R_1^{(3)}(\tau)\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(U_1(\tau)-\tau U_1(\tau)\mathrm{A}_2+\frac{\tau^2}{2}U_1(\tau)\mathrm{A}_2^2+U_1(\tau)R_2^{(3)}(\tau)\right)+\right.$$
$$\left.+\left(U_2(\tau)-\tau U_2(\tau)\mathrm{A}_1+\frac{\tau^2}{2}U_2(\tau)\mathrm{A}_1^2+U_2(\tau)R_1^{(3)}(\tau)\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}[I-\tau\mathrm{A}_1+\frac{\tau^2}{2}\mathrm{A}_1^2+R_1^{(3)}(\tau)-\tau(I-\tau\mathrm{A}_1+R_1^{(2)}(\tau))\mathrm{A}_2+\frac{\tau^2}{2}(I+R_1^{(1)}(\tau))\mathrm{A}_2^2+U_1(\tau)R_2^{(3)}(\tau)+$$
$$+I-\tau\mathrm{A}_2+\frac{\tau^2}{2}\mathrm{A}_2^2+R_2^{(3)}(\tau)-\tau(I-\tau\mathrm{A}_2+R_2^{(2)}(\tau))\mathrm{A}_1+\frac{\tau^2}{2}(I+R_2^{(1)}(\tau))\mathrm{A}_1^2+U_2(\tau)R_1^{(3)}(\tau)]=$$
$$=I-\tau(\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2)+\frac{\tau^2}{2}(\mathrm{A}_1^2+\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2+\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2^2)+R_3(\tau)\,,$$

სადაც $R_3(\tau)$ ნაშთითი წევრი არის $O(\tau^3)$–ის რიგის.

თეორემა 1.4-ის დამტკიცება. (1.49) სისტემიდან (1.28) ფორმულის თანახმად მიიღება

$$v_k^{(1)}(t_k)=U_1(\tau)u_{k-1}(t_{k-1})+\sigma_0\int_{t_{k-1}}^{t_k}U_1(t_k-s)f(s)ds\,,$$

$$v_k^{(2)}(t_k)=U_2(\tau)v_k^{(1)}(t_{k-1})+(1-\sigma_0)\int_{t_{k-1}}^{t_k}U_2(t_k-s)f(s)ds.$$

ამ ტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$v_k^{(2)}(t_k)=U_2(\tau)U_1(\tau)u_{k-1}(t_{k-1})+$$
$$+\sigma_0\int_{t_{k-1}}^{t_k}U_2(\tau)U_1(t_k-s)f(s)ds,(1-\sigma_0)\int_{t_{k-1}}^{t_k}U_2(t_k-s)f(s)ds. \tag{1.54}$$

(1.50) სისტემიდან ანალოგიურად მიიღება

$$w_k^{(2)}(t_k) = U_2(\tau)U_1(\tau)u_{k-1}(t_{k-1}) + \tag{1.55}$$
$$+\sigma_1 \int_{t_{k-1}}^{t_k} U_1(\tau)U_2(t_k - s)f(s)ds, (1-\sigma_1)\int_{t_{k-1}}^{t_k} U_1(t_k - s)f(s)ds.$$

ცხადია (1.54) და (1.55) ფორმულების თანახმად გვაქვს (იხ.(1.51))

$$u_k(t_k) = \frac{1}{2}(U_1(\tau)U_2(\tau) + U_2(\tau)U_1(\tau))u_{k-1}(t_{k-1}) +$$
$$+\frac{1}{2}[\sigma_0 \int_{t_{k-1}}^{t_k} U_2(\tau)U_1(t_k - s)f(s)ds + \sigma_1 \int_{t_{k-1}}^{t_k} U_1(\tau)U_2(t_k - s)f(s)ds + \tag{1.56}$$
$$+(1-\sigma_0)\int_{t_{k-1}}^{t_k} U_2(t_k - s)f(s)ds) + (1-\sigma_1)\int_{t_{k-1}}^{t_k} U_1(t_k - s)f(s)ds)].$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$V(\tau) = \frac{1}{2}\left[U_1(\tau)U_2(\tau) + U_2(\tau)U_1(\tau)\right],$$

$$V_0(\tau,t) = \frac{1}{2}(\sigma_0 U_2(\tau)U_1(\tau) + \sigma_1 U_1(\tau)U_2(\tau) + (1-\sigma_0)U_2(\tau) + (1-\sigma_1)U_1(\tau)),$$

მაშინ (1.56) მიიღებს სახეს

$$u_k(t_k) = V(\tau)u_{k-1}(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} V_0(\tau, t_k - s)f(s)ds.$$

აქედან მიიღება

$$u_k(t_k) = (V(\tau))^k \varphi + \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (V(\tau))^{k-i} V_0(\tau, t_i - s)f(s)ds. \tag{1.57}$$

(1.34) და (1.57) ფორმულების თანახმად გვექნება

$$u(t_k)-u_k(t_k)=\left[(U(\tau))^k-(V(\tau))^k\right]\varphi+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left[(U(\tau))^{k-i}-(V(\tau))^{k-i}\right]U(t_i-s)f(s)ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}(V(\tau))^{k-i}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left[U(t_i-s)-V_0(\tau,t_i-s)\right]f(s)ds\,. \qquad (1.58)$$

ლემა 1.5-ის თანახმად მართებულია შეფასებები

$$\left\|\left[(U(\tau))^k-(V(\tau))^k\right]\varphi\right\|\le c\tau^2t_ke^{\omega t_k}\left\|\mathrm{A}_0^3\varphi\right\|,\quad \varphi\in D\left(\mathrm{A}^3\right) \qquad (1.59)$$

$$\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left\|\left[(U(\tau))^{k-i}-(V(\tau))^{k-i}\right]U(t_i-s)f(s)\right\|ds\le$$

$$\le c\tau^2\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_k-s)e^{\omega(t_k-s)}\left\|\mathrm{A}^3f(s)\right\|ds \qquad (1.60)$$

(1.58) ტოლობის მეორე ჯამში მოთავსებულ ინტეგრალს მივცეთ შემდეგი სახე

$$\left[U(t_i-s)-V_0(\tau,t_i-s)\right]f(s)=J_1+J_2+J_3\,,$$

სადაც

$$J_1=\int_{t_{i-1}}^{t_i}U(t_i-s)f(s)ds-\tau U\left(t_i-t_{i-\frac{1}{2}}\right)f(t_{i-\frac{1}{2}})\,,$$

$$J_2=\tau[U\left(t_i-t_{i-\frac{1}{2}}\right)-V_0(\tau,t_i-t_{i-\frac{1}{2}})]f(t_{i-\frac{1}{2}})\,,$$

$$J_3=\tau V_0(\tau,t_i-t_{i-\frac{1}{2}})f(t_{i-\frac{1}{2}})-\int_{t_{i-1}}^{t_i}V_0(\tau,t_i-s)f(s)ds\,.$$

ცხადია, J_3-თვის გვაქვს შემდეგი წარმოდგენა

$$J_3=-\frac{1}{2}\left[\sigma_0J_{3,1}+\sigma_1J_{3,2}+(1-\sigma_0)J_{3,3}+(1-\sigma_1)J_{3,4}\right],$$

$$J_{3.1}=U_2(\tau)\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i}U_1(t_i-s)f(s)ds-\tau U_1\left(t_i-t_{i-\frac{1}{2}}\right)f(t_{i-\frac{1}{2}})\right],$$

$$J_{3.,2}=U_1(\tau)\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i}U_2(t_i-s)f(s)ds-\tau U_2\left(t_i-t_{i-\frac{1}{2}}\right)f(t_{i-\frac{1}{2}})\right],$$

$$J_{3,.3}=\int_{t_{i-1}}^{t_i}U_2(t_i-s)f(s)ds-\tau U_2\left(t_i-t_{i-\frac{1}{2}}\right)f(t_{i-\frac{1}{2}}),$$

$$J_{3,.4}=\int_{t_{i-1}}^{t_i}U_1(t_i-s)f(s)ds-\tau U_1\left(t_i-t_{i-\frac{1}{2}}\right)f(t_{i-\frac{1}{2}}).$$

ლემა 1.3-ის თანახმად მართებულია შეფასებები

$$\|J_{3,1}\|\le ce^{2\omega_1\tau}\tau^2\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|\mathrm{A}_1 f'(t)\|dt+\tau\left(\left\|\mathrm{A}_1^2 f(t_{i-\frac{1}{2}})\right\|+1\right)\right],$$

$$\|J_{3,2}\|\le ce^{2\omega_1\tau}\tau^2\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|\mathrm{A}_1 f'(t)\|dt+\tau\left(\left\|\mathrm{A}_2^2 f(t_{i-\frac{1}{2}})\right\|+1\right)\right],$$

$$\|J_{3,3}\|\le ce^{\omega_1\tau}\tau^2\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|\mathrm{A}_1 f'(t)\|dt+\tau\left(\left\|\mathrm{A}_1^2 f(t_{i-\frac{1}{2}})\right\|+1\right)\right],$$

$$\|J_{3,4}\|\le ce^{\omega_1\tau}\tau^2\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|\mathrm{A}_1 f'(t)\|dt+\tau\left(\left\|\mathrm{A}_1^2 f(t_{i-\frac{1}{2}})\right\|+1\right)\right],$$

$$\|J_1\|\le ce^{\omega_0\tau}\tau^2\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|\mathrm{A}f'(t)\|dt+\tau\left(\left\|\mathrm{A}^2 f(t_{i-\frac{1}{2}})\right\|+1\right)\right].$$

ამ უტოლობებიდან თეორემა 1.1-ის გ) პირობის თანახმად გამომდიანრეობს შემდეგი უტოლობები

$$\|J_1\|\le ce^{\omega\tau}\tau^2\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|\mathrm{A}_0 f'(t)\|dt+\tau\left(\left\|\mathrm{A}_0^2 f(t_{i-\frac{1}{2}})\right\|+1\right)\right], \tag{1.61}$$

$$\|J_3\| \le c e^{\omega\tau}\tau^2\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|A_0 f'(t)\|dt + \tau\left(\left\|A_0^2 f(t_{i-\frac{1}{2}})\right\|+1\right)\right]. \qquad (1.62)$$

