ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი მათემატიკის დეპარტამენტი

მარიამ მათეშვილი

ოთხნიშნა მულტიმოდალური ეპისტემიკური ლუკასევიჩის ლოგიკა კონსტანტებით

ნაშრომი შესრულებულიაგამოყენებითი მათემატიკის მეცნიერებათა მაგისტრის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: **რევაზ გრიგოლია**

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
თსუ ასოცირებული პროფესორი

თბილისი 2017

ოთხნიშნა მულტიმოდალური ეპისტემიკური ლუკასევიჩის ლოგიკა კონსტანტებით

აბსტრაქტი

ნაშრომში შემოღებულია ოთხნიშნა მულტიმოდალური ეპისტემიკური ლუკასევიჩის ლოგიკა კონსტანტებით $EŁ_4^c(n)$, რომელიც ოთხნიშნა ლუკასევიჩის ლოგიკის $Ł_4$ გაფართოვებაა, რომლის ენა გაფართოვებულია ნულარული და უნარული კავშირებით; ამავე დროს განვითარებულია ამ ლოგიკების შესაბამისი ალგებრული თეორია. უნარული კავშირები ინტერპრეტირებულია როგორც მოდალური ოპერატორები (ცოდნის ოპერატორები). ეს ლოგიკა განსაზღვრულია აქსიომატიკურად და დამტკიცებულია სისრული თეორემა შესაბამისი ალგებრათა მრავალსახეობის მიმართ. აღვნიშნოთ, რომ მოცემული ლოგიკა გამოიყენება იმუნური სისტემის შესწავლაში.

Four-valued multimodal epistemic Lukasiewicz logic with constants

The theory of four-valued multi modal epistemic Łukasiewicz logic with constants $EŁ_4^c(n)$, which is an extension of the four-valued Łukasiewicz logic $Ł_4$, the language of which is extended by nullary and unary connectives is developed in the work; at the same time it is developed algebraic theory corresponding to this logic. The unary connectives are interpreted as modal operators (knowledge operators). This logic is axiomatically defined and the completeness theorem with respect to the variety of corresponding algebras is given. Notice that this logic is applied in studying immune system.

სარჩევი

1. შესავალი

ჩვენ შემოგთავაზებთ ახალ ლოგიკურ სისტემას ბიოლოგიური სისტემის შესასწავლად. სისტემური ბიოლოგიის შესწავლის პირველი მცდელობა ლოგიკით (აქსიომატური ფორმალური სისტემა) ეკუთვნის ჰ. ვუდგერს [W]. მან შესთავაზა ბიოლოგიის განხილვა დამტკიცებების სიზუსტით და მსჯელობის საიმედოობით. აქვე უნდა აღინიშნოს ნ. რაშევსკი [Ra] და რ. როსენი [Ro1, Ro2]. ნ. რაშევსკიმ შექმნა რელევანტური ბიოლოგია, რომელიც ბიოლოგიის შესწავლას წარმოადგენს ბიოლოგიური სისტემის ნაწილებს შორის ურთიერთობისგან საზღვრის თვალსაზრისით. ამ ნაშრომში ჩვენ გავაანალიზეთ რეაგირების პროცესები, როდესაც ისინი წარმოდგენილია რელევანტური სისტემებით (კრიპკეს ჩარჩოები),ასეთ ბიოლოგიურ სისტემას წარმოადგენს იმუნური სისტემის მოდელები.

მრავალნიშნა სისტემებისა და ეპისტემიკური ლოგიკის უახლეს მიღწევებში იყენებენ კრიპკეს მოდელის სტრუქტურას ლოგიკის მოდელებისთვის [P]. ამ მოდელების ერთ-ერთი მარტივი ვერსიაა, ინტერპრეტირებული სისტემები და ლოგიკის $S5_n$- თან დაკავშირებული კრიპკეს სემანტიკა (n აგენტებთან ეპისტემური ლოგიკა).

ეს ნაშრომი არის[DGM] სტატიის გაგრძელება, სადაც წარმოდგენილია მულტიმოდალური ეპისტემური სამ-ნიშნა ლუკასევიჩის ლოგიკა $\boldsymbol{E\mathcal{L}_3(n)}$ რომელიც გამოიყენება რელაციური სისტემის (კრიპკეს ფრეიმის) ელემენტების შესაფასებლად, სადაც გამოყენებულია სამ-ნიშნა ლუკასეწიჩის ლოგიკა$\boldsymbol{\mathcal{L}_3}$. ჩვენ განვიხილავთ ახალ ლოგიკას მულტიმოდალური ეპისტემიკური ოთხი-ნიშნა ლუკასევიჩის $\boldsymbol{E\mathcal{L}_4^C(n)}$ ლოგიკას კონსტანტებით.$\boldsymbol{E\mathcal{L}_4^C(n)}$ ლოგიკა მიიღება ოთხინიშნა ლუკასევიჩის პროპოზიციულ $\boldsymbol{\mathcal{L}_4}$ლოგიკიდან ახალი კავშირების დამატებით: ნულარული კავშირები c_1 და c_2 ინტერპრეტაციულად, როგორც „ცოდნის ხარისხი $\frac{1}{3}$“ და „ცოდნის ხარისხი $\frac{2}{3}$„ და n ‘უნარული ცოდნის ოპერატორები (n ≥ 1), შესაბამისი აქსიომებით.

გაითვალისწინეთ, რომ ამ ლოგიკის შეზამისი ჭეშმარიტობის ფუნქციები განსაზღვრული ოთხი ელემენტიან სიმრავლეზე $\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\ 1\}$ ვღებულობთ ფუნქციების სრულ სისტემას, ე.ი. გამოვსახავთ ყველა ფუნქციებს შემდეგი ფუნქციების საშუალებით: $x \oplus y = \min(1, x + y)$, $x \odot y = \max(0, x + y - 1)$, $x^* = 1 - x$ და კონსტანტები $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$.

სხვა სიტყვებით, ჩვენ წარმოვადგენთ პოსტის ფუნქციებს.

ცოდნის ოპერატორების მოდელი წარმოადგენენ ცოდნის აგენტების იდეალურ ცოდნას, რომელთაც გააჩნიათ ფაქტობრივი (სინამდვილეში არსებული) ცოდნის თვისებები (ყველაფერი, რაც მათ იციან, ჭეშმარიტია), საეჭვო ცოდნა (ყველაფერი, რაც მათ იციან, თითქმის ჭეშმარიტია,პოზიტიური ანალიზით მიღებული (იციან,ის რაც იციან) და ნეგატიურ ანალიზით მიღებული (მათ იციან, რაც არ იციან) და ა.შ .. ცოდნის ოპერატორები იძლევიან შემდეგ ინტერპრეტაციას:

ცოდნის ოპერატორები ექვემდებარებიან შემდეგ ინტერპრეტაციას:

$\Box_i \alpha$–„აგენტმა i-იმ იცის წინადადება α“;

$\Diamond_i \alpha$-„აგენტმა i არ იცის, რომ წინადადება α მცდარია“.

დეტალური ინფორმაცია კლასიკურ და არაკლასიკურ მოდელის ლოგიკას შესახებ იხილეთ [BRV, BEGR, CR, CZ, F1, F2, HT, K, M, P, S]-ში.

ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ მულტიმოდალური ლუკასევიჩის ლოგიკა სრულდება დესკრიფციული კრიპკეს ფრეიმების საშუალებით და გამოიყენება იმუნური სისტემის წარმომადგენისთვის. T- უჯრედების სიმრავლე შეგვიძლია გავიგოთ, როგორც აგენტების სიმრავლე. უმრავლეს შემთხვევაში იმუნური სისტემა შავი ყუთია; მიუხედავად იმისა, რომ ბევრი მათგანის შესავალი და გამოსავალი ცნობილია, ზუსტად როგორ ასრულებს სისტემა თავის ფუნქციას მრავალი გამოძიების საგნია.

მულტიმოდალური ლოგიკა და შესაბამისი კრიპკეს მოდელის შემუშავება იდეალურია იმუნური სისტემის აღსაწერად ამ დონეზე: ისინი შეიძლება წარმოადგენდნენ ურთიერთქმედებების სისტემას (კომპონენტებს), სადაც კომპონენტებს შეიძლება ჰქონდეთ კომპლექსური, არადეტერმინისტული და ინდივიდუალური ქცევა. უფრო მეტიც,

მულტიმოდალური ლოგიკისა და კრიპკეს მოდელის გამოყენება იძლევა სხვადასხვა საკვლევი ტექნიკის ხელმისაწვდომობას, მათ შორის მოდელირებას, ლოგიკურ თვისებებზე გადამოწმებით.

აღვნიშნოთ, რომ თუ n = 1, მაშინ $\boldsymbol{E\mathcal{L}_4^C}(1)$ ემთხვევამონადიკურ პროპოზიციულ ლოგიკას [6], ე. ი. მონადიკური ოპერატორი გადაიქცევა კვანტორად. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, მონადიკური პროპოზიციული ლოგიკა უკავშირდება პირველი რიგის ლოგიკას, სადაც ფიქსირებულია ერთი ინდივიდური ცვლადი x-ი. უფრო სწორად, L-ით აღვნიშნოთ პირველი რიგის ენა •, +, →, ¬, ∃-ის საფუძველზე და Lm-ით აღვინიშნოთ პროპოზიციული ენა, •, +, →, ¬, ∃-ის საფუძველზე. Form (L) და Form (Lm) იყოს L და Lm ყველა ფორმულათა სიმრავლე. დავაფიქსიროთ x ცვლადი L- ში, შეუსამაბოთ ყოველ პროპოზიციულ ასოს p L_m -დან ერთადერთ მონადიკურ პრედიკატს $p^*(x)$ L-დან და განვსაზღვროთ ინდუქციით გარდაქმნა $\Psi : Form(L_m) \rightarrow Form(L)$შემდეგნაირად:

- $\Psi(p) = p^*(x)$ თუp პროპოზიციული ცვლადია,
- $\Psi(\alpha \circ \beta) = \Psi(\alpha) \circ \Psi(\beta)$, სადაც $\circ = \cdot, +, \rightarrow$,
- $\Psi(\exists\alpha) = \exists x \Psi(\alpha)$.