შევაფასოთ J_3-ის ნორმა. (1.7) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$V_0(\tau,\frac{\tau}{2}) = \frac{1}{2}\left[(\sigma_0 U_2(\tau)U_1(\frac{\tau}{2}) + \sigma_1 U_1(\tau)U_2(\frac{\tau}{2}) + (1-\sigma_0)U_2(\frac{\tau}{2}) + (1-\sigma_1)U_1(\frac{\tau}{2}))\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\sigma_0 U_2(\tau)(I - \frac{\tau}{2}A_1 + R_1^{(2)}(\frac{\tau}{2})) + \sigma_1 U_1(\tau)(I - \frac{\tau}{2}A_2 + R_2^{(2)}(\frac{\tau}{2})) + (1-\sigma_0)U_2(\frac{\tau}{2}) + (1-\sigma_1)U_1(\frac{\tau}{2}))\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(\sigma_0(U_2(\tau) - \frac{\tau}{2}U_2(\tau)A_1 + U_2(\tau)R_1^{(2)}(\frac{\tau}{2})) + \sigma_1(U_1(\tau) - \frac{\tau}{2}U_1(\tau)A_2 + U_1(\tau)R_2^{(2)}(\frac{\tau}{2})) +$$

$$+ (1-\sigma_0)U_2(\frac{\tau}{2}) + (1-\sigma_1)U_1(\frac{\tau}{2})) =$$

$$= \frac{1}{2}[\sigma_0(I - \tau A_2 + R_2^{(2)}(\tau) - \frac{\tau}{2}(I + R_2^{(1)}(\tau))A_1 + U_2(\tau)R_1^{(2)}(\frac{\tau}{2})) +$$

$$+ \sigma_1(I - \tau A_1 + R_1^{(2)}(\tau) - \frac{\tau}{2}(I + R_1^{(1)}(\tau))A_2 + U_1(\tau)R_2^{(2)}(\frac{\tau}{2}) +$$

$$+ (1-\sigma_0)(I - \frac{\tau}{2}A_2 + R_2^{(2)}(\frac{\tau}{2})) + (1-\sigma_1)(I - \frac{\tau}{2}A_1 + R_1^{(2)}(\frac{\tau}{2}))] =$$

$$= I - \frac{\tau}{2}(\frac{1}{2}\sigma_0 - \sigma_1 + \frac{1}{2}(1-\sigma_1))A_1 - \frac{\tau}{2}(\sigma_0 - \frac{1}{2}\sigma_1 + \frac{1}{2}(1-\sigma_0))A_2 + R_2(\tau),$$

სადაც

$$R_2(\tau) = \sum_{j=1}^{6} R_{2,j}(\tau),$$

$$R_{2,1}(\tau) = \frac{1}{2}\left(\sigma_0 U_2(\tau) + (1-\sigma_1)I\right)R_1^{(2)}\left(\frac{\tau}{2}\right),$$

$$R_{2,2}(\tau) = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 U_2(\tau) + (1-\sigma_0)I\right)R_2^{(2)}\left(\frac{\tau}{2}\right),$$

$$R_{2,3}(\tau) = \frac{\tau}{4}\sigma_0 R_2^{(1)}(\tau)A_1, \quad R_{2,4}(\tau) = -\frac{\tau}{4}\sigma_1 R_1^{(1)}(\tau)A_2,$$

$$R_{2,5}(\tau) = \frac{1}{2}\sigma_0 R_2^{(2)}(\tau), \quad R_{2,6}(\tau) = \frac{1}{2}\sigma_1 R_1^{(2)}(\tau).$$

ამრიგად მივიღეთ

$$V_0(\tau,\frac{\tau}{2}) = I - \frac{\tau}{2}(\frac{1}{2}\sigma_0 - \sigma_1 + \frac{1}{2}(1-\sigma_1))\mathrm{A}_1 -$$

$$- \frac{\tau}{2}(\sigma_0 - \frac{1}{2}\sigma_1 + \frac{1}{2}(1-\sigma_0))\mathrm{A}_2 + R_2(\tau) \tag{1.64}$$

$U(\frac{\tau}{2})$ -თვის (1.7) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$U(\frac{\tau}{2}) = I - \frac{\tau}{2}(\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2) + R^{(2)}\left(\frac{\tau}{2}\right). \tag{1.65}$$

(1.64) და (1.65) წარმოდგენების საფუძველზე ვასკვნით: იმისათვის, რომ $U(\frac{\tau}{2}) - V_0(\tau,\frac{\tau}{2})$ სხვაობა იყოს τ^2–ის რიგის აუცილებელია σ_0 და σ_1 დააკმაყოფილონ შემდეგი სისტემა:

$$\frac{1}{2}\sigma_0 - \sigma_1 + \frac{1}{2}(1-\sigma_1) = 1\,,$$

$$\sigma_0 - \frac{1}{2}\sigma_1 + \frac{1}{2}(1-\sigma_0) = 1\,.$$

აქედან გამომდიანრეობს $\sigma_1 = 1-\sigma_0$. ამრიგად, როცა $\sigma_1 = 1-\sigma_0$, გვაქვს

$$U(\frac{\tau}{2}) - V_0(\tau,\frac{\tau}{2}) = R_2(\tau) - R^{(2)}\left(\frac{\tau}{2}\right),$$

სადაც $R_2(\tau)$ და $R^{(2)}\left(\frac{\tau}{2}\right)$ შესაბამისად განისაზღვრება (1.63) და (1.7) ფორმულებით.

ცხადია უტოლობა:

$$\left\|\left(V_0\left(\tau,\frac{\tau}{2}\right) - U\left(\frac{\tau}{2}\right)\right)\varphi\right\| \le \sum_{j=1}^{4}\left\|R_{2,j}(\tau)\varphi\right\| + \left\|R^{(2)}\left(\frac{\tau}{2}\right)\varphi\right\| \tag{1.66}$$

(1.13) და (1.14) შეფასებებისა და თეორემა 1.1-ის გ) პირობის თანახმად გვაქვს

$$\left\|R_{2,j}(\tau)\varphi\right\| \le c\tau^2 e^{2\omega_1\tau}\left\|A_0^2\varphi\right\|, \quad \varphi \in D\left(A^3\right), \; j = 1,....,6. \tag{1.67}$$

$$\left\|R^{(2)}\left(\frac{\tau}{2}\right)\varphi\right\| \le \left\|A^2\int_0^{\frac{\tau}{2}}\int_0^{s_1} U(s)\varphi ds ds_1\right\| \le c\tau^2 e^{\omega_0\frac{\tau}{2}}\left\|A_0^2\varphi\right\|, \quad \varphi \in D\left(A^2\right). \tag{1.68}$$

(1.66)-დან (1.67),(1.68) შეფასებების გათვალისწინებით მიიღება

$$\left\|\left(V_0\left(\tau,\frac{\tau}{2}\right) - U\left(\frac{\tau}{2}\right)\right)\varphi\right\| \le c\tau^2 e^{\omega\tau}\left\|A_0^2\varphi\right\|, \quad \varphi \in D\left(A^2\right). \tag{1.69}$$

(1.58)-დან (1.14), (1.59), (1.60), (1.61), (1.62) და (1.69) შეფასებების გათვალისწინებით გამომდინარეობს (1.52) შეფასება. **ამრიგად თეორემა 1.4 დამტკიცებულია.**

თავი II. დეკომპოზიციის სხვაობიანი სქემები

ამ პარაგრაფში განხილული იქნება წინა პარაგრაფში განხილული დიფერენციალური დეკომპოზიციის სქემების შესაბამისი მეორე რიგის სიზუსტის სხვაობიანი ანალოგები. ჩვენ მათ ვუწოდებთ დეკომპოზიციის სხვაობიან სქემებს.

2.1 მიმდევრობითი ტიპის სიმეტრიული სქემა

(1.1) ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნისათვის გამოვიყენოთ დეკომპოზიციის შემდეგი სიმეტრიული ნახევრადდისკრეტული სხვაობიანი სქემა

$$\frac{u_k^{(1)} - u_{k-1}^{(1)}}{\tau} + \frac{1}{2}A_1\frac{u_k^{(1)} + u_{k-1}^{(1)}}{2} = \sigma_0 f(t_{k-\frac{1}{2}}), \quad u_{k-1}^{(1)} = u_{k-1}, \quad u_0 = \varphi,$$

$$\frac{u_k^{(2)} - u_{k-1}^{(2)}}{\tau} + A_2\frac{u_k^{(2)} + u_{k-1}^{(2)}}{2} = (1-(\sigma_0+\sigma_1)) f(t_{k-\frac{1}{2}}), \quad u_{k-1}^{(2)} = u_k^{(1)}, \tag{2.1}$$

$$\frac{u_k^{(3)} - u_{k-1}^{(3)}}{\tau} + \frac{1}{2}A_1\frac{u_k^{(3)} + u_{k-1}^{(3)}}{2} = \sigma_1 f(t_{k-\frac{1}{2}}), \quad u_{k-1}^{(3)} = u_k^{(2)}.$$

მიახლოებით ამოხსნად $t = t_k = k\tau$ წერტილში ვაცხადებთ: $u_k = u_k^{(3)}$.

(2.1) სქემა წამოადგენს (1.2) დეკომპოზიციის დიფერენციალური სქემის სხვაობიან ანალოგს.

ჩვენი მიზანია, მივიღოთ ცხადი აპრიორული შეფასება (2.1) სქემისთვის.

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თეორემა 2.1. ვთქვათ, სრულდება შემდეგი პირობები

ა) არსებობს $\omega_0 > 0$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $\lambda > \omega_0$ –თვის, ოპერატორი $\mathrm{A} + \lambda \mathrm{I}$ შებრუნებადია და მართებულია შეფასება:

$$\left\| \left(\mathrm{A} + \lambda \mathrm{I} \right)^{-k} \right\| \le \frac{\mathrm{M}}{\left(\lambda - \omega_0 \right)^k} \quad , \quad \mathrm{M} = const > 0, \quad k = 1,2,...;$$

ბ) ნებისმიერი $\tau > 0$ –თვის ოპერატორები $I + \tau A_i$, $i = 1,2$ შებრუნებადია და მართებულია უტოლობები

$$\left\| (I - \tau A_i)(I + \tau A_i)^{-1} \right\| \le e^{\omega_1 \tau}, \omega_1 = const > 0,$$

$$\left\| (I + \tau A_i)^{-1} \right\| \le c e^{\omega_1 \tau}, c = const > 0;$$

გ) $D\left(\mathrm{A}^m\right) \subset D\left(\mathrm{A}_i^m\right)$, $(i = 1, 2)$; A_i ოპერატორები $D\left(\mathrm{A}^m\right)$-ს ასახავენ $D\left(\mathrm{A}^{m-1}\right)$-ში

და მართებულია უტოლობები:

$$\left\| \mathrm{A}_i^2 u \right\| + \left\| \mathrm{A}_i \mathrm{A}_{3-i} u \right\| \le c \left\| \mathrm{A}_0^2 u \right\|, \quad u \in D\left(\mathrm{A}^2\right),$$

$$\left\| \mathrm{A}_i^3 u \right\| + \left\| \mathrm{A}_i^2 \mathrm{A}_{3-i} u \right\| + \left\| \mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2 \mathrm{A}_1 u \right\| \le c \left\| \mathrm{A}_0^3 u \right\|, \quad u \in D\left(\mathrm{A}^3\right),$$

სადაც $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A} - \lambda_0 \mathrm{I}$, λ_0 არის A ოპერატორის რეგულარული წერტილი $c = const > 0$;

დ). $f(t)$ ფუნქცია უწყვეტად დიფერენცირებადია და $f'(t)$ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას: ყოველი ფიქსირებული t-სთვის $[0;+\infty)$-დან $f(t)\in D\left(\mathrm{A}^3\right)$, $f'(t)\in D(\mathrm{A})$ და $\varphi\in D\left(\mathrm{A}^3\right)$;

მაშინ, თუ $\sigma_0=\sigma_1$, (2.1) სქემის ცდომილებისათვის სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$\left\|u(t_k)-u_k(t_k)\right\|\le c\tau^2[e^{\omega t_k}\left(t_k\left\|\mathrm{A}_0^3\varphi\right\|+\int_0^{t_k}\left\|\mathrm{A}_0 f'(t)\right\|dt+\tau\sum_{i=1}^{k}\left(\left\|\mathrm{A}_0^2 f(t_{i-\frac{1}{2}})\right\|+\left\|\mathrm{A}_0 f(t_{i-\frac{1}{2}})\right\|\right)+t_k\right)+$$

$$+\int_0^{t_k}(t_k-s)e^{\omega(t_k-s)}\left\|\mathrm{A}_0^3 f(s)\right\|ds\,], \tag{2.2}$$

სადაც $\omega=\max(\omega_0\ ,2\omega_1)$, $c=const>0$.

დამტკიცება. (2.1)-დან მიიღება

$$u_k^{(1)}=S_1\left(\frac{\tau}{2}\right)u_{k-1}^{(1)}+\tau\sigma_0L_1\left(\frac{\tau}{2}\right)f\left(t_{k-\frac{1}{2}}\right),$$

$$u_k^{(2)}=S_1(\tau)u_{k-1}^{(2)}+\tau(1-(\sigma_0+\sigma_1)L_2(\tau)f\left(t_{k-\frac{1}{2}}\right),$$

$$u_k^{(3)}=S_1\left(\frac{\tau}{2}\right)u_{k-1}^{(3)}+\tau\sigma_1L_1\left(\frac{\tau}{2}\right)f\left(t_{k-\frac{1}{2}}\right),$$

სადაც

$$S_i(\tau)=(I-\frac{\tau}{2}\mathrm{A}_i)(I+\frac{\tau}{2}\mathrm{A}_i)^{-1},\quad L_i(\tau)=(I+\frac{\tau}{2}\mathrm{A}_i)^{-1},\quad i=1,2.$$

აქედან გვაქვს

$$u_k=V(\tau)u_{k-1}+\tau L(\tau)f(t_{k-\frac{1}{2}}) \tag{2.3}$$

სადაც

$$V(\tau)=S_1(\frac{\tau}{2})S_2(\tau)S_1(\frac{\tau}{2})$$

და

$$L(\tau)=\sigma_0 S_1\left(\frac{\tau}{2}\right)S_2(\tau)L_1\left(\frac{\tau}{2}\right)+(1-(\sigma_0+\sigma_1))S_1\left(\frac{\tau}{2}\right)L_2(\tau)+\sigma_1 L_1\left(\frac{\tau}{2}\right).$$

(2.3)-დან ინდუქციით მიიღება

$$u(t_k)=(V(\tau))^k\varphi+\tau\sum_{i=1}^{k}(V(\tau))^{k-i}L(\tau)f(t_{i-\frac{1}{2}})\,. \tag{2.4}$$

(2.4) და (1.35) ფორმულების თანახმად გვაქვს

$$u(t_k)-u_k=\left[(U(\tau))^k-(V(\tau))^k\right]\varphi+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(U(\tau))^{k-i}U(t_i-s)f(s)ds-\sum_{i=1}^{k}(V(\tau))^{k-i}L(\tau)f(t_{i-\frac{1}{2}})ds\,.$$

მარჯვენა მხარეს მივცეთ შემდეგი სახე

$$u(t_k)-u_k=\left[(U(\tau))^k-(V(\tau))^k\right]\varphi+\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}[(U(\tau))^{k-i}-(V(\tau))^{k-i}]U(t_i-s)f(s)ds-$$

$$-\sum_{i=1}^{k}(V(\tau))^{k-i}[\tau(L(\tau)-U(\frac{\tau}{2}))f(t_{i-\frac{1}{2}})+U(\frac{\tau}{2})(\tau f(t_{i-\frac{1}{2}})-\int_{t_{i-1}}^{t_i}f(s)ds)+ \tag{2.5}$$

$$+\int_{t_{i-1}}^{t_i}U(\frac{\tau}{2})f(s)ds-\int_{t_{i-1}}^{t_i}U(t_i-s)f(s)ds]\,.$$

მართებულია ფორმულა

$$\left[(U(\tau))^k-(V(\tau))^k\right]\varphi=\sum_{i=1}^{k}(V(\tau,\tau))^{k-i}\left[U(\tau)-V(\tau,\tau)\right]U(t_{i-1})\varphi\,. \tag{2.6}$$

(1.7) ფორმულის თანახმად $U(\tau)$–თვის გვაქვს

$$U(\tau) = I - \tau A + \frac{\tau^2}{2} A^2 + R^{(3)}(\tau), \tag{2.7}$$

სადაც

$$R^{(3)}(\tau) = -A^3 \int_0^{\tau}\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} U(s)ds ds_2 ds_1 . \tag{2.8}$$

მართებულია შემდეგი ფორმულები

$$S_i(\tau) = I + R_i^{(1)}(\tau), \quad R_i^{(1)}(\tau) = -\frac{\tau}{2} \mathrm{A}_i (I + S_i(\tau)), \tag{2.9}$$

$$S_i(\tau) = I - \tau A_i + R_i^{(2)}(\tau), \quad R_i^{(2)}(\tau) = \frac{\tau^2}{4} \mathrm{A}_i^2 (I + S_i(\tau)), \tag{2.10}$$

$$S_i(\tau) = I - \tau A_i + \frac{\tau^2}{4} A_i^2 + R_i^{(3)}(\tau), \quad R_i^{(3)}(\tau) = -\frac{\tau^3}{8} \mathrm{A}_i^3 (I + S_i(\tau)) . \tag{2.11}$$

ამ ფორმულების გამოყენებით მიიღება

$$V(\tau)=S_1(\frac{\tau}{2})S_2(\tau)S_1(\frac{\tau}{2})=S_1(\frac{\tau}{2})S_2(\tau)[I-\frac{\tau}{2}\mathrm{A}_1+\frac{\tau^2}{8}\mathrm{A}_1^2+R_1^{(3)}(\frac{\tau}{2})]=$$

$$=S_1(\frac{\tau}{2})[S_2(\tau)-\frac{\tau}{2}S_2(\tau)\mathrm{A}_1+\frac{\tau^2}{8}S_2(\tau)\mathrm{A}_1^2+S_2(\tau)R_1^{(3)}(\frac{\tau}{2})]=$$

$$=S_1(\frac{\tau}{2})[I-\tau A_2+\frac{\tau^2}{2}\mathrm{A}_2^2+R_2^{(3)}(\tau)-\frac{\tau}{2}(I-\tau A_2+R_2^{(2)}))\mathrm{A}_1+\frac{\tau^2}{8}(I+R_2^{(1)}(\tau))\mathrm{A}_1^2+S_2(\tau)R_1^{(3)}(\frac{\tau}{2})]=$$

$$=S_1(\frac{\tau}{2})[I-\frac{\tau}{2}(2A_2+A_1)+\frac{\tau^2}{8}(4\mathrm{A}_2^2+4A_2A_1+\mathrm{A}_1^2)+$$

$$+R_2^{(3)}(\tau)-\frac{\tau}{2}R_2^{(2)})\mathrm{A}_1+\frac{\tau^2}{8}R_2^{(1)}(\tau)\mathrm{A}_1^2+S_2(\tau)R_1^{(3)}(\frac{\tau}{2})]=$$

$$=S_1(\frac{\tau}{2})-\frac{\tau}{2}S_1(\frac{\tau}{2})(2A_2+A_1)+\frac{\tau^2}{8}S_1(\frac{\tau}{2})(4\mathrm{A}_2^2+4A_2A_1+\mathrm{A}_1^2)+$$

$$+S_1(\frac{\tau}{2})(R_2^{(3)}(\tau)-\frac{\tau}{2}R_2^{(2)})\mathrm{A}_1+\frac{\tau^2}{8}R_2^{(1)}(\tau)\mathrm{A}_1^2+S_2(\tau)R_1^{(3)}(\frac{\tau}{2}))=$$

$$=I-\frac{\tau}{2}\mathrm{A}_1+\frac{\tau^2}{8}\mathrm{A}_1^2+R_1^{(3)}(\frac{\tau}{2})-\frac{\tau}{2}(I-\frac{\tau}{2}\mathrm{A}_1+R_1^{(2)}(\frac{\tau}{2}))(2A_2+A_1)+$$

$$+\frac{\tau^2}{8}(I+R_1^{(1)}(\frac{\tau}{2}))(4\mathrm{A}_2^2+4A_2A_1+\mathrm{A}_1^2)+$$

$$+S_1(\frac{\tau}{2})(R_2^{(3)}(\tau)-\frac{\tau}{2}R_2^{(2)})\mathrm{A}_1+\frac{\tau^2}{8}R_2^{(1)}(\tau)\mathrm{A}_1^2+S_2(\tau)R_1^{(3)}(\frac{\tau}{2}))=$$

$$=I-\tau(A_1+A_2)+\frac{\tau^2}{2}(\mathrm{A}_1^2+A_1A_2+A_2A_1+\mathrm{A}_2^2)+R_3(\tau)$$

სადაც

$$R_3(\tau)=\sum_{j=1}^{5}R_{3,j}(\tau) \tag{2.12}$$

$$R_{3,1}(\tau) = -\frac{\tau^3}{8}(3I - S_1(\frac{\tau}{2})S_2(\tau))(I + S_1(\frac{\tau}{2}))\mathrm{A}_1^3,$$

$$R_{3,2}(\tau) = -\frac{\tau^3}{4}(I + S_1(\frac{\tau}{2}))(\mathrm{A}_1^2\mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2^2),$$

$$R_{3,3}(\tau) = -\frac{\tau^3}{16}S_1(\frac{\tau}{2})(I + S_2(\tau))(2\mathrm{A}_2^2\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2\mathrm{A}_1^2,$$

$$R_{3,4}(\tau) = -\frac{\tau^3}{4}S_1(\frac{\tau}{2})\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1,$$

$$R_{3,5}(\tau) = -\frac{\tau^3}{8}S_1(\frac{\tau}{2})(I + S_2(\tau))\mathrm{A}_2^3.$$

ვინაიდან $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2$ da $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}_1^2 + \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_2\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2^2$, ამიტომ $V(\tau)$ მიიღებს შემდეგ სახეს

$$V(\tau) = I - \tau\mathrm{A} + \frac{\tau^2}{2}\mathrm{A}^2 + R_3(\tau). \tag{2.13}$$

(2.7) და (2.13) ფორმულების თანახმად გვაქვს

$$U(\tau) - V(\tau) = R^{(3)}(\tau) - R_3(\tau). \tag{2.14}$$

რომლებიც განისაზღვრება, შესაბამისად (2.8) და (2.12) ფორმულებით.