Ψ გარდაქმნის მეშვეობით ჩვენ შეგვიძლია გამოვყოთ L_m- ის ფორმულები L-ის მონოდიკურ ფორმებთან ერთად, რომელიც შეიცავს x ცვლადს. თუ გვაქვს მოცემული $T-$ქსელების ინტერპრეტაციის არე, მაშინ მონადიკური პრედიკატი გამოხატავს $T-$ქსელის რაღაც თვისებას.

2. დალაგებული სიმრავლეები. ნახევარმესერები

ამ თავის დებულებები აღებულია [CG] -დან.

განვიხილოთ არაცარიელიA სიმრავლე.A სიმრავლეზე ბინარული მიმართება R განისაზღვრება, როგორც A×A პირდაპირი ნამრავლის ქვესიმრავლე.A-ზე R მიმართებას ეწოდება

- *რეფლექსური,* თუ $(x, x) \in R$;
- *სიმეტრიული,* თუ $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$;
- *ტრანზიტული,* თუ $(x, y) \in R$,$(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$;
- *ანტისიმეტრიული,* თუ $(x, y) \in R$და $(y, x) \in R \Rightarrow x = y$,ყოველი $x,y,z \in A$

R მიმართებას ეწოდება *კვაზიდალაგება,* თუ ის რეფლექსური და ტრანზიტულია.

R მიმართებას ეწოდება *დალაგება*,თუ ისრეფლექსური, ანტისიმეტრიულიდატრანზიტულია.

R მიმართებას ეწოდება *ექვივალენტობა,* თუ ის რეფლექსური, სიმეტრიული და ტრანზიტულია.

R^d აღვნიშნოთ მიმართება განსაზღვრული შემდეგნაირად: $(x,y) \in R^d$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $(y,x) \in R$.

$\leq$ იყოს დალაგებაAსიმრავლეზე. ამშემთხვევაში $(A; \leq)$ დალაგებული სიმრავლეა. თუ ყოველი $a,b \in A$გვაქვს ან $a \leq b$, ან $b \leq a$, მაშინ $(A; \leq)$ ეწოდება*ჯაჭვი*(ან *წრფივად დალაგებული სიმრავლე*). თუ ყოველი $a,b \in A$-სთვის $a \neq b$და არც $a \leq b$, არც $b \leq a$ მაშინ, $(A; \leq)$-სეწოდება *ანტიჯაჭვი.*

წინადადება 2.1 დავუშვათ $A \neq \emptyset$ *და* Q *არის კვაზიდალაგება* A*-ზე. მაშინ* $E_Q = Q \cap Q^d$ *არის ექვივალენტობის მიმართება* A*-ზე (ინდუცირებული* Q*-თი), ხოლო ფაქტორ-სიმრავლე* A/E_Q *დალაგებულია* $\leq_Q$ *მიმართებით, რომელიც* შემდეგნაირად განისაზღვრება: *ნებისმიერი* $X, Y \in A/E_Q$ $X \leq_Q Y$ *მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* $(x,y) \in Q$ *ყოველი* $x \in X$ *და ყოველი* $y \in Y$*-ს.*

განსაზღვრება.$(A; \leq_1)$, $(B; \leq_2)$ *იყოს დალაგებული სიმრავლეები. ფუნქციას*$f: A \to B$ *ეწოდება იზოტონური, თუ* $x \leq_1 y \Longrightarrow f(x) \leq_2 f(y)$ *ყოველი* $x, y \in A$.

წინადადება 2.2*ყოველი დალაგებული სიმრავლე* (X,R) *არის* $(P(X); \subseteq)$ *დალაგებული სიმრავლეების ქვესიმრავლის იზომორფულია.*$P(X)$ არის X-ის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე.

დალაგებული $(A; \leq)$ სიმრავლიდან ელემენტს ეწოდება:

მინიმალური, თუ $x \leq a, x \epsilon A$-დან გამომდინარეობს, რომ $x = a$;

უმცირესი, თუ $a \leq x$ყოველი $x\epsilon A$

მაქსიმალური, თუ $a \leq x, x\epsilon A$-დან გამომდინარეობს, რომ $x = a$;

უდიდესი, თუ $x \leq a$ ყოველი $x\epsilon A$-თვის.

დავუშვათ, რომ (A; ≤) არის დალაგებული სიმრავლე.M იყოს A-ს ქვესიმრავლე. აღვნიშნოთ:

$U(M) = \{x\in A: \ \ y \leq x \quad \forall y\in M \}$,

$L(M) = \{ x\in A: \ x \leq y \quad \forall y\in M \}$.

U(M)-სდაL(M)-ს შესაბამისად ეწოდებათ M-ის ზედა საზღვარი და ქვედა საზღვარი . თუ U(M)-ს აქვს უმცირესი ელემენტი, ის აღინიშნება sup(M)-ით და ჰქვია M-ის სუპრემუმი. თუ L(M)-ს აქვს უდიდესი ელემენტი, ის აღინიშნება inf(M)-ით და ჰქვია M-ის ინფიმუმი.

თუ M = $\{a,b\}$ და$a\leq b$, მაშინ sup(a,b) = bდა inf (a,b) = a.

განსაზღვრა. *ნახევარმესერი ნიშნავს კომუტაციურ და იდემპოტენტურ ნახევარჯგუფს, ანუ გრუპოიდს (S ; ∘), რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ აქსიომებს: ყოველი x,y,z* $\in S$

კომუტაციურობა: $x \circ y = y \circ x$

ასოციაციურობა: $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$

იდემპოტენტურობა: $x \circ x = x$

თუ ოპერატორი ∘ აყმაყოფილებს (a), (b) და (c) თვისებებს, მას ეწოდება*ნახევარმესერის ოპერაცია.*

წინადადება 2.3 (S; ∘) *იყოს ნახევარმესერი. S-ზე განვსაზღვროთ ≤ მიმართება შემდეგნაირად: a ≤ b მაშინ და მხოლოდ მაშინ, a∘b= b. აქედან გამომდინარეობს, რომ (S; ≤) არის დალაგებული სიმრავლე, სადაც ყოველი a,b∈S. არსებობს სუპრემუმი* sup(a, b) = a ° b.

წინადადება 2.4 (S; ≤) *იყოს დალაგებული სიმრავლე ისეთი, რომ ყოველი a,b∈S არსებობს სუპრემუმი* sup(a, b). $a \circ b$= sup(a, b) მაშინ, (S; ∘) *ნახევარმესერია. უფრო მეტიც,* $\leq_1$ *მიმართება განსაზღვრულია (S; ∘)-ში ფორმულით* $a \leq_1 b \ \Leftrightarrow \ a \circ b = b$, *იგივეა, რაც* ≤.

3. უნივერსალური ალგებრა

ამ თავის დებულებები აღებულია [CG] -დან.

“უნივერსალური ალგებრები” აყალიბებენ ზოგად თეორემებს ალგებრების შესახებ ცალსახად, ყველგან განსაზღვრული, სასრული ოპერაციებითურთ. უნივერსალური ალგებრა ან უბრალოდ ალგებრა ეწოდება წყვილს (A,F), სადაც A არაცარიელი სიმრავლეა, ხოლო F A-ზე განსაზღვრული სიმრავლე. და ყოველი ამ ოპერაციათაგანი ასახავს A სიმრავლის ხარისხს $A^{n(\alpha)}$ -ს A-ში, სადაც $n(\alpha)$ არის
რომელიმე შესატყვისი არაუარყოფითი მთელი რიცხვი.

$f_\alpha(x_1,...,x_{n(\alpha)})$, რომელიც ეკუთვნის A-ს, არის შედეგი f_α ოპერაციის გამოყენებისა $x_1,...,x_{n(\alpha)}$ მიმდევრობაზე.

თუ $n(\alpha)=1$, მაშინ f_α -ს ეწოდება უნარული ოპერაცია, თუ $n(\alpha)=2$, მაშინ f_α -ს ეწოდება ბინარული ოპერაცია, თუ $n(\alpha)=3$, მაშინ f_α -ს ეწოდება ტერნარული ოპერაცია და ა. შ. როცა $n(\alpha)=0$, ოპერაცია f_α -ს ეწოდება ნულარული ან კონსტანტა; ის აფიქსირებს რომელიღაც ელემენტს A-დან. თუ F სასრული სიმრავლეა, შემდგარი m ელემენტისაგან, მაშინ ალგებრა (A, F)-ს ჩავწერთ როგორც $(A, f_1,..., f_m)$. ხშირ შემთხვევაში, როცა A-ზე განსაზღვრული ოპერაციები F-დან ცნობილია, ალგებრა $(A, f_1,..., f_m)$ -ს წარმოვადგენთ მარტივად მხოლოდ A-ს სახით.