თეორემის ა) და ბ) პირობების თანახმად გვაქვს

$$\|U(\tau)\| \le Me^{\omega_0\tau}, \tag{2.15}$$

$$\|V(\tau)\| = \left\|S_1(\frac{\tau}{2})S_2(\tau)S_1(\frac{\tau}{2})\right\| \le e^{\omega_1\frac{\tau}{2}}e^{\omega_1\tau}e^{\omega_1\frac{\tau}{2}} \le e^{2\omega_1\tau}. \tag{2.16}$$

თუ (2.6)-ში გადავალთ ნორმებზე და გავითვალისწინებთ (2.14), მივიღებთ

$$\left\|\left[(U(\tau))^k - (V(\tau))^k\right]\varphi\right\| \le \sum_{i=1}^{k}\left\|(V(\tau))^{k-i}\right\|\left\|[R^{(3)}(\tau) - R_3(\tau)]U(t_{i-1})\varphi\right\|. \tag{2.17}$$

ცხადია უტოლობა

$$\left\|\left[R^3(\tau)-R_3(\tau)\right]U(t_{i-1})\varphi\right\| \le \sum_{j=1}^{5}\left\|R_{3,j}(\tau)U(t_{i-1})\varphi\right\| + \left\|R^{(3)}(\tau)U(t_{i-1})\varphi\right\|. \qquad (2.18)$$

(2.15) და (2.16) შეფასებებისა და თეორემა 2.1-ის გ) პირობის თანახმად გვაქვს

$$\left\|R_{3,1}(\tau)U(t_{i-1})\varphi\right\| \le \frac{\tau^3}{8}\left\|\left(3I - S_1\left(\frac{\tau}{2}\right)S_2(\tau)\right)\left(I + S_1\left(\frac{\tau}{2}\right)\right)\mathrm{A}_1^3 U(t_{i-1})\varphi\right\| \le$$

$$\le c\tau^3\left(3 - \left\|S_1\left(\frac{\tau}{2}\right)\right\|\left\|S_2(\tau)\right\|\right)\left(1 + \left\|S_1\left(\frac{\tau}{2}\right)\right\|\right)\left\|\mathrm{A}_0^3 U(t_{i-1})\varphi\right\| \le \qquad (2.19)$$

$$\le c\tau^3\left(3 + e^{\omega_1\frac{3\tau}{2}}\right)\left(1 + e^{\omega_1\frac{\tau}{2}}\right)e^{\omega_0 t_{i-1}}\left\|\mathrm{A}_0^3\varphi\right\| = c\tau^3 e^{\omega t_i}\left\|\mathrm{A}_0^3\varphi\right\|, \quad \varphi \in D(\mathrm{A}^3).$$

ანალოგიურად მიიღება შემდეგი შეფასებები

$$\left\|R_{3,j}(\tau)U(t_{i-1})\varphi\right\| \le c\tau^3 e^{\omega t_i}\left\|\mathrm{A}_0^3\varphi\right\|, \quad \varphi \in D(\mathrm{A}^3), \quad j = 2,3,4,5. \qquad (2.20)$$

$$\left\|R^{(3)}(\tau)U(t_{i-1})\varphi\right\| \le \int_0^{\tau}\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}\left\|U(s)\right\|\left\|\mathrm{A}^3 U(t_{i-1})\varphi\right\| ds\, ds_2\, ds_1 \le$$

$$\le c\tau^3 e^{\omega_0 t_i}\left\|\mathrm{A}^3\varphi\right\|, \quad \varphi \in D(\mathrm{A}^3).$$

რადგან მართებულია წარმოდგენა

$$A^3(A-\lambda_0 I)^{-3} = (A(A-\lambda_0 I)^{-1})^3 = (I + \lambda_0(A-\lambda_0 I)^{-1})^3,$$

ამიტომ გვაქვს

$$\left\|R^{(3)}(\tau)U(t_{i-1})\varphi\right\| \le c\tau^3 e^{\omega t_i}\left\|\mathrm{A}_0^3\varphi\right\|, \quad \varphi \in D(\mathrm{A}^3). \qquad (2.21)$$

(2.18)-დან (2.19),(2.20) და (2.21) შეფასებების გათვალისწინებით მიიღება:

$$\left\|\left[R^{(3)}(\tau)-R_3(\tau)\right]U(t_{i-1})\varphi\right\| \le c\tau^3 e^{\omega t_i}\left\|\mathrm{A}_0^3\varphi\right\|, \quad \varphi \in D(\mathrm{A}^3) \qquad (2.22)$$

(2.17) –დან (2.16) და (2.22) შეფასებების თანახმად მიიღება შემდეგი შეფასება

$$\left\|\left[(U(\tau))^k-(V(\tau))^k\right]\varphi\right\|\le ce^{\omega t_k}\left\|\mathrm{A}_0^3\varphi\right\|\sum_{i=1}^{k}\tau^3=c\tau^3e^{\omega t_i}\left\|\mathrm{A}_0^3\varphi\right\|,\quad \varphi\in D(\mathrm{A}^3)\,, \tag{2.23}$$

ამ უტოლობის თანახმად გვაქვს

$$\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left\|[(U(\tau))^{k-i}-(V(\tau))^{k-i}]U(t_i-s)f(s)\right\|ds\le$$

$$\le c\tau^2\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}t_{k-i}e^{\omega t_{k-i}}\left\|A_0^3U(t_i-s)f(s)\right\|ds\le$$

$$\le c\tau^2\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}t_{k-i}e^{\omega t_{k-i}}e^{\omega(t_k-s)}\left\|A_0^3f(s)\right\|ds=$$

$$=c\tau^2\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}t_{k-i}e^{\omega(t_k-s)}\left\|A_0^3f(s)\right\|ds\le c\tau^2\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_k-s)e^{\omega(t_k-s)}\left\|A_0^3f(s)\right\|ds=$$

$$=c\tau^2\int_{0_1}^{t_k}(t_k-s)e^{\omega(t_k-s)}\left\|A_0^3f(s)\right\|ds.$$

ამრიგად მივიღეთ შემდეგი შეფასება

$$\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left\|[(U(\tau))^{k-i}-(V(\tau))^{k-i}]U(t_i-s)f(s)\right\|ds\le c\tau^2\int_{0_1}^{t_k}(t_k-s)e^{\omega(t_k-s)}\left\|A_0^3f(s)\right\|ds. \tag{2.24}$$

შევაფასოთ სხვაობა $L(\tau)-U(\frac{\tau}{2})$

მართებულია ფორმულა

$$L_i(\tau)=I-\frac{\tau}{2}\mathrm{A}_i+\frac{\tau^2}{4}\mathrm{A}_i^2L_i(\tau), \tag{2.25}$$

ამ ფორმულისა და (2.9),(2.11) ფორმულების თანახმად გვაქვს

$$L(\tau)=\sigma_0 S_1\left(\frac{\tau}{2}\right)S_2(\tau)L_1\left(\frac{\tau}{2}\right)+(1-(\sigma_0+\sigma_1))S_1\left(\frac{\tau}{2}\right)L_2(\tau)+\sigma_1 L_1\left(\frac{\tau}{2}\right)=$$

$$=\sigma_0 S_1\left(\frac{\tau}{2}\right)S_2(\tau)(I-\frac{\tau}{4}\mathrm{A}_1+\frac{\tau^2}{16}L_1(\frac{\tau}{2})\mathrm{A}_1^2)+(1-(\sigma_0+\sigma_1))S_1\left(\frac{\tau}{2}\right)L_2(\tau)+\sigma_1 L_1\left(\frac{\tau}{2}\right)=$$

$$=\sigma_0 S_1\left(\frac{\tau}{2}\right)(S_2(\tau)-\frac{\tau}{4}S_2(\tau)\mathrm{A}_1+\frac{\tau^2}{16}S_2(\tau)L_1(\frac{\tau}{2})\mathrm{A}_1^2)+(1-(\sigma_0+\sigma_1))S_1\left(\frac{\tau}{2}\right)L_2(\tau)+\sigma_1 L_1\left(\frac{\tau}{2}\right)=$$

$$=\sigma_0 S_1\left(\frac{\tau}{2}\right)\left[I-\tau A_2+R_2^{(2)}(\tau)-\frac{\tau}{4}(I+R_2^{(1)}(\tau))\mathrm{A}_1+\frac{\tau^2}{16}S_2(\tau)L_1(\frac{\tau}{2})\mathrm{A}_1^2\right]+$$

$$+(1-(\sigma_0+\sigma_1))S_1\left(\frac{\tau}{2}\right)(I-\frac{\tau}{2}\mathrm{A}_2+\frac{\tau^2}{4}\mathrm{A}_2^2L_2(\tau))+\sigma_1 L_1\left(\frac{\tau}{2}\right)=$$

$$=\sigma_0 S_1\left(\frac{\tau}{2}\right)\left[I-\tau A_2+R_2^{(2)}(\tau)-\frac{\tau}{4}(I+R_2^{(1)}(\tau))\mathrm{A}_1+\frac{\tau^2}{16}S_2(\tau)L_1(\frac{\tau}{2})\mathrm{A}_1^2\right]+$$

$$+(1-(\sigma_0+\sigma_1))S_1\left(\frac{\tau}{2}\right)(I-\frac{\tau}{2}\mathrm{A}_2+\frac{\tau^2}{4}\mathrm{A}_2^2L_2(\tau))+\sigma_1 L_1\left(\frac{\tau}{2}\right)=$$

$$=\sigma_0\left[S_1\left(\frac{\tau}{2}\right)-\tau S_1\left(\frac{\tau}{2}\right)A_2+S_1\left(\frac{\tau}{2}\right)R_2^{(2)}(\tau)-\frac{\tau}{4}S_1\left(\frac{\tau}{2}\right)(I+R_2^{(1)}(\tau))\mathrm{A}_1+\frac{\tau^2}{16}S_1\left(\frac{\tau}{2}\right)S_2(\tau)L_1(\frac{\tau}{2})\mathrm{A}_1^2\right]+$$

$$+(1-(\sigma_0+\sigma_1))(S_1\left(\frac{\tau}{2}\right)-\frac{\tau}{2}S_1\left(\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{A}_2+\frac{\tau^2}{4}S_1\left(\frac{\tau}{2}\right)L_2(\tau)\mathrm{A}_2^2)+\sigma_1 L_1\left(\frac{\tau}{2}\right)=$$

$$=\sigma_0[I-\frac{\tau}{2}A_1+R_1^{(2)}\left(\frac{\tau}{2}\right)-\tau(I+R_1^{(1)}\left(\frac{\tau}{2}\right))A_2-\frac{\tau}{4}(I+R_1^{(2)}\left(\frac{\tau}{2}\right))A_1-$$

$$-\frac{\tau}{4}S_1\left(\frac{\tau}{2}\right)(I+R_2^{(1)}(\tau))\mathrm{A}_1+S_1\left(\frac{\tau}{2}\right)R_2^{(2)}(\tau)+\frac{\tau^2}{16}S_1\left(\frac{\tau}{2}\right)S_2(\tau)L_1(\frac{\tau}{2})A_1^2]+$$

$$+(1-(\sigma_0+\sigma_1))(I-\frac{\tau}{2}A_1+R_1^{(2)}\left(\frac{\tau}{2}\right)-\frac{\tau}{2}(I+R_1^{(2)}\left(\frac{\tau}{2}\right))\mathrm{A}_2+\frac{\tau^2}{4}S_1\left(\frac{\tau}{2}\right)L_2(\tau)\mathrm{A}_2^2)+$$

$$+\sigma_1\left(I-\frac{\tau}{4}\mathrm{A}_1+\frac{\tau^2}{16}L_1(\frac{\tau}{2})A_1^2\right)=$$

$$=I-\tau(\frac{1}{4}\sigma_0-\frac{1}{4}\sigma_1+\frac{1}{2})A_1-\tau(\frac{1}{2}\sigma_0-\frac{1}{2}\sigma_1+\frac{1}{2})A_2+R_2(\tau),$$

სადაც

$$R_2(\tau)=\sum_{j=1}^{4}R_{2,j}(\tau), \tag{2.26}$$

$$R_{2,1}(\tau)=\frac{\tau^2}{16}\left(3I+3S_1(\frac{\tau}{2})+S_1(\frac{\tau}{2})S_2(\tau)L_1(\frac{\tau}{2})+L_1(\frac{\tau}{2})\right)A_1^2,$$

$$R_{2,2}(\tau)=\frac{\tau^2}{4}S_1(\frac{\tau}{2})\left(I+S_1(\frac{\tau}{2})+L_2(\tau)\right)A_2^2,$$

$$R_{2,3}(\tau)=\frac{3\tau^2}{8}\left(I+S_1(\frac{\tau}{2})\right)A_1A_2,\quad R_{2,4}(\tau)=\frac{\tau^2}{8}S_1(\frac{\tau}{2})\left(I+S_2(\tau)\right)A_2A_1.$$

ამრიგად, მივიღეთ

$$L(\tau)=I-\tau(\frac{1}{4}\sigma_0-\frac{1}{4}\sigma_1+\frac{1}{2})A_1-\tau(\frac{1}{2}\sigma_0-\frac{1}{2}\sigma_1+\frac{1}{2})A_2+R_2(\tau). \tag{2.27}$$

$U(\frac{\tau}{2})$ -თვის (1.7) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$U(\frac{\tau}{2})=I-\frac{\tau}{2}(\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2)+R^{(2)}(\frac{\tau}{2}), \tag{2.28}$$

სადაც

$$R^{(2)}(\frac{\tau}{2}) = A^2\int_0^{\tau}\int_0^{s_1}U(s)dsdt. \qquad (2.29)$$

(2.27) და (2.28) წარმოდგენების საფუძველზე ვასკვნით: იმისათვის, რომ $L(\tau)-U(\frac{\tau}{2})$ სხვაობა იყოს τ^2–ის რიგის აუცილებელია σ_0 და σ_1 დააკმაყოფილონ შემდეგი სისტემა

$$\frac{1}{4}\sigma_0 - \frac{1}{4}\sigma_1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{2}\sigma_0 - \frac{1}{2}\sigma_1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

აქედან გამომდიანრეობს,რომ $\sigma_0 = \sigma_1$.

ამრიგად, როცა $\sigma_0 = \sigma_1$, გვაქვს

$$L(\tau)-U(\frac{\tau}{2}) = R_2(\tau) - R^{(2)}(\frac{\tau}{2}),$$

სადაც $R_2(\tau)$ და $R^{(2)}(\frac{\tau}{2})$ შესაბამისად განისაზღვრება (2.26) და (2.29) ფორმულებით.

ცხადია უტოლობა

$$L(\tau)-U(\frac{\tau}{2}) \le \sum_{j=1}^{4}\left\|R_2(\tau)\varphi\right\| + \left\|R^{(2)}(\frac{\tau}{2})\varphi\right\|. \qquad (2.30)$$

თეორემის ბ) და გ) პირობების თანახმად გვაქვს

$$\left\|R_{2,1}(\tau)\varphi\right\| = \frac{\tau^2}{16}\left\|\left(3I + 3S_1(\frac{\tau}{2}) + S_1(\frac{\tau}{2})S_2(\tau)L_1(\frac{\tau}{2}) + L_1(\frac{\tau}{2})\right)A_1^2\varphi\right\| \le$$

$$\le c\tau^2 e^{2\omega_1\tau}\left\|\mathrm{A}_0^2\varphi\right\|, \quad \varphi \in D(\mathrm{A}^2). \qquad (2.31)$$

ანალოგიურად მიიღება შემდეგი შეფასებები

$$\left\| R_{2,j}(\tau)\varphi \right\| \le c\tau^2 e^{2\omega_1\tau} \left\| \mathrm{A}_0^2\varphi \right\|, \quad \varphi \in D(\mathrm{A}^3),\ j = 2,3,4, \tag{2.32}$$

$$\left\| R^{(2)}(\frac{\tau}{2})\varphi \right\| \le \left\| A^2 \int_0^{\frac{\tau}{2}} \int_0^{s_1} U(s)ds ds_1 \right\| \le c\tau^2 e^{\omega_0 \frac{\tau}{2}} \left\| A^2\varphi \right\| \le$$

$$\le c\tau^2 e^{\omega_0 \frac{\tau}{2}} \left\| \mathrm{A}_0^2\varphi \right\|, \quad \varphi \in D(\mathrm{A}^2). \tag{2.33}$$

(2.30)-დან (2.31) – (2.33) შეფასებების გათვალისწინებით მიიღება

$$\left\| (L(\tau) - U(\frac{\tau}{2}))\varphi \right\| \le c\tau^2 e^{\omega_0\tau} \left\| \mathrm{A}_0^2\varphi \right\|, \quad \varphi \in D(\mathrm{A}^2). \tag{2.34}$$

(2.5)-დან (2.23), (2.24), (1.26), (1.27), (2.34) da (2.16) შეფასებების გათვალისწინებით გამომდინარეობს (2.2) შეფასება. **თეორემა 2.1 დამტკიცებულია**■

2.2 გასაშუალოებული სიმეტრიული სქემა

(1.1) ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნისათვის გამოვიყენოთ დეკომპოზიციის შემდეგი გასაშუალოებული სიმეტრიული ნახევრადდისკრეტული სქემა:

$$\frac{v_k^{(1)} - v_{k-1}^{(1)}}{\tau} + \mathrm{A}_1 \frac{v_k^{(1)} + v_{k-1}^{(1)}}{2} = \sigma_0 f(t_{k-\frac{1}{2}}), \quad v_{k-1}^{(1)} = u_{k-1}, \quad u_0 = \varphi,$$

$$\frac{v_k^{(2)} - v_{k-1}^{(2)}}{\tau} + \mathrm{A}_2 \frac{v_k^{(2)} + v_{k-1}^{(2)}}{2} = (1-\sigma_0) f(t_{k-\frac{1}{2}}), \quad v_{k-1}^{(2)} = v_k^{(1)}, \tag{2.35}$$

$$\frac{w_k^{(1)} - w_{k-1}^{(1)}}{\tau} + \mathrm{A}_2 \frac{w_k^{(1)} + w_{k-1}^{(1)}}{2} = \sigma_1 f(t_{k-\frac{1}{2}}), \quad w_{k-1}^{(1)} = u_{k-1}, \quad u_0 = \varphi,$$

$$\frac{w_k^{(2)} - w_{k-1}^{(2)}}{\tau} + \mathrm{A}_1 \frac{w_k^{(2)} + w_{k-1}^{(2)}}{2} = (1-\sigma_1) f(t_{k-\frac{1}{2}}), \quad w_{k-1}^{(2)} = w_k^{(1)}, \tag{2.36}$$

$$u_k = \frac{1}{2}(v_k^{(2)} + w_k^{(2)}). \tag{2.37}$$

(2.35) – (2.37) სქემა წარმოადგენს (1.49) - (1.51) დეკომპოზიციის დიფერენციალური სქემის სხვაობიან ანალოგს.

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას

თეორემა 2.2. ვთქვათ სრულდება თეორემა 2.1-ის პირობები და $\sigma_1 = 1 - \sigma_0$, მაშინ (2.35)-(2.37) სქემის ცდომილებისათვის მართებულია შეფასება

$$\left\|u(t_k) - u_k(t_k)\right\| \le c\tau^2 [e^{\omega t_k} \left(t_k \left\|\mathrm{A}_0^3 \varphi\right\| + \int_0^{t_k} \left\|\mathrm{A}_0 f'(t)\right\| dt + \tau \sum_{i=1}^{k} \left(\left\|\mathrm{A}_0^2 f(t_{i-\frac{1}{2}})\right\| + \left\|\mathrm{A}_0 f(t_{i-\frac{1}{2}})\right\| \right) + t_k \right) +$$

$$+ \int_0^{t_k} (t_k - s) e^{\omega(t_k - s)} \left\|\mathrm{A}_0^3 f(s)\right\| ds, \tag{2.38}$$

სადაც $\omega = \max(\omega_0\ , 2\omega_1)$, $c = const > 0$.