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ოპერაცია f_α უთანადებს ყოველ $n(\alpha)$ ელემენტები-საგან A-დან შემდგარ დალაგებულ მიმდევრობას $(x_1,...,x_{n(\alpha)})$ მის მნიშვნელობას $f_\alpha(x_1,...,x_{n(\alpha)})$, რომელიც ეკუთვნის A-ს.

მაგალითი 3.1. $(Z, +, \times)$, სადაც z მთელი რიცხვების სიმრავლეა, ხოლო + და × შესაბამისად არის ბინარული ოპერაციები - ჯამი და გამრავლება.

მაგალითი3.2. $(Z_n, \oplus, \otimes)$, სადაც Z_n nმოდულით ნაშთთა სიმრავლეა, ხოლო $\oplus$და $\otimes$შესაბამისად არის ბინარული ოპერაციები nმოდულით ჯამი და გამრავლება.

A ალგებრის ქვესიმრავლე A'-ს ეწოდება A-ს ქვეალგებრა, თუ A' ჩაკეტილია A-ს ყველა ოპერაციების მიმართ. ე. ი. თუ $f_\alpha \in F$ და $x_1,\ldots,x_{n(\alpha)} \in A'$, მაშინ $f_\alpha(x_1,\ldots,x_{n(\alpha)}) \in A'$. ყოველი A-ს ქვეალგებრა A' ყოველთვის განხილული იქნება როგორც ალგებრა იგივე ოპერაციების მიმართ, რომლებიც შეზღუდულია A-ზე.

ალგებრა A-ს ქვეალგებრებისნებისმიერი კლასის თანაკვეთა აგრეთვე არის A-ს ქვეალგებრა. მაშასადამე, A-ს ნებისმიერიელემენტთა არაცარიელი A_0 სიმრავლისათვის, არსებობს უმცირესი ქვეალგებრა A', რომელიც შეიცავს A_0 -ს (ე. ი. A'არის ყველა ქვეალგებრების თანაკვეთა, რომლებიც შეიცავენ A_0). ამ უმცირეს ქვეალგებრა A'–ს ეწოდება A_0 -ის მიერწარმოქმნილი ქვეალგებრა, ხოლო A_0-ს A' –ის წარმომქნელების (ანუ გენერატორების) სიმრავლე. განსაზღვრის თანახმად, ვიტყვით, რომ სიმრავლე $A_0 \subset A$ წარმოქმნის A-ს ან არის A-ს წარმომქმნელები (ანუ გენერატორები), თუ თვით ალგებრა A არის ერთადერთი ქვეალგებრა, რომელიც შეიცავს A_0 -ს.

ვიყვით, რომ (A, F) *მსგავსია* (B, F') ალგებრის, თუ |F|=|F'| დანებისმიერი $f_\alpha \in F$, f_α და f'_α ოპერაციების ცვლადების რაოდენობა ემთხვევა ერთმანეთს. სხვანაირად მსგავს ალგებრებს უწოდებენ *ერთი ტიპის* ალგებრებს.

მაგალითად,A ალგებრის ნებისმიერი A' ქვეალგებრა მსგავსია ალგებრისა. ხშირად მსგავსი ალგებრების ოპერაციებს აღვნიშნავთ ერთი და იგივე სიმბოლოებით.

ასახვა h-ს ალგებრა (A, F)-დან ალგებრა (B, F)-ში ეწოდება ჰომომორფიზმი, თუ ის ინახავს ყველა ოპერაციას, ე. ი.

$$h(f_\alpha(x_1,\ldots,x_{n(\alpha)})) = f_\alpha(h(x_1),\ldots,h(x_{n(\alpha)})), \text{ sadac } x_1,\ldots,x_{n(\alpha)} \in A.$$

ადვილად მტკიცდება შემდეგი თეორემები.

თეორემა 3.3. *თუ A, B, და C მსგავსი ალგებრებია და*

$$h : A \to B, \quad g : B \to C$$

ჰომომორფიზმებია, მაშინ კომპოზიცია

$$gh : A \to C$$

აგრეთვე ჰომომორფიზმია.

თეორემა 3.4. *თუ h ჰომორფიზმია A-ალგებრიდან B-ალგებრაში, მაშინ A-ალგებრის სახე h(A) არის B-ს ქვეალგებრა.*

მაგალითი 3.5. ადრე განხილული $\oplus$ჯამი და $\otimes$ნამრავლი $\boldsymbol{Z}_n$-ში ისეთნაირადაა განსაზღვრული, რომ პროექცია $\rho : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}_n$ აკმაყოფილებს პირობებს

$$\rho(k+m) = (\rho k) \oplus (\rho m), \quad \rho(km) = \rho(k) \otimes \rho(m).$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ ρ-ს "გადააქვს" $\boldsymbol{Z}$-ში განსაზღვრული ჯამი და ნამრავლი შესაბამის ოპერაციებში $\boldsymbol{Z}_n$-ში. ადვილი დასანახია, რომ ρ არის ჰომომორფიზმი $\boldsymbol{Z}$-დან $\boldsymbol{Z}_n$-ში.

მაგალითი 3.6. თუ $(\boldsymbol{P}^*, \times)$ ალგებრაა, სადაც $\boldsymbol{P}^*$ არის ყველა დადებით მთელ რიცხვთა სიმრავლე და $\times$ არის ბინარული ოპერაცია გამრავლება და $(\boldsymbol{R}, +)$ ალგებრაა, სადაც $\boldsymbol{R}$ ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა და $+$ არის ბინარული ოპერაცია ჯამი, მაშინ (ნებისმიერი ფუძის) ლოგარითმი $\log : (\boldsymbol{P}^*, \times) \to (\boldsymbol{R}, +)$ არის ჰომომორფიზმი :

$$\log(xy) = \log\ x \quad + \quad \log\ y.$$

ჰომომორფიზმს $h : (A, F) \to (B, F)$ ეწოდება

მონომორფიზმი თუ ფუნქცია h ინიექციაა;

ეპიმორფიზმი თუ ფუნქცია h სურიექციაა;

იზომორფიზმი თუ ფუნქცია h ბიექციაა.

ჰომომორფიზმს საკუთარ თავში $h : (A, F) \to (A, F)$ ეწოდება ენდომორფიზმი, ან, თუ ის ბიექციაა, ავტომორფიზმი.

4. კონგრუენცია

ამ თავის დებულებები აღებულია [CG] -დან.

თუ θ არის A სიმრავლეზე განსაზღვრული ექვივალენტობის მიმართება, მაშინ A/θ აღვნიშნავთ ფაქტორ სიმრავლეს, ე. ი. A –ზე ექვივალენტობის კლასთა სიმრავლეს.

კონგრუენცია (A,F) ალგებრაზე ეწოდება ექვივქლენტობის ისეთ მიმართება θ-ს A–ზე, რომ ყოველი $f_\alpha \in F$ -სთვის, თუ $x_i \equiv y_i (\mathrm{mod}\ \theta),\quad i=1,\dots,n(\alpha),$ მაშინ $f_\alpha(x_1,\dots,x_{n(\alpha)}) \equiv f_\alpha(y_1,\dots,y_{n(\alpha)})\ (\mathrm{mod}\ \theta)$.

თეორემა 4.1. *დაუშვათ* $h:(A,F)\to(B,F)$ *ჰომომორფიზმია. მაშინ ისეთი ექვივალენტობის მიმართება* θ *კონგრუენცია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* $h(x)=h(y)$

თეორემა 4.2. *დაუშვათ* θ *კონგრუენციაა ალგებრა* (A,F) *-ზე და* $x \mapsto P_\theta(x)$ *არის ასახვა, რომელიც ყოველ ელემენტს* $x \in A$ *შეუსაბამებს ექვივქლენტობის კლასს* A/θ *-დან, რომელიც ამ ელემენტს შეიცავს. მაშინ ოპერაციები* $f_\alpha \in F$ A/θ *-ზე, რომლებიც განისაზღვრებიან შემდეგი ფორმულით*

$$f_\alpha(P_\theta(x_1),\dots,P_\theta(x_{n(\alpha)})) = P_\theta(f_\alpha(x_1,\dots,x_{n(\alpha)})),$$

განსაზღვრავს ალგებრას $(A/\theta,F)$ *, რომელიც* A *ალგებრის მსგავსია. ამასთან, ასახვა* $x \mapsto P_\theta(x)$ *არის ჰომომორფიზმი*(A,F) *-დან* $(A/\theta,F)$ *-ზე.*

თეორემა 4.3. *ნებისმიერი* A *ალგებრის ჰომომორფული ანასახები ამოიწურება ფაქტორ-ალგებრებით* A/θ *, რომლებიც განისაზღვრებიან* θ *კონგრუენციებით* A*-ზე.*

განსაზღვრება. ერთი და იგივე ტიპის ალგებრათა $\boldsymbol{K}$ კლასს ეწოდება *მრავალსახეობა*, თუ ეს კლასი ჩაკეტილია პირდაპირი ნამრავლებით, ჰომომორფული სახეებით და ქვეალგებრებით.

ექვივალენტური განსაზღვრება:

განსაზღვრება. ალგებრათა კლასს K–ს ეწოდება *მრავალსახეობა*, თუ ის განისაზღვრება ტოლობების Σ სიმრავლით, ე. ი. K არის ყველა იმ ალგებრების ერთობლიობა, რომლებშიც ჭეშმარიტია ყველა ტოლობები Σ-დან.