დამტკიცება. (2.35) და (2.36)-დან შესაბამისად მიიღება

$$v_k^{(2)} = S_2(\tau) S_1(\tau) v_{k-1}^{(2)} + \tau\sigma_0 S_2(\tau) L_1(\tau) f(t_{k-\frac{1}{2}}) + \tau(1 - \sigma_0) L_2(\tau) f(t_{k-\frac{1}{2}}),$$

$$w_k^{(2)} = S_1(\tau) S_2(\tau) w_{k-1}^{(2)} + \tau\sigma_1 S_1(\tau) L_2(\tau) f(t_{k-\frac{1}{2}}) + \tau(1 - \sigma_1) L_1(\tau) f(t_{k-\frac{1}{2}}),$$

სადაც

$$S_i(\tau) = (I - \frac{\tau}{2} A_i)(I + \frac{\tau}{2} A_i)^{-1}, \quad L_i(\tau) = (I + \frac{\tau}{2} A_i)^{-1}, \quad i = 1,2.$$

აქედან (2.37)-ის თანახმად გვაქვს

$$u_k = V(\tau) u_{k-1} + \tau L(\tau) f(t_{k-\frac{1}{2}}).$$

სადაც

$$V(\tau) = \frac{1}{2}(S_2(\tau) S_1(\tau) + S_1(\tau) S_2(\tau)),$$

და

$$L(\tau)=\frac{1}{2}(\sigma_0 S_2(\tau)L_1(\tau)+\sigma_1 S_1(\tau))L_2(\tau)+(1-\sigma_0)L_2(\tau)+(1-\sigma_1)L_1(\tau).$$

(2.39)-დან ინდუქციით მიიღება

$$u_k=(V(\tau))^k\varphi+\tau\sum_{i=1}^{k}(V(\tau))^{k-i}L(\tau)f(t_{i-\frac{1}{2}}). \tag{2.40}$$

(2.40) და (1.35) –ფორმულების თანახმად მიიღება

$$u(t_k)-u_k=\left[(U(\tau))^k-(V(\tau))^k\right]\varphi+\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(U(\tau))^{k-i}U(t_i-s)f(s)ds-$$

$$-\sum_{i=1}^{k}(V(\tau))^{k-i}L(\tau)f(t_{i-\frac{1}{2}})ds.$$

მარჯვენა მხარეს მივცეთ შემდეგი სახე

$$u(t_k)-u_k=\left[(U(\tau))^k-(V(\tau))^k\right]\varphi+\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}[(U(\tau))^{k-i}-(V(\tau))^{k-i}]U(t_i-s)f(s)ds-$$

$$\sum_{i=1}^{k}(V(\tau))^{k-i}[\tau(L(\tau)-U(\frac{\tau}{2}))f(t_{i-\frac{1}{2}})+U(\frac{\tau}{2})(\tau f(t_{i-\frac{1}{2}})-\int_{t_{i-1}}^{t_i}f(s)ds)+$$

$$+\int_{t_{i-1}}^{t_i}U(\frac{\tau}{2})f(s)ds-\int_{t_{i-1}}^{t_i}U(t_i-s)f(s)ds]. \tag{2.41}$$

მართებულია უტოლობა

$$\left\|\left[(U(\tau))^k-(V(\tau))^k\right]\varphi\right\|\leq c\tau^2 t_k e^{\omega t_k}\left\|\mathrm{A}_0^3\varphi\right\|. \tag{2.42}$$

ეს უტოლობა მტკიცდება (2.23) უტოლობის ანალოგიურად. შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში (2.9)-(2.11) ფორმულების თანახმად მიიღება

$$V(\tau)=\frac{1}{2}\left[S_1(\tau)S_2(\tau)+S_2(\tau)S_1(\tau)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[S_1(\tau)(I-\tau\mathrm{A}_2\frac{\tau^2}{2}\mathrm{A}_2^2+R_2^{(3)}(\tau))+S_2(\tau)(I-\tau\mathrm{A}_1+\frac{\tau^2}{2}\mathrm{A}_1^2+R_1^{(3)}(\tau))\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[S_1(\tau)-\tau S_1(\tau)\mathrm{A}_2+\frac{\tau^2}{2}S_1(\tau)\mathrm{A}_2^2+S_1(\tau)R_2^{(3)}(\tau))+S_2(\tau)-\tau S_2(\tau)\mathrm{A}_1+\frac{\tau^2}{2}S_2(\tau)\mathrm{A}_1^2+S_2(\tau)R_1^{(3)}(\tau))\right]=$$

$$=\frac{1}{2}[I-\tau A_1+\frac{\tau^2}{2}\mathrm{A}_1^2+R_1^{(3)}(\tau)-\tau(I-\tau A_1+R_1^{(2)}(\tau))\mathrm{A}_2+\frac{\tau^2}{2}(I+R_1^{(1)}(\tau))\mathrm{A}_2^2+S_1(\tau)R_2^{(3)}(\tau)$$

$$+I-\tau A_2+\frac{\tau^2}{2}\mathrm{A}_2^2+R_2^{(3)}(\tau)-\tau(I-\tau A_2+R_2^{(2)}(\tau))\mathrm{A}_1+\frac{\tau^2}{2}(R_2^{(1)}(\tau))\mathrm{A}_1^2+S_2(\tau)R_1^{(3)}(\tau)=$$

$$=I-\tau(A_1+A_2)+\frac{\tau^2}{2}(\mathrm{A}_1^2+\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2+\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2^2)+R_3(\tau),$$

სადაც $R_3(\tau)$ ნაშთითი წევრი არის $O(\tau^3)$–ის რიგის.

შევაფასოთ სხვაობა $L(\tau)-U(\frac{\tau}{2})$.

(2.25) და (2.9)- (2.11) ფორმულების თანახმად გვაქვს

$$L(\tau)=\frac{1}{2}[\sigma_0 S_2(\tau)L_1(\tau)+\sigma_1 S_1(\tau)L_2(\tau)+(1-\sigma_0)L_2(\tau)+(1-\sigma_1)L_1(\tau)]=$$

$$=\frac{1}{2}[\sigma_0 S_2(\tau)\left(I-\frac{\tau}{2}\mathrm{A}_1+\frac{\tau^2}{4}\mathrm{A}_1^2L_1(\tau)\right)+\sigma_1 S_1(\tau)\left(I-\frac{\tau}{2}\mathrm{A}_2+\frac{\tau^2}{4}\mathrm{A}_2^2L_2(\tau)\right)+$$

$$+(1-\sigma_0)\left(I-\frac{\tau}{2}\mathrm{A}_2+\frac{\tau^2}{4}\mathrm{A}_2^2L_2(\tau)\right)+(1-\sigma_1)\left(I-\frac{\tau}{2}\mathrm{A}_1+\frac{\tau^2}{4}\mathrm{A}_1^2L_1(\tau)\right)]=$$

$$=\frac{1}{2}[\sigma_0\left(S_2(\tau)-\frac{\tau}{2}S_2(\tau)\mathrm{A}_1+\frac{\tau^2}{4}S_2(\tau)\mathrm{A}_1^2L_1(\tau)\right)+\sigma_1\left(S_1(\tau)-\frac{\tau}{2}S_1(\tau)\mathrm{A}_1+\frac{\tau^2}{4}S_1(\tau)\mathrm{A}_1^2L_1(\tau)\right)+$$

$$+(1-\sigma_0)\left(I-\frac{\tau}{2}\mathrm{A}_2+\frac{\tau^2}{4}\mathrm{A}_2^2L_2(\tau)\right)+(1-\sigma_1)\left(I-\frac{\tau}{2}\mathrm{A}_1+\frac{\tau^2}{4}\mathrm{A}_1^2L_1(\tau)\right)]$$

$$=\frac{1}{2}[\sigma_0\left(I-\tau A_2+R_2^{(2)}(\tau)-\frac{\tau}{2}(I+R_2^{(1)}(\tau))\mathrm{A}_1+\frac{\tau^2}{4}S_2(\tau)\mathrm{A}_1^2L_1(\tau)\right)+$$

$$+\sigma_1\left(I-\tau A_1+R_1^{(2)}(\tau)-\frac{\tau}{2}(I+R_1^{(1)}(\tau))\mathrm{A}_2+\frac{\tau^2}{4}S_1(\tau)\mathrm{A}_2^2L_2(\tau)\right)+$$

$$+(1-\sigma_0)\left(I-\frac{\tau}{2}\mathrm{A}_2+\frac{\tau^2}{4}\mathrm{A}_2^2L_2(\tau)\right)+(1-\sigma_1)\left(I-\frac{\tau}{2}\mathrm{A}_1+\frac{\tau^2}{4}\mathrm{A}_1^2L_1(\tau)\right)]=$$

$$=I-\frac{\tau}{2}(\frac{1}{2}\sigma_0-\sigma_1+\frac{1}{2}(1-\sigma_1))\mathrm{A}_1+\frac{\tau}{2}(\sigma_0-\frac{1}{2}\sigma_1+\frac{1}{2}(1-\sigma_0))\mathrm{A}_2+R_2(\tau),$$

სადაც

$$R_2(\tau)=\sum_{j=1}^{6}R_{2,j}(\tau),$$

$$R_{2,1}(\tau)=\frac{\tau^2}{8}(\sigma_0S_2(\tau)L_1(\tau)+(1-\sigma_1)L_1(\tau)\mathrm{A}_1^2,$$

$$R_{2,2}(\tau)=\frac{\tau^2}{8}(\sigma_1S_1(\tau)L_2(\tau)+(1-\sigma_0)L_2(\tau)\mathrm{A}_2^2,$$

$$R_{2,3}(\tau)=-\frac{\tau}{4}\sigma_0R_2^{(1)}(\tau)\mathrm{A}_1,\quad R_{2,4}(\tau)=-\frac{\tau}{4}\sigma_1R_1^{(1)}(\tau)\mathrm{A}_2,$$

$$R_{2,5}(\tau)=\frac{1}{2}\sigma_0R_2^{(2)}(\tau),\quad R_{2,6}(\tau)=\frac{1}{2}\sigma_1R_1^{(2)}(\tau).$$

ამრიგად, მივიღეთ

$$\begin{aligned}L(\tau)=I-\frac{\tau}{2}(\frac{1}{2}\sigma_0-\sigma_1+\frac{1}{2}(1-\sigma_1))\mathrm{A}_1+\\+\frac{\tau}{2}(\sigma_0-\frac{1}{2}\sigma_1+\frac{1}{2}(1-\sigma_0))\mathrm{A}_2+R_2(\tau),\end{aligned}\tag{2.44}$$

$U(\frac{\tau}{2})$-თვის (1.7) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$U(\frac{\tau}{2}) = I - \frac{\tau}{2}(\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2) + R^{(2)}(\frac{\tau}{2}). \qquad (2.45)$$

(2.44) და (2.45) ტოლობების საფუძველზე ვასკვნით: იმისათვის, რომ $U(\frac{\tau}{2}) - L(\tau)$ სხვაობა იყოს τ^2–ის რიგის აუცილებელია σ_0 და σ_1 აკმაყოფილებდნენ შემდეგ სისტემას

$$\frac{1}{2}\sigma_0 + \sigma_1 + \frac{1}{2}(1-\sigma_1) = 1,$$
$$\sigma_0 + \frac{1}{2}\sigma_1 + \frac{1}{2}(1-\sigma_0) = 1.$$

აქედან გამომდინარეობს $\sigma_1 = 1 - \sigma_0$. ამრიგად, როცა $\sigma_1 = 1 - \sigma_0$, გვაქვს

$$U(\frac{\tau}{2}) - L(\tau) = R_2(\tau) - R^{(2)}(\frac{\tau}{2}),$$

სადაც $R_2(\tau)$ და $R^{(2)}(\frac{\tau}{2})$ შესაბამისად განისაზღვრება (2.43) და (1.7) ფორმულებთ.

ცხადია უტოლობა

$$\left\| (L(\tau) - U(\frac{\tau}{2}))\varphi \right\| \le \le \sum_{j=1}^{6} \left\| R_{2,j}(\tau)\varphi \right\| + \left\| R^{(2)}(\frac{\tau}{2})\varphi \right\|. \qquad (2.46)$$

თეორემა 2.1-ის ბ) და გ) პირობების თანახმად გვაქვს

$$\left\| R_{2,j}(\tau)\varphi \right\| \le c\tau^2 e^{2\omega_1\tau} \left\| \mathrm{A}_0^2\varphi \right\|, \quad \varphi \in D(\mathrm{A}^3), \quad j = 1,...,6. \qquad (2.47)$$

$$\left\| R^{(2)}(\frac{\tau}{2})\varphi \right\| \le c\tau^2 e^{\omega_0\frac{\tau}{2}} \left\| \mathrm{A}_0^2\varphi \right\|, \quad \varphi \in D(\mathrm{A}^2). \qquad (2.48)$$

(2.46)-დან (2.47), (2.48) შეფასებების გათვალისწინებით მიიღება

$$\left\| (L(\tau) - U(\frac{\tau}{2}))\varphi \right\| \le c\tau^2 e^{\omega\,\tau} \left\| \mathrm{A}_0^2\varphi \right\|, \quad \varphi \in D(\mathrm{A}^2).$$

(2.49)

თეორემის ბ) პირობის თანახმად გვაქვს

$$\|V(\tau)\| = \frac{1}{2}\|[S_1(\tau)S_2(\tau) + S_2(\tau)S_1(\tau)]\| \le e^{2\omega_1\tau}. \tag{2.50}$$

(2.41)-დან (2.42), (2.24), (1.26), (1.27), (2.49) და (2.50) შეფასებების გათვალისწინებით გამომდინარეობს (2.38) შეფასება.

თეორემა 2.2 დამკიცებულია ■

თავი III. მიმდევრობითი ტიპის დეკომპოზიციის სქემა ევოლუციური განტოლებისათვის ლიფშიცის უწყვეტი ოპერატორით

3.1 სიმეტრიული დეკომპოზიციის სქემა

განვიხილოთ X ბანახის სივრცეში კოშის ამოცანა

$$u'(t) + Au(t) + M(u(t)) = f(t), \qquad u(0) = \varphi, \quad t > 0, \tag{3.1}$$

სადაც A არის წრფივი, მკვრივად განსაზღვრული, ჩაკეტილი ოპერატორი X ბანახის სივრცეში, რომელიც წარმოდგება შემდეგი სახით: $A = A_1 + A_2$; A_1 და A_2 ასევე წრფივი, მკვრივად განსაზღვრული, ჩაკეტილი ოპერატორებია X-ში. M კი წარმოადგენს არაწრფივ ოპერატორს ლიფშიცის პირობით

$$\|M(u(t)) - M(v(t))\| \le c_0 \|u(t) - v(t)\|.$$

(3.1) ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნისათვის გამოვიყენოთ დეკომპოზიციის შემდეგი სხვაობიანი სქემა

$$\frac{u_k^{(1)} - u_{k-1}^{(1)}}{\tau} + \frac{1}{2}A_1\frac{u_k^{(1)} + u_{k-1}^{(1)}}{2} = 0, \qquad u_{k-1}^{(1)} = u_{k-1}, \quad u_0 = \varphi,$$

$$\frac{u_k^{(2)} - u_{k-1}^{(2)}}{\tau} + A_2\frac{u_k^{(2)} + u_{k-1}^{(2)}}{2} = f(t_{k-\frac{1}{2}}) + \frac{M(u_k^{(2)}) + M(u_{k-1}^{(2)})}{2}, \quad u_{k-1}^{(2)} = u_k^{(1)},$$

$$\frac{u_k^{(3)} - u_{k-1}^{(3)}}{\tau} + \frac{1}{2}A_1\frac{u_k^{(3)} + u_{k-1}^{(3)}}{2} = 0, \quad u_{k-1}^{(3)} = u_k^{(2)}. \tag{3.2}$$

მიახლოებით ამოხსნად $t = t_k = k\tau$ წერტილში ვაცხადებთ: $u_k = u_k^{(3)}$.

ვაჩვენოთ, რომ (3.2) სქემაში შემავალი მეორე არაწრფივი განტოლებისათვის ადგილი აქვს კრებადობას. შესაბამისად, გადავწეროთ მეორე განტოლება შემდეგი სახით;

$$u_k^{(2)} + \frac{\tau}{2} A_2 u_k^{(2)} = g_{k-1} + \frac{\tau}{2} M(u_k^{(2)}),$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა $u_k^{(2)} = v_k$, გვაქვს:

და

$$v_k^{s-1} + \frac{\tau}{2} A_2 v_k^{s-1} = g_{k-1} + \frac{\tau}{2} M(v_k^{s-2}). \tag{3.4}$$

თუ (3.3) განტოლებას გამოვაკლებთ (3.4)-ს, მივიღებთ

$$(v_k^s - v_k^{s-1}) + \frac{\tau}{2} A_2 (v_k^s - v_k^{s-1}) = -\frac{\tau}{2}(M(v_k^{s-1}) - M(v_k^{s-2})), \tag{3.5}$$

(3.5) ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ სკლარულად $(v_k^s - v_k^{s-1})$-ზე

$$\left\|v_k^s - v_k^{s-1}\right\|^2 + \frac{\tau}{2}(A_2(v_k^s - v_k^{s-1}), (v_k^s - v_k^{s-1})) = \frac{\tau}{2}((M(v_k^{s-1}) - M(v_k^{s-2})), (v_k^s - v_k^{s-1})), \tag{3.6}$$

პირობის თანხამად, რადგან A ოპერატორი არის თვითშეუღლებული და დადებითად განსაზღვრული

$$(A_2(\overset{(s)}{v_k} - \overset{(s-1)}{v_k}), (\overset{(s)}{v_k} - \overset{(s-1)}{v_k})) \geq \alpha \left\|\overset{(s)}{v_k} - \overset{(s-1)}{v_k}\right\|^2, \qquad \alpha > 0. \tag{3.7}$$

თუ (3.6)-ის მარცხენა მხარეში გამოვიყენებთ კოში-შვარცის უტოლობას, ამასთან გავითვალისწინებთ (3.7) უტოლობას, მივიღებთ:

$$\left(1 + \alpha \frac{\tau}{2}\right) \left\|v_k^s - v_k^{s-1}\right\|^2 \leq \frac{\tau}{2} \left\|M(v_k^{s-1}) - M(v_k^{s-2})\right\| \cdot \left\|v_k^s - v_k^{s-1}\right\|, \tag{3.8}$$

(2.8)-ში ტოლობის ორივე მხარე გავყოთ $\left\|v_k^s - v_k^{s-1}\right\|$-ზე და ამასთან გათვალისწინებთ, რომ $M(\cdot)$ არაწრფივი ოპერატორი აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას, გვაქვს:

$$\left\|v_k^s - v_k^{s-1}\right\| \leq (c_1 \tau) \left\|v_k^{s-1} - v_k^{s-2}\right\|, \qquad c_1 = c_0 \left(1 + \alpha \frac{\tau}{2}\right). \tag{3.9}$$

თუ მოვითხოვთ, რომ $c_1\tau < 1$, მაშინ (2.58) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ v_k^s მიმდევრობა კრებადია(განხილული იტერაცია არის კუმშვითი ასახვა). ამრიგად, (3.3) იტერაცია კრებადია გეომეტრიული პროგრესიის სიჩქარით , q = $c_1\tau$.

3.2 დეკომპოზიციის სქემის აგება ამომხსნელი ოპერატორის აპროქსიმაციით

ცხადია, (3.1) ამოცანის ამონახსნისათვის მართებულია ფორმულა

$$u(t) = U(t - t_{k-1})u(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t} U(t-s)(f(s) - M(u(s)))ds \qquad (3.10)$$

თუ (3.10)-ში ჩავსვამთ $t = t_k$, მივიღებთ

$$u(t_k) = U(\tau)u(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} U(t_k - s)(f(s) - M(u(s)))ds \qquad (3.11)$$

თუ (3.11) ტოლობის მარჯვენა მხარეში შემავალ ინტეგრალს შევცვლით ტრაპეციის ფორმულით მივიღებთ

$$u(t_k) = U(\tau)u(t_{k-1}) + \frac{\tau}{2}[U(\tau)(f(t_{k-1}) - M(u(t_{k-1})) + (f(t_k) - M(u(t_k))] + R_k(\tau), \qquad (3.12)$$

სადაც $R_k(\tau)$ არის ნაშთითი წევრი.

მარტივად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ მართებულია შეფასება(საკმარისად გლუვ კლასში)

$$\|R_k(\tau)\varphi\| = O(\tau^3), \qquad (3.13)$$

თუ (3.12)-ში გადავაგდებთ ნაშთით წევრს მივიღებთ

$$u_k = U(\tau)u_{k-1} + \frac{\tau}{2}[U(\tau)(f(t_{k-1}) - M(u_{k-1}) + (f(t_k) - M(u_k)] \qquad (3.14)$$

შეგვიძლია ვთქვათ, რომ (3.14) განტოლების u_k ამონახსნი წამორადგენს $u(t)$ ზუსტი ამონახსნის მიახლოებით მნიშვნელობას $t = t_k$ წერტილში, $u(t_k) \approx u_k$.

თუ $U(\tau)$ ოპერატორის აპროქსიმაციას მოვახდენთ (2.1) დეკომპოზიციის ამომხსნელი ოპერატორის საშუალებით, მაშინ (3.14)-იდან მივიღებთ შემდეგ დეკომპოზიციის სქემას

$$v_k = V(\tau)v_{k-1} + \frac{\tau}{2}[V(\tau)(f(t_{k-1}) - M(v_{k-1}) + (f(t_k) - M(v_k)] \qquad (3.15)$$

სადაც $V(\tau) = S_1(\frac{\tau}{2})S_2(\tau)S_1(\frac{\tau}{2})$.