მაგალითები. ბულის ალგებრების კლასი, ჯგუფები, რგოლები, ველები, მესერები, რეზიდუალური მესერები, ჰეიტინგის ალგებრები, გოედელის ალგებრები, BL-ალგებრები, MV-ალგებრები და ა.შ..

5. მესერები

ამ თავის დებულებები აღებულია [CG] -დან.

განსაზღვრება. L იყოს არაცარიელი ქვესიმრავლე და $(L ; \vee)$, $(L ; \wedge)$ იყოს ნახევარმესერები. თუ *ყოველი* $a,b\in L$-სთვის სრულდება შთანთქმის კანონები:

$a \vee (a \wedge b) = a$ *და* $a \wedge (a \vee b) = a$, მაშინ სამეულს $(L ; \vee, \wedge)$ ეწოდება მესერი.

წინადადება 5.1 $(L ; \vee, \wedge)$ იყოს მესერი. მაშინ ინდუცირებული მიმართება $\leq$ L -ზე არის დალაგება, ყოველი $a,b \in L$ არსებობს $sup(a,b) = a\vee b$ და $inf(a,b) = a \wedge b$, და $a \leq b$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a \wedge b = a$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a \vee b = b$.

წინადადება 5.2 $(L,\leq)$ იყოს დალაგებული სიმრავლე ისეთი, რომ ყოველი $a, b\in L$-სთვის არსებობს $sup(a, b)$ *და* $inf (a,b)$. აღვნიშნოთ $sup(a, b) = a \vee b$. $inf (a,b)=a\wedge b$. მაშინ $(L ; \vee, \wedge)$ *მესერია.*

თუ $(A ; \leq)$ არის დალაგებული სიმრავლე, $a,b\in A$ and $a \leq b$, აღვნიშნოთ

$$[a,b] = \{x \in A: a \leq x \leq b\},$$

ვუწოდოთ $(A;\leq)$ -ს ინტერვალს. თუ L მესერს გააჩნია უმცირესი ელემენტი თავისი დალაგების მიმართებით $\leq$, ისაღინიშნება **0**-ით და ეწოდება L-ის *ნული.* თუ მესერ L-ს

გააჩნია უდიდესი ელემენტი თავისი დალაგების მიმართებით $\le$, ის აღინიშნება **1**-ით და ეწოდება L-ის *ერთეული.*

ლემა 5.3 *თუ L მესერია, მაშინ*

(i)*თითოეული ელემენტისთვის $a \in L$, სინგლეტონი $\{a\}$ არის L-ის ქვემესერი.*

(ii)*L-ის ყოველი ინტერვალი არის L-ის ქვემესერი;*

(iii)*თუ L-ს აქვს* **0** *და* **1**, *მაშინ* $L=[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$

წინადადება 5.4 ყოველ სასრულ მესერს აქვს **0** და **1.**

განსაზღვრება. *$(L, \vee, \wedge)$* იყოს მესერი და θ- ექვივალენტობა L სიმრავლეზე. ვიტყვით, რომ θ არის კონგრუენცია L-ზე თუ, ყოველ $a,b,c,d \in L$ სრულდება შედეგი პირობა: *თუ $(a,b), (c,d) \in \theta$* , მაშინ $(a \vee c, b \vee d) \in \theta$ და $(a \wedge c, b \wedge d) \in \theta$. $a \in L$-ის θ ექვივალენტური კლასი აღინიშნება $[a]_\theta$

წინადადება 5.5. θ იყოს კონგრუენცია L მესერზე. მაშინ $(L/\theta, \vee, \wedge)$ მესერია და ასახვა

$\eta : L \to L/\theta$, განსაზღვრული $\eta(a) = [a]_\theta$-თი ($\forall a \in L$) *ჰომომორფიზმია* L -დან L/θ-ში .

თეორემა5.6.(*ჰომომორფიზმის თეორემა* მესერებისთვის) *L და M მესერებია და h: $L \to M$ ჰომომორფიზმია L -დან M-ში. დავუშვათ, მიმართება θ L-ზე განისაზღვრება შემდეგნაირად:*

(#)$(a,b) \in \theta \Leftrightarrow h(a) = h(b)$,

და ასახვა $\eta : L \to L/\theta$ აღინიშნება ტოლობით:

(##)$\eta(a) = [a]_\theta$.

მაშინ

1. *θ არის კონგრუენცია L-ზე,*
2. *η არის ჰომომორფიზმი L -დან L/θ-ში,*

3. $L/\theta \cong M$, და არსებობს ჰომომორფიზმი $\varphi : L/\theta \to M$, ისეთი რომ $\varphi \circ \eta = h$

განსაზღვრება. *დალაგებულ სიმრავლეს $(L\,;\leq)$ ეწოდება სრული მესერი,თუ მის ყოველ ქვესიმრავლეში $M \subseteq L$ არსებობს $\sup(M)$ და $\inf(M)$.*

განსაზღვრება. L იყოს მესერი. $\emptyset \neq I \subseteq L$ ჰქვია L-ის *იდეალი* თუ ის აკმაყოფილებს პირობებს:

(i) $a, b \in I \Longrightarrow a \vee b \in I$

(ii) $a \in I$ *და* $x \in I \Longrightarrow a \wedge x \in I$

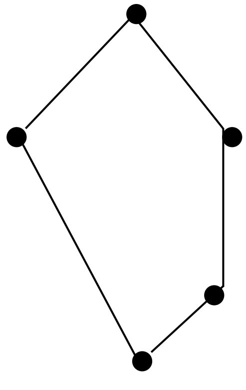
L -ის ყველა იდეალების სიმრავლე $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}(L)$ *არის* დალაგებული სიმრავლე ჩართვის მიმართების მიმართ $\subseteq$ *და* L არის მისი უდიდესი ელემენტი.

თეორემა 5.7. *ყოველი L მესერისთვის, სიმრავლე $\mathfrak{I}_0 = \mathfrak{I} \cup \{\emptyset\}$, სადაც $\mathfrak{I}$ L-ის ყველა იდეალების სიმრავლე, არის სრული მესერი $\subseteq$ დალაგების მიმართ .*

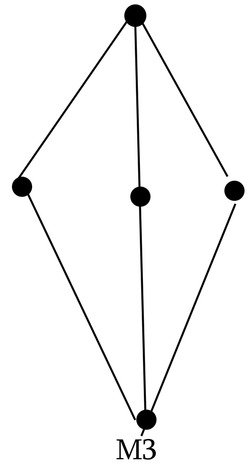
თეორემა 5.8. *ყოველი მესერი სრული მესერის ქვემესერის იზომორფულია .*

განსაზღვრება. L მესერს ეწოდება *დისტრიბუციული,* თუ ის აკმაყოფილებს ტოლობებს:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c), a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$



N5



M3

ფიგურა.1

თეორემა 5.9. *L მესერი დისტრიბუციულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ არ შეიცავს N_5 და M_3 ქვემესერებს.*

6. მესერები დამატებებით

ამ თავის დებულებები აღებულია [CG] -დან.

განსაზღვრება. L იყოს მესერი $\mathbf{0}$ -ით და $\mathbf{1}$-ით. $b \in L$ ელემენტს ეწოდება *$a \in L$ ელემენტის დამატება* თუ $a \vee b = \mathbf{1}$ და $a \wedge b = \mathbf{0}$. L მესერს $\mathbf{0}$ -ით და $\mathbf{1}$-ით ეწოდება *მესერი დამატებებით* თუ ყოველ $a \in L$ აქვს არაუმეტეს ერთი დამატება.

წინადადება 6.1. L იყოს დისტრიბუციული მესერი $\mathbf{0}$-ით და $\mathbf{1}$-ით. მაშინ, L-ის ყოველ ელემენტს აქვს არაუმეტეს ერთი დამატება.

განსაზღვრება. დისტრიბუციულ მესერს დამატებებით ეწოდება *ბულის მესერი.*

7.ბულის ალგებრები

ამ თავის დებულებები აღებულია [CG] -დან.

განსაზღვრება.(*2,2,1,0,0*) ტიპის ალგებრას $(A; \vee, \wedge, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *ეწოდება ბულის ალგებრა*, თუ $(A; \vee, \wedge, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ არის დისტრიბუციული მესერი $\mathbf{0}$ უმცირესი ელემენტით და $\mathbf{1}$ უდიდესი ელემენტით. ყოველი $a \in A$-სთვის, a' არის a-ს დამატება $(A; \vee, \wedge, \mathbf{0}, \mathbf{1})$-ში.

თეორემა 7.1 *ყოველი სრული ბულის ალგებრა* $(L; \vee, \wedge, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *იზომორფორფულია* $(P(M); \cup, \cap, ', \varnothing, M)$ *ბულის ალგებრისა, სადაც $M = At(L)$ (= L-ის ყველა ატომების სიმრავლე).*

შედეგი. (1) *A იყოს სასრული ბულის ალგებრა. მაშინ არსებობს $n \geq 0$ ისეთი, რომ A-ს აქვს* 2^n *რაოდენობის ელემენტი. თუ ორ სასრულ ბულის ალგებრას აქვს ელემენტთა ერთნაირი რაოდენობა, მაშინ ისინი ერთმანეთის იზომორფულები არიან.*

თეორემა 7.2. *ყოველი სრული და ატომური ბულის ალგებრა* $(A;\ \vee, \wedge, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *არის იზომორფული*$(P(M); \cup, \cap, ', \varnothing, M)$*ბულის ალგებრისა, სადაც* $M = At(A)$.

8. მულტიმოდალური ეპისტემუკური ოთხნიშნა$E\mathcal{L}_4^C$(n) ლუკასევიჩის ლოგიკა

(2,2,1,1,0,0) ტიპის ალგებრას $A = (A; \odot, \oplus, ^*, 0, 1)$ეწოდება *MV-ალგებრა* [C] თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ ტოლობებს:

1) $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$;

2) $x \oplus 0 = x$;

3) $x \oplus y = y \oplus x$;

4) $x \oplus 1 = 1$;

5) $0^* = 1$;

6) $1^* = 0$;

7) $x \odot y = (x^* \oplus y^*)^*$;

8) $(x^* \oplus y)^* \oplus y = (y^* \oplus x)^* \oplus x$

MV_4-ის აქსიომები [G]:

1) $x^3 = x^4$

2) $3(x^2 \oplus (\neg x \oplus \neg (x^2))) = 1$

ნამდვილი რიცხვების[0, 1] ერთეულოვანი ინტერვალი შემდეგიოპერაციების დამატებით: $x \oplus y = \min(1, x+y)$, $x \odot y = \max(0; x+y-1)$; $x^* = 1-x$, ხდება MV-ალგებრა.ცნობილია, რომ MV -ალგებრა $S = ([0, 1], \oplus, \odot, ^*, 0, 1)$ წარმოქმნის ყველა MV-ალგებრების მრავალსახეობას [C], ე.ი $V(S) = \mathbf{MV}$. $\boldsymbol{S_n} = (\boldsymbol{S_n}, \oplus, \odot, ^*, 0, 1)$ სადაც $\boldsymbol{S_n} = \left\{\mathbf{0}, \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}, \dots\dots, \frac{\boldsymbol{n-1}}{\boldsymbol{n}}, \mathbf{1}\right\}$

ნებისმიერი n დადებითი რიცხვისთვის, $\boldsymbol{S_n}$ არის S-ის ქვეალგებრა. ჩვენი შესწავლის

საგანია $\boldsymbol{S_3}$ = ($\boldsymbol{S_3}$, ⊕, ⊙, *, 0, 1).

ლუკასევიჩის ლოგიკის ფორმულები აგებულია პროპოზიციული ცვლადების თვლადი სიმრავლით Var = {p, q, ...} და კავშირებით &(ძლიერი კონიუნქცია), → (იმპლიკაცია) და⊥ (მცდარობის კონსტანტა).

იმისთვის, რომ შემოვიტანოთ უსასრულო ნიშნა ლუკასევიჩის ლოგიკა უნდა განვიხილოთ სტანდარტული MV -ალგებრა S = ([0, 1], ⊙, ⇒, 0) (რომელიც ფუნქციურად ექვივალებტურია ზემოთ განსაზღვრული MV- ალგებრის), ბინარულ ოპერაციას ⊙ ჰქვია ლუკასევიჩის t- ნორმა და განისაზღვრება, როგორც a⊙b = max {0, a + b - 1},a, b ∈ [0, 1]; ორადგილიან ოპერაციას ⇒ ეწოდება რეზიდუუმი (⊙ t- ნორმის შეუღლებული ოპერაცია) და განისაზღვრება როგორც a⇒ b = min {1, 1 - a + b}. a* =a⇒ 0 = 1 - a, a⊕ b = (a*⊙b*)*= min (1, a+b) a, b ∈ [0, 1].

9. 4-ნიშნა მულტიმოდალური ეპისტემიკური ლუკასევიჩის ლოგიკა კონსტანტებით

ჩვენ გავაფართოვებთ 4-ნიშნა ლუკასევიჩის ლოგიკას $\mathcal{L}_4$ 4-ნიშნა მულტიმოდალურ $E\mathcal{L}_4^c$ლოგიკამდე თუ დავამატებთ ნულადგილიან კავშირებს c_1, c_2და n რაოდე-ნობის მოდალურ ოპერატორებს □ᵢ, ◊ᵢ$(i = 1, \dots, n)$.ლუკასევიჩის მულტიმოდალური ლოგიკის ფორმულები აგებულია პროპორციული ცვლადების თვლადი სიმრავლით V ar = {p, q, ...} და კავშირებით &(ძლიერიკონიუნქცია), → (იმპლიკაცია) და⊥ (მცდარობის კონსტანტა), c_1(კვაზი მცდარობის კონსტანტა), c_2(კვაზი ჭეშმარიტობის კონსტანტა).

პროპოზიციული შეფასება არის ჰომომორფიზმი e ფორმულათა ალგებრიდან $\boldsymbol{S_3}$ ალგებრაში, ე. ი. e არის ასახვა ფორმულათა სიმრავლიდან {0, ⅓, ⅔, 1} ისეთი, რომ

$e(\varphi \& \psi) = e(\phi) \odot e(\psi)$,

$e(\varphi \to \psi) = e(\varphi) \Rightarrow e(\psi)$,

$e(\perp) = 0$,

$e(c_1) = \frac{1}{3}$,

$e(c_2) = \frac{2}{3}$,

$e(\bot \to \bot) = 1$.

ვიტყვით, რომ φ ფორმულა *ტავტოლოგიაა,* როდესაც მისი ნებისმიერი შეფასება 1-ის ტოლია. შემდეგ, ოთხნიშნა ლუკასევიჩის ლოგიკა $\mathcal{L}_4$განისაზღვრება როგორც ტავტოლოგიური ფორმულების სიმრავლე. ჩვენ შემოგვყავს კავშირები ∧, ∨, ↔, ¬, ⊻და (მათი სემანტიკური მნიშვნელობები აღინიშნება შესაბამისად ∧, ∨, ⇔, ⊕და 1, და ⊙ &-სთვის), ასევე შემოგვყავს შემდეგი შემოკლებები : *φ∧ψ = φ& (φ→ψ), φ∨ψ = (φ→ψ) →ψ, φ↔ψ = (φ→ψ) & (ψ→φ), ¬φ = φ→⊥, φ⊻ψ = ¬ (¬φ&¬φ), T = ¬⊥.*

ლუკასევიჩის ლოგიკა L არის აქსიომატიზებული შემდეგი აქსიომათა სქემებით:

$\mathcal{L}1.\ \varphi \to (\phi \to \psi)$

$\mathcal{L}2.\ (\varphi \to \psi) \to \big((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)\big)$

$\mathcal{L}3.\ \big((\varphi \to \psi) \to \psi\big) \to \big((\psi \to \varphi) \to \varphi\big)$

$\mathcal{L}4.\ (\neg\varphi\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi\varphi)$

გამოყვანის წესია მოდუს პონენსი: $\varphi, \varphi \to \psi/\psi$.

ოთხნიშნა ლუკასევიჩის ლოგიკის $\mathcal{L}_4$ აქსიომატიკა წარენომოადგენს ლუკასევიჩის ლოგიკის აქსიომებს დამატებული შემდეგი აქსიომები[G]:

$\mathcal{L}5.\ \varphi\varphi^3 \leftrightarrow \varphi\varphi^4$

$\mathcal{L}6.\ 3((\neg\varphi)^2 \veebar \varphi^2)$,

სადაც nφ და φ^n არის შემოკლებები φ⊻ ... ⊻φ (*n* ჯერ) და φ& ... &φ (*n* ჯერ).

ოთხნიშნა ლუკასევიჩის ლოგიკის $\mathcal{L}_4^c$ აქსიომატიკაში ლუკასევიჩის ლოგიკის აქსიომებს ემატება შემდეგი აქსიომები:

$\mathcal{L}7.\ (c_1 \& c_1) \leftrightarrow \bot$,

$\mathcal{L}8.\ (c_1 \veebar c_1) \leftrightarrow c_2$,

$\mathcal{L}9 (c_2 \veebar c_2) \leftrightarrow T$,

$\mathcal{L}10.\ (c_2 \& c_2) \leftrightarrow c_1$,

$\mathcal{L}11 \neg c_1 \leftrightarrow c_2$,

ჩვენს მიერ შემოთავაზებულია შემდეგი აქსიომათა სქემა $\boldsymbol{E\mathcal{L}_4^C(n)}$-სთვის: $\boldsymbol{\mathcal{L}_4^c}$ აქსიომათა სქემებს ვამატებთ

(A1) $\Box_i\Box_i\varphi \to \varphi, i=1,\dots,n,$

(A2) $\Box_i(\varphi\to\psi) \to(\Box_i\varphi\to\Box_i\psi),\ i=1,\dots,n,$

(A3) $\Box_i(\neg\Box_i\varphi)\leftrightarrow \neg\Box_i\varphi,\ i=1,\dots,n,$

(A4) $\Box_i(\Box_i\varphi\&\Box_i\psi) \leftrightarrow\Box_i\varphi\&\Box_i\psi,\ i=1,\dots,n,$

(A5) $\Box_i(\varphi\&\varphi) \leftrightarrow\Box_1\varphi\&\Box_i\varphi, i=1,\dots,n,$

(A6) $\Box_i(\varphi\underline{\vee}\varphi) \leftrightarrow\Box_1\varphi\underline{\vee}\Box_i\varphi, i=1,\dots,n,$

(A7) $\Diamond_i\varphi\to\Box_i\Diamond_i\varphi,\ i=1,\dots,n,$

(A8) $\Box_i c_1 \leftrightarrow c_1,\ i=1,\dots,n,$

(A9) $\Box_i c_2 \leftrightarrow c_2, i=1,\dots,n,$

გამოყვანის წესები:$\varphi, \varphi \to \psi/\psi, \varphi / \Box_i\varphi,\ i=1,\dots,n.$

თეორემა 9.1.*ყველა ფორმულა φ და ψ-სთვის*

$\varphi\to\psi$ -დან გამომდინარეობს $\Box_i\varphi\to\Box_i\psi,\ \ i = 1,\dots,n,$

<u>დამტკიცება:</u>

(1) $\varphi\to\psi$ (ჰიპოთეზა)

(2)$\Box_i(\varphi\to\psi)\quad i = 1,\dots, n$ (განზოგადოების წესი)

(3)$\Box_i(\varphi\to\psi)\to (\Box_i\varphi\to\Box_i\psi),\ i = 1,\dots, n.$ (A3)

(4)$\Box_i\varphi\to\Box_i\psi,\ i = 1,\dots, n,$ ((2) და (3) და MP).