(3.15) განტოლების v_k ამონახსნი გამოვაცხადოთ $u(t)$ ზუსტი ამონახსნის მიახლოებით მნიშვნელობად $t = t_k$ წერტილში, $u(t_k) \approx v_k$. (3.15) შეგვიძლია ამოვხსნათ შემდეგი იტერაციის გამოყენებით

$$v_k^{(s)} = V(\tau)v_{k-1} + \frac{\tau}{2}[V(\tau)(f(t_{k-1}) - M(v_{k-1}) + (f(t_k) - M(v_k^{(s-1)})] \qquad (3.16)$$

(3.16) იტერაციის კრებადობა მტკიცდება ისევე, როგორც წინა პუნქტში. შევაფასოთ მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილება $u(t_k) - v_k$. თუ (3.12) ტოლობას გამოვაკლებთ (3.15) ტოლობას წევრ-წევრად, მივიღებთ

$$z_k = V(\tau)z_{k-1} - \frac{\tau}{2}[V(\tau)(M(u(t_{k-1})) - M(v_{k-1})) + (M(u(t_{k-1})) - M(v_{k-1}))] + \tilde{R}_k(\tau) + R_k(\tau) \qquad (3.17)$$

სადაც $z_k = u(t_k) - v_k$ და $\tilde{R}_k(\tau) = (U(\tau) - V(\tau))[u(t_{k-1}) + \frac{\tau}{2}(f(t_{k-1}) - M(u(t_{k-1}))]$

ვთქვათ A, A_1 და A_2 თვითშეუღლებული, დადებითად განსაღვრული ოპერატორებია, მაშინ ცხადია მართბეულია შეფასება

$$\|V(\tau)\| \le 1 \qquad (3.18)$$

(2.14) წარმოდგენის თანახმად, ამოხსნათა გლუვ კლასზე, გვაქვს

$$\|\tilde{R}_k(\tau)\| \le c\tau^3 \qquad (3.19)$$

თუ (3.17) ტოლობაში გადავალთ ნორმებზე და გავითალისწინებთ (3.13), (3.18) და (3.19) შეფასებებს, $M(\cdot)$ არაწრფივი ოპერატორის ლიფშიც უწყვეტობის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\|z_k\| \leq (1+c\tau)\|z_{k-1}\| + c\tau^3$$

ცხადია აქედან გამომდინარეობს

$$\|z_k\| \leq (1+c\tau)^k (\|z_0\| + ct_k\tau^2).$$

ამით ვაჩვენეთ, რომ მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილება ყოველ სასრულ შუალედში არის $O(\tau^2)$.

დასკვნა

ცნობილია, რომ დეკომპოზიციის მეთოდი წარმოადგენს მათემატიკური ფიზიკის მრავალგანზომილებიანი ამოცანებისათვის ეკონომიური სქემების აგების ზოგად მეთოდს, რომელიც საშუალებას იძლევა მრავალგანზომილებიანი ამოცანების რედუცირება მოვახდინოთ ერთგანზომილებიანი ამოცანების სერიაზე, რომელთა რიცხვითი რეალიზაცია ცხადია გაცილებით უფრო ნაკლებ კომპიუტერულ რესურსს საჭიროებს. ამ მიმართულებით მუშაობა დაიწყო მეოცე საუკუნის სამოციანი წლებიდან და დღესაც ინტენსიურად მიმდინარეობს, რაზეც მეტყველებს ის შრომები, რომლებიც ქვეყნდება მსოფლიოს ცნობილ სამეცნიერო გამოცემებში. წარმოდგენილ სამაგისტრო ნაშრომში განხილული ოპერატორული გახლეჩის სქემები მიეკუთვნება დეკომპოზიციის სქემებს.

სამაგისტრო ნაშრომში განხილულია არაერთგვაროვანი აბსტრაქტული ევოლუციური განტოლებისათვის კოშის ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის გ. ბეიკერისა და თ. ოლიფანტის სიმეტრიული დიფერენციალური და სხვაობიანი დეკომპოზიციის სქემები. განხილულია აგრეთვე დ. გორდეზიანის გასაშუალოებული დიფერენციალური და სხვაობიანი დეკომპოზიციის სქემები. სხვაობიანი დეკომპოზიციის სქემები ორივე შემთხვევაში აგებულია კრანკ-ნიკოლსონის სქემის საფუძველზე.

ნახევარჯგუფის აპროქსიმაციის საფუძველზე, ტროტერისა და ჩერნოვის ტიპის ფორმულების საშუალებით, მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილებისათვის მიღებულია ცხადი აპრიორული შეფასებები. დამტკიცებულია, რომ კრებადობის რიგი დროითი ბიჯის მიხედვით არის ორის ტოლი.

წარმოდგენილ ნაშრომში განხილული სქემები მარჯვენა მხარის მიხედვით არის ორ პარამეტრიანი სქემათა ოჯახიდან. ნაპოვნია ამ პარამეტრებისთვის ის პირობები, რომელთათვისაც მიიღწევა დროითი ბიჯის მიმართ მეორე რიგის სიზუსტე.

გამოყენებული ლიტერატურა

[1] Гордезиани Д. Г., О численом решении некоторых задач термоупругости. - ИПМ им. У. Н. Векуа Тбилисского гоц. ун-та(препринт), 1979.-52 с.

[2] Гордезиани Д. Г., Меладзе Г.В., О моделировании многомерных квазилинейных уравнений параболического типа одномерными уравнениями. Сообш.АН ГССР, 1970, т. 60, 1 3, с. 537-540

[3] Гордезиани Д. Г., Меладзе Г.В., О моделировании третьей краевой задачи для могомерных параболических уравнений в произволной области одномерными уравнениями. ЖВМ у МФ, 1974, т,14 1.1, с. 246-250.

[4] Гордезиани Д. Г., Самарский А.А, Некаторые задачу термоупругости пластин и оболочек у метод суммарной аппроксимации. -В кн.:Комплексний анализ и его прелойения,- М.Наука, 1978, ц. 173-186.

[5] Иосида К., Фынкциональный анализ. -М.: Мир, 1976.

[6] Марчук Г. И., Методы расщепления. -М.: Наука, 1988, -264 с.

[7] Рогава Дж. л., об исследовании устоичивасти полудискретных цхем ц помощью оптогональных полиномоб Чебышева.- Сообщ АН ГССР, 1976, т. 83. 1 3, с. 545-548.

[8] Рогава Дж. л., Линейные многошаговые методы решения задачи Коши для абстрактного параболического уравнения у ассоцированные полиномы. -Труды ИПМ им. И.Н. Векуа, Тбилисского гос. университета,1992, т. 45, ц. 41-58.

[9] Рогава Дж. л., О погрешности формул типа Тротера в случае цамосопряженных операторов. - Функциональный анализ и его преложения, 1993, т.27, с. 84-86.

[10] Рогава Дж. л., Полудискретные схемы для операторов дифференциальных уравнении. - тбилиси, Уздательцтво Технического университета, 1995

[11] Самарский А.А., Теория пазностных цхем. -М.: Наука, 1997. - 656 с.

[12] Яненко Н.Н., Метод дробных шагов решения многомерных задач математичецкой физики. –Новосибирск: Наука, 1967. - 196 с.

[13] Baker G.A., Oliphant T.A. An implicit numerical method for solving the two-dimensional heat equation // Quart. Appl. Math. – 1960. -17. No 4.

[14] Baker G.A. an implicit numerical method for solving the n-dimensional heat equation // Quart. Appl. Math. – 1960. -17. No 4.

[15] Brezis h. and Pazy A., Semigroups of nonlinear contractions on convex sets. – J. Functional Anal. 6, 1970, p. 237-281.

[16] Brezis h. and Pazy A., Convergence and approximation of semigroups of nonlinear operators in Banach spaces. - J. Functional Anal. 9, 1972, p.63-74.

[17] Chernoff P.R., Note on product formulas for operator semigroups. - J. Functional Anal. 2, 1968, p.238-242.

[18] Chernoff P.R., Semigroups product formulas and addition of unbounded operators. –Bull. Amer. Math. Soc. 76, 1970, p. 395-398.

[19] Chernoff P.R., Product formulas, nonlinear semigroups and addition of unbounded operators. – Mem. Amer. Math. Soc. 140, 1974, p. 1-121.

[20] Chorin A.J., Hugues T.J.R., Mccracken M.F., Marsden J.E., Product formulas and numerical algorithms. –Commun. Pure Appl. Math. 31, 1978, p. 205-256.

[21] Dia B.O., Schatzman M., Estimations sur la formule de strang. – C.R. Acad. Sci. Paris, 1995, t. 320, Swrie I, p. 775 -779.

[22] Kato T., on the Trotter-Lie product formula, -Proc. Japan Acad. 50, 1978, p. 105-114.

[23] Kato T., Trotter's product formula for an arbitrary pair of self-adjoint contraction semigroups. – Topics in Functional analysis, Ad. Math. Suppl. Studies. I. Gohberg and M. Kac, Acad. Press, New-York, 3, 1978, p. 185-195.

[24] Kato t. and Masuda K., Trotter's product formula for nonlinear semigroups generated by the sub-differentials of convex functionals. –J. Math. Soc. Japan, 30, 1978, p. 169-178.

[25] Lapidus M.L., Generalization of the Trotter-Lie formula. –Integral equation and operator theory, vol. 4/3, 1981, p. 366-415.

[26] Lumer G., Applications de l'analuse non standard f l'approximation des semi-groupes d'eperateurs et aux equations d'evolution. –C. r. Acad. Sci. Swr. 1, 1989, 309, 1 3, p. 167-172.

[27] Reich S., Product formulas, nonlinear semigroups and accretive operators. –J Functional anal., 36, 1980, p. 147-168.

[28] Reich S., Convergence and approximation of nonlinear semigroups. –J. Math. Anal. Appl. 76, 1980, p. 77-83.

[29] Sheng Q., Solvieng lieaner partial differential equations by exponential splitting. – IMA J. Numer. Anal., 1989, 9, 1 2, p. 199-212.

[30] Temam R., sur la stabilite et la convergence de la methode des pas fractionnaires. –Annali de Mat. Pura ed Aool., 1968, p. 191-380.

[31] Tiemam R., Quaelques methods de decomposition en analise numerique. – Actes, Congres Inter. Math., 1970, 3, p. 311-319

[32] R. Galdava, J. Rogava, Explicit estimates for error of approximate solution of the symmetrical decomposition scheme for abstract parabolic equation, Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, 2006-2007, Vol. 32-33, pp. 38-57

[33] R. Galdava, J. Rogava, Explicit estimates for error of averaged decomposition scheme. Tbilisi, Proceedings of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, 2007, Vol. 57, pp. 21-33

[34] Като Т., Теория возмущений линейных опраторов. -М. Наука, 1972.- 740 с.