□

წინადადება9. 2. [H]. შემდეგი ფორმულები ლუკასევიჩის ლოგიკის თეორემებია:

(1)$\vdash\top$,

(2)$\vdash\bot\to\varphi$,

(3)$\vdash \boldsymbol{\varphi \wedge \psi \to \varphi}$,

(4)$\vdash \boldsymbol{\varphi\wedge\psi \to \psi}$,

(5)$\vdash (\boldsymbol{\varphi \to \psi}) \to ((\boldsymbol{\psi \to \chi}) \to (\boldsymbol{\varphi \to \chi}))$,

(6)$\vdash(\varphi\to\psi) \wedge (\varphi\to\chi) \ \to (\varphi\to (\psi\wedge\chi))$, (7)$\vdash(\varphi\rightarrow(\psi\rightarrow\chi)\rightarrow((\varphi\&\psi)\rightarrow\chi)$,

(8)$\vdash(\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow(\varphi\rightarrow(\varphi\wedge\psi))$,

(9)$\vdash(\varphi\rightarrow(\psi\rightarrow(\varphi\wedge\psi))$,

(10)$\vdash\neg\neg\varphi\rightarrow\varphi$, $\vdash\varphi\rightarrow\neg\neg\varphi$,

(11)$\vdash\neg(\varphi\wedge\psi)\leftrightarrow\neg\varphi\vee\neg\psi$, $\vdash\neg(\varphi\vee\psi)\leftrightarrow\neg\varphi\wedge\neg\psi$,

(12)$\vdash\neg(\varphi\&\psi)\leftrightarrow\neg\varphi\veebar\neg\psi$, $\vdash\neg(\varphi\veebar\psi)\leftrightarrow\neg\varphi\&\neg\psi$,

(13)$\vdash\varphi\veebar\neg\varphi$

თეორემა 9.3. *თუ* $\vdash\varphi$, *მაშინ* $\vdash\varphi\leftrightarrow$T.

დამტკიცება. ცხადია, რომ $\vdash\varphi\rightarrow$T. $\boldsymbol{\mathcal{L}1}$ აქსიომის თანახად გვაქვს $\vdash\varphi\rightarrow$ (T$\rightarrow\varphi$). მაშინ მოდუს პონენსით მივიღებთ $\vdash$T$\rightarrow\varphi$. მაშასადამე $\vdash\varphi\leftrightarrow$T.

თეორემა 9.4. *ნებისმიერი* φ *და* ψ *ფორმულებისთვის*

$$\vdash \Box_i(\varphi\wedge\psi)\leftrightarrow(\Box_i\varphi\wedge\Box_i\psi),\ i=1,\ldots,n.$$

დამტკიცება.

(1)$\vdash$ $\boldsymbol{\varphi\wedge\psi\rightarrow\varphi}$(წინადადება 2. (2))

(2) $\vdash$ $\Box_i(\varphi\wedge\psi)\rightarrow\Box_i\varphi$, $i=1,\ldots,n$ (თეორემა 1)

(3) $\vdash$ $\varphi\wedge\psi\rightarrow\psi$, $i=1,\ldots,n$ (წინადადება 2. (2))

(4) $\vdash$ $\Box_i(\varphi\wedge\psi)\rightarrow\Box_i\psi$, $i=1,\ldots,n$ (თეორემა 1)

(5) $\vdash$ $\Box_i(\varphi\wedge\psi)\rightarrow\Box_i\varphi\wedge\Box_i\psi$, $i=1,\ldots,n$ ((2) და (4)-დან)

(6) $\vdash\varphi\rightarrow(\psi\rightarrow\varphi\wedge\psi)$ (წინადადება 2. (9))

(7) $\vdash\Box_i\varphi\rightarrow\Box_i(\psi\rightarrow\varphi\wedge\psi)$, $i=1,\ldots,n$, (თეორემა 1)

(8) $\vdash\Box_i(\psi\rightarrow\varphi\wedge\psi)\rightarrow(\Box_i\psi\rightarrow\Box_i(\varphi\wedge\psi))$, $,i=1,\ldots,n$, (A(2)-დან)

(9) $\vdash$ $\Box_i\varphi\rightarrow(\Box_i\psi\rightarrow\Box_i(\varphi\wedge\psi))$, $\Box i=1,\ldots,n$, ((7) და (8)-დან)

(10) $\vdash\Box_i\varphi\wedge\Box_i\psi\rightarrow\Box_i(\varphi\wedge\psi))i=1,\ldots,n$, ((9)-დან)

(11) $\vdash$ $\Box_i(\varphi\wedge\psi)\leftrightarrow(\Box_i\varphi\wedge\Box_i\psi)$, $i=1,\ldots,n$. ((5) და (10)-დან)

$\Box$

თეორემა 9.5. *შემდეგი ფორმულები არის* $\exists\mathcal{L}_4^c$ *ლოგიკის თეორემები:*

(i) $\vdash T \rightarrow \Box_i T$, $i=1,\ldots,n$,

(ii) $\vdash (\Box_i\varphi \,\&\, \Box_i\psi) \rightarrow \Box_i(\varphi \,\&\, \psi))$, $i=1,\ldots,n$,

(iii) $\vdash (\Box_i\varphi \,\underline{\vee}\, \Box_i\psi) \rightarrow \Box_i(\varphi \,\underline{\vee}\, \psi))$, $i=1,\ldots,n$,

(iv) $\vdash \Box_i\, (\Box_i\varphi \,\underline{\vee}\, \Box_i\psi) \rightarrow \Box_i(\varphi \,\underline{\vee}\, \psi))$, $i=1,\ldots,n$,

დამტკიცება. (i) $\vdash \Box_i\bot \rightarrow \bot$ ფორმულიდან გამომდინარეობს $\vdash \neg\bot \rightarrow \neg\Box_i\bot$. მაგრამ $\vdash \neg\Box_i\bot \rightarrow \Box_i (\neg\Box_i\bot)$ ((A3-დან). მაშასადამე, $\vdash \bot \rightarrow \Box_i\bot$, $i=1,\ldots,n$.

(ii) $\vdash \Box_i\varphi \rightarrow \varphi$ და $\vdash \Box_i\psi \rightarrow \psi$ -დან გამომდინარეობს $\vdash (\Box_i\varphi \,\&\, \Box_i\psi) \rightarrow (\varphi \,\&\, \psi)$. ვინაიდან $\vdash \Box_i\, (\Box_i\psi \,\&\, \Box_i\psi) \leftrightarrow \Box_i\psi \,\&\, \Box_i\psi$ ($i=1,\ldots,n$), ვღებულობთ $\vdash \Box_i\, (\Box_i\psi \,\&\, \Box_i\psi) \rightarrow \Box_i(\varphi \,\&\, \psi)$, $i=1,\ldots,n$.

(iii) $\vdash (\Box_i\varphi \,\underline{\vee}\, \Box_i\psi) \rightarrow (\varphi \underline{\vee} \psi)$. $\vdash \Box_i\, (\Box_i\varphi \underline{\vee} \Box_i\psi) \rightarrow \Box_i\, (\varphi \underline{\vee} \psi)$. $\vdash (\Box_i\varphi \,\underline{\vee}\, \Box_i\psi) \rightarrow \Box_i\, (\varphi \,\underline{\vee}\, \psi)$.

(iv) წინადადება 2 გამოყენებით ადვილად ვუჩვენებთ, რომ $\vdash \Box_i\, (\Box_i\varphi \,\underline{\vee}\, \Box_i\psi) \leftrightarrow \Box_i\neg(\neg\Box_i\varphi \,\&\, \neg\Box_i\psi) \leftrightarrow \Box_i\neg(\Box_i\neg\, \Box_i\varphi \,\&\, \Box_i\neg\Box_i\psi) \leftrightarrow \Box_i\neg(\Box_i\, (\neg\Box_i\varphi \,\&\, \neg\Box_i\psi)) \leftrightarrow \neg(\Box_i\, (\neg\Box_i\varphi \,\&\, \neg\Box_i\psi)) \leftrightarrow \neg(\neg\Box_i\varphi \,\&\, \neg\Box_i\psi)) \leftrightarrow \Box_i\varphi \,\underline{\vee}\, \Box_i\psi$.

$\Box$

10. 4-ნიშნა დესკრიფციული კრიპკეს მოდელები

4-ნიშნა კრიპკეს ფრეიმი i აგენტისთვის არის წყვილი $\mathfrak{F}_i = (W_i, R_i)$, $i = 1, \ldots, n$, რომელიც შედგება ელემენტთა არაცარიელი სიმრავლე W_i -სგან, რომელსაც ეწოდება *i აგენტის მდგომარეობები* (ან *i აგენტის შესაძლო სამყაროები*); $R_i \subset W_i \times W_i$ არის ბინარული რეფლექსური და ტრანზიტული მიმართება W_i -ზე, რომელსაც ეწოდება *წვდომადობის მიმართება i აგენტისთვის.*

4-ნიშნა კრიპკეს მოდელი i აგენტისთვის არის წყვილი $\mathcal{M}_i = (\mathfrak{F}_i, e_i)$, $i = 1, \ldots, n$, სადაც $\mathfrak{F}_i = (W_i, R_i)$ არის კრიპკეს ფრეიმი *i* აგენტისთვის და $e_i : Var \times W_i \rightarrow S_3$ არის ფუნქცია, რომელსაც ეწოდება *შეფასება i აგენტისთვის*, რომელიც ასახავს ყოველ პროპოზიციულ ცვლადს $p \in Var$ და შესაძლო სამყაროს $w \in W_i$ ჭეშმარიტობის მნიშვნელობებზე S_3, $i = 1, \ldots, n$, ისეთი, რომ თუ $e_i\, (p, w) = 1$ და $(w, w') \in R_i$, მაშინ $e_i(p, w') = 1$. თუ φ არის $\mathcal{L}_4$-ის

პროპოზიციული ფორმულა, მაშინ $e_i\ (\varphi,\ w)\in S_3$ არის პროპოზიციული შეფასება i აგენტისთვის; თუ φ არის მოდალური ფორმულა, მაშინ $e_i(\Diamond_i\varphi,\ w) = \bigvee \{\ e_i(\varphi,\ w'): (w,w') \in R_i\}$; $e_i(\Box_i\varphi,\ w) = \bigwedge \{\ e_i(\varphi,\ w'): (w,w') \in R_i\}$ ყოველი $w\in W_i$, $i = 1, \dots , n$.

მოდალური ფორმულა φ-ს ეწოდება *მოდალურად მართებული i აგენტისთვის,* თუ მისი შეფასება უდრის 1-ს i აგენტის ყველა კრიპკეს მოდელში. მოდალური ფორმულა φ-ს ეწოდება *მოდალურად მართებული,* თუ მისი შეფასება უდრის 1-ს ყველა კრიპკეს მოდელში ყველა i აგენტისთვის.

4-*ნიშნა დესკრიფციული კრიპკეს ფრეიმი* არის წყვილი $\mathfrak{F} = (W,\ R\ )$, სადაც $W=\{W_1, \dots , W_n\}$ n აგენტების არაცარიელი სიმრავლე; $R\subset W\times W$ არის ბინარული რეფლექსური და ტრანზიტული მიმართება W -ზე, რომელსაც ეწოდება *წვდომადობის მიმართება i $(=W_i)$ აგენტებს შორის.*

4-*ნიშნა დესკრიფციული კრიპკეს გლობალური მოდელი* (ან *დესკრიფციული კრიპკეს გლობალური მოდელი*) არის სამეული $\mathcal{M}= (W,\ R,\ V\ )$, სადაც $W=\{\ W_1, \dots , W_n\}$ n აგენტების (ან n *სამყაროების*) არაცარიელი სიმრავლე; $R\subset W\times W$ არის ბინარული რეფლექსური და ტრანზიტული მიმართება W -ზე, რომელსაც ეწოდება *წვდომადობის მიმართება i $(=W_i)$ აგენტებს შორის*; $V(\varphi,\ W_i) = \bigwedge \{\ e_i(\varphi,\ w\ ):\ w \in W_i,\ \ e_i : Var \times W_i \to S_3\}$, $V(\Box\varphi,\ W_i) = \bigwedge \{\ e_i(\varphi,\ W_j): (W_i,W_j\ )\in R\ \}$, $V(\Diamond\varphi,\ W_i) = \bigvee \{\ e_i(\varphi,\ W_j): (W_i,W_j\ )\in R\ \}$, სადაც $\Box\varphi$ და $\Diamond\varphi$ შესაბამისად შემოკლებებია შემდეგი ფორმულებისა: $\Box_1\varphi\wedge \dots \wedge\Box_n\varphi$ და $\Diamond_1\varphi\wedge \dots \wedge\Diamond_n\varphi$.

მოდალურ ფორმულა φ-ს ეწოდება *გლობალურად მოდალურად მართებული,* თუ მისი შეფასება უდრის 1-ს ყველა კრიპკეს მოდელში ყველა i აგენტისთვის, $i = 1,\dots, n$.

ლოგიკა $E\mathcal{L}_4^G(n)$ განისაზღვრება როგორც მოდალურ ფორმულათა სიმრავლე, რომლებიც გლობალურად მოდალურად მართებულია. აღსანიშნავია, რომ ამ ლოგიკისთვის მოდალური ოპერატორები ურთიერთგამოსახვადია შემდეგი მოდალურად მართებული ფორმულებისთვის: $\Diamond_i\varphi\leftrightarrow\neg\Box_i\neg\varphi$, $\Box_i\varphi\leftrightarrow\neg\Diamond_i\neg\varphi$.

შენიშვნა.შევნიშნოთ, $\exists L_4(n)$ ლოგიკის მონო-მოდალური ფრაგმენტი $\exists L_4(1)$ ემთხვევა ოთხნიშნა მონადიკურ ლუკასევიჩის ლოგიკას [DGM].ამ შედეგის გაფართოება $\mathrm{E}\mathcal{L}_4^c(n)$-მდე გვაძლევს ოთხნიშნა მონადიკურ პოსტის ლოგიკას.

შევნიშნოთ, რომ ალგებრა S_3^c= ({0, ⅓, ⅔, 1}, ⊙, ⇒, 0, ⅓, ⅔, 1) ფუნქციონალურად სრულია, ე. ი. ნებისმიერი ფუნქცია f : $\{0, ⅓, ⅔, 1\}^n \to \{0, ⅓, ⅔, 1\}$ გამოისახება რომელიღაც ტერმით ⊙, ⇒, 0, ⅓, ⅔, 1ენაში. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ S_3^cარის ოთხნიშნა პოსტის ალგებრა. მართლაც, საკმარისია S_3^c-ში გამოვსახოთ უარყოფის ოპერაცია $\sim \frac{x}{3} = \frac{x-1\ (mod\ 4)}{3}$, სადაც x = 0, 1, 2, 3: $\sim \frac{x}{3} = \frac{2}{3} \odot \frac{x}{3} \vee \neg (\frac{x}{3} \oplus \frac{x}{3} \oplus \frac{x}{3})$. ცნობილია, რომ ნებისმიერი სასრული პოსტის ალგებრა იზომორფულია S_3^cალგებრების სასრული დეკარტული ნამრავლისა. მონადიკური ბულის ალგებრების მსგავსად სასრული ქვეპირდაპირად დაუშლადი პოსტის ალგებრა არის ალგებრა (A,□), სადაც A არის სასრული პოსტის ალგებრა და მონადიკური ოპერატორი □ განსაზღვრულია შემდეგნაირად: □ $(x_1, \ldots , x_n) = x_m$, სადაც $(x_1, \ldots , x_n) \in A$და $x_m = min\{x_1, \ldots , x_n\}$. მონადიკური პოსტის ლოგიკა განისაზღვრება როგორც $\exists L_4(1)$-ის ყველა ფორმულათა სიმრავლე, რომლებიც მართებულია ყველა სასრულ მონადიკურ პოსტის ალგებრებში.

თეორემა 10.1. $\mathrm{E}\mathcal{L}_4^c(n)$-*ის ფორმულა φ არის თეორემა* $\mathrm{E}\mathcal{L}_4^c(n)$-*ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ φ გლობალურად ზოგადმართებულია.*

დამტკიცება. დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს [HT] - ის შედეგებიდან.

11. $\mathrm{E}\mathcal{L}_4^c(n)$ლოგიკის ალგებრული ანალიზი

(2,2,1,1,...,1,0,0,0,0) ტიპის ალგებრას (A, ⊙,⊕,*, $□_1,\ldots,□_n$,0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1)ეწოდება$\mathbf{E}\mathcal{L}_4^c(n)$ალგებრა, თუ (A, ⊙,⊕,*, 0, 1) არის MV_4- ალგებრა და ოპერაციები $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $□_1,\ldots,□_n$ აყმაყოფილებენ შემდეგ ტოლობებს:

C1. $\frac{1}{3} \odot \frac{1}{3} = \mathbf{0}$, C2. $\frac{1}{3} \oplus \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$,

C3. $\frac{2}{3} \oplus \frac{2}{3} = \mathbf{1}$,

C4. $\frac{2}{3} \odot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$,

C5. $(\frac{1}{3})^* = \frac{2}{3}$.

M1. $\Box_i x \leq x$, $i=1,\dots,n$,

M2. $\Box_i(x \wedge y)=\Box_i x \wedge \Box_i y$, $i=1,\dots,n$,

M3. $\Box_i((\Box_i x)^*)=(\Box_i x)^*$, $i=1,\dots,n$,

M4. $\Box_i(\Box_i x \odot \Box_i y)=\Box_i x \odot \Box_i y$, $i=1,\dots,n$,

M5. $\Box_i(x \odot x)=\Box_i x \odot \Box_i x$, $i=1,\dots,n$,

M6. $\Box_i \ (x \oplus x)=\Box_i x \oplus \Box_i x$, $i=1,\dots,n$,

M7. $\Diamond_i x = \Box_i \Diamond_i x$, $i=1,\dots,n$,სადაც $\Diamond_i x=(\Box_i x)^*$.

MC1. $\Box_i \frac{1}{3}=\frac{1}{3}$, $i=1,\dots,n$,

MC2. $\Box_i \frac{2}{3}=\frac{2}{3}$, $i=1,\dots,n$.

თეორემა 11.1. $\Box_i x=\Diamond_i \Box_i x$, $\Diamond_i \frac{1}{3}=\frac{1}{3}$, $\Diamond_i \frac{2}{3}=\frac{2}{3}$, $i=1,\dots,n$.

დამტკიცება. M7-დან გვაქვს $\Diamond_i x=(\Box_i x)^*$, $i=1,\dots,n$. მაშასადამე $(\Box_i x)^*=\Box_i (\Box_i x)^*=(\Diamond_i \Box_i x)^*$. ამიტომ $\Box_i x=\Diamond_i \Box_i x$, $i=1,\dots,n$-სთვის.

$\Diamond_i \frac{1}{3}=(\Box_i(\frac{1}{3})^*)^*=(\Box_i(\frac{2}{3})^*=(\frac{2}{3})^*=\frac{1}{3}$. იმავე წესის გამოყენებით $\Diamond_i \frac{2}{3}=\frac{2}{3}$.

$\Box$

შევნიშნოთ, რომ მესერის ოპერაციები $\vee$, $\wedge$ და იმპლიკაცია $\Rightarrow$ გამოისახება შემდეგნაირად [C]: $x \vee y=(x \odot y^*)\oplus y$, $x \wedge y=(x\oplus y^*)\odot y$, $x \Rightarrow y=x^*\oplus y$.

შენიშვნა.განვიხილოთ $(A,\oplus,\odot,^*, \Box_1,0,1)(A, \oplus,\odot,^*, \Box_1,\dots,\Box_n,0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$ ალგებრის შეზღუდვაა. (ე.ი. ალგებრა $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ცვლადების გარეშე და ერთი $\Box$ ოპერატორით). მაშინ ჩვენ მივიღებთ MV-ალგებრას (უფრო ზუსტად მონადიკურ MV_4-ალგებრას) [DGM]. $(S_3,\oplus,\odot,^*, \Box_1,0,1)$ მონადიკურ ალგებრაში ოპერატორი $\Box$ არის ტრივიალური, ე.ი. $\Box x=x$. უფრო მეტიც, თუ გვაქვს სრულად დალაგებული მონადიკური MV-ალგებრა $(A,\oplus,\odot,^*, \Box_1,0,1)$, მაშინ ოპერატორი

□ არის ტრივიალური [DGM]. არატრივიალური ოპერატორები □ და ◊ განისაზღვრება შემდეგი გზით: $\Box(x,y) = (min(x,y), (min(x,y))$ და $\Diamond(x,y) = (max(x,y), (max(x,y))$.

M1-M6 აქსიომებიდან გამოყვანადია შემდეგი:

თეორემა 11.2. *ნებისმიერ $\boldsymbol{EL_4^c(n)}$ ალგებრაში $A i\in\{1,\ldots,n\}$ სრულდება შემდეგი ტოლობები:*

1. $\Box_i 1=1$,

2. $\Box_i\Box_i x=\Box_i x$

3. თუ $x\leq y$, მაშინ $\Box_i x \leq \Box_i y$,

4. $\Box_i(x\odot y)\geq\Box_i x\odot\Box_i y$,

5. $\Box_i(\Box_i x\oplus\Box_i y)=\Box_i x\oplus\Box_i y$,

6. $\Box_i(x\oplus y)\geq\Box_i x\oplus\Box_i y$,

7. $\Box_i(x^*\oplus y)\leq\Box_i x^*\oplus\Box_i y$

დამტკიცება. 1. ცხადია, რომ $\Box_i 0=0$. მაშასადამე $(\Box_i 0)^*=1$. $\Box_i(\Box_i)^*=(\Box_i 0)^*$ (M3-დან). მაგრამ, $(\Box_i 0)^*=1$.

2. $\Box_i\Box_i x = \Box_i(\Box_i x\odot\Box 1)=\Box_i x\odot\Box_i 1)$ (M4-დან). მაგრამ, $\Box_i x\odot\Box_i 1=\Box_i x\odot 1=\Box_i x$

3. დავუშვათ, $x\leq y$. მაშინ $x\wedge y$, $\Box_i (x\wedge y)=\Box_i x\wedge\Box_i y=\Box_i y$. აქედან გამომდინარე, $\Box_i x\leq\Box_i y$

4. $\Box_i x\odot\Box_i y \leq x\odot y$. $\Box_i(\Box_i x\odot\Box_i y)=\Box_i x\odot\Box_i y\leq\Box_i(x\odot y)$

5. $\Box_i(\Box_i x\oplus\Box_i y)=\Box_i((\Box_i x^*\odot(\Box_i y)^*)^*=\Box_i(\Box_i(\Box_i x^*\odot\Box_i(\Box_i y)^*)^*= \Box_i(\Box_i((\Box_i x^*\odot(\Box_i y)^*))^*=(((\Box_i x\ )^*\odot(\Box_i y\ )^*))^*=\Box_i x \oplus\Box_i y$

6. $\Box_i x\oplus\Box_i y\leq x\oplus y$. $\Box_i(\Box_i x\oplus\Box_i y)=(\Box_i x\oplus\Box_i y\leq\Box_i(x\oplus y)$

7. გავიხსენოთ, რომ $x\leq y$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x\wedge y=y$, $x^*\oplus y=1$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x\odot y^*=0$ [C]. $((\Box_i x)^*\oplus\Box_i y)^*\odot(\Box_i(x^*\oplus y)=(\Box_i x)\odot(\Box_i y)^*\odot(\Box_i(x^*\oplus y)\leq(\Box_i y)^*\odot\Box_i(x \odot(x^*\oplus y))=(\Box_i y)^*\odot\Box_i(x\wedge y))=(\Box_i y)^*\odot(\Box_i(x\wedge\Box_i y))=(\Box_i y)^*\odot\Box_i x\wedge\Box_i y)^*\odot\ \Box_i y$ ([6]-დან). მაგრამ, $(\Box_i y)^*\odot\ \Box_i y=0$.

□

შევნიშნოთ, რომ $\Box_i (x^*\oplus y) \leq (\Box_i x)^*\oplus\Box_i y$ ექვივალენტურია $\Box_i (x\Rightarrow y) \leq (\Box_i x\Rightarrow\Box_i y)$ ყოველი $i\in\{1,\ldots,n\}$.

შევნიშნოთ, რომ ფიქსირებული i-სთვის $\Box_i (x^*\oplus y)\leq ((\Box_i x)^*\oplus\Box_i y)$ უტოლობა შეესაბამება ცნობილი კლასიკური მონო-მოდალური K ლოგიკის ფორმულას $\Box_i(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\Box_i\alpha\rightarrow\Box_i\beta)$.

E$\mathcal{L}_4^c$-ალგებრა $(A, \odot, \oplus, ^*, \Box_1, \dots, \Box_n, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$შემოკლებულად აღვნიშნოთ$(A^C, \Box_1, \dots, \Box_n)$.

$(A^C, \Box_1, \dots, \Box_n)$ ალგებრის I იდეალს ეწოდება მულტი-მონადიკური იდეალი, თუ I არის MV-ალგებრა A-ს იდეალი (ე.ი. $A \supset I (= \emptyset)$ და ყოველი x, y ∈ A. (a)$x \oplus y \in I$, (b) თუ $x \geq y$ და $x \in I$, მაშინ $y \in I$) და ყოველი $a \in A$ თუ, $a \in I$, მაშინ $\Diamond_i\, a \in I$ ყოველი$i \in \{1, \dots, n\}$.

თავდაპირველად, განვსაზღვროთ მულტიმონადიკური ფილტრი. $(A, \Box_1, \dots, \Box_n)$ ალგებრის F ფილტრს ეწოდება მულტი-მონადიკური ფილტრი, თუ F არის MV- ალგებრის ფილტრი (ე.ი. $\supset F (= \emptyset)$ და ყოველი $x, y \in A$-სთვის. (a) $x \odot y \in I$, (b) თუ $x \geq y$ და $y \in F$, მაშინ $x \in F$) და ყოველი $a \in A$-სთვის თუ $a \in F$, მაშინ $\Box_i\, a \in F$ ყოველი $i \in \{1, \dots, n\}$. გავითვალისწინოთ, რომ თუ I მულტი-მონადიკური იდეალია, მაშინ $I^* = \{x^* \in A \colon x \in I\}$ არის *მულტიმოდალური ფილტრი* და, პირიქით, თუ F არის მრავალმხრივი ფილტრი, მაშინ$F^* = \{x^* \in A \colon x \in F\}$ არის *მულტი-მოდალური იდაელი.* შენიშნოთ, რომ ნებისმიერი სათანადო ფილტრი (იდეალი) არ შეიცავს მუდმივებს $\frac{1}{3}$და $\frac{2}{3}$, ამიტომ $(\frac{1}{3})^3 = (\frac{2}{3})^3 = \mathbf{0}$ **(3** $(\frac{1}{3})$ **= 3** $(\frac{2}{3})$ **= 1).**

ლემა 11.3. თუ F *არის* $\mathbf{E}\mathcal{L}_4^c(\boldsymbol{n})$-ალგებრა $(A^C, \Box_1, \dots, \Box_n)$-ის მულტიმონადიკური ფილტრი, A-ზე გამსაზღვრული იმ პირობით, თუ $(x \Rightarrow y) \odot (y \Rightarrow x) \in F$ კონგრუენციაა.

დამტკიცება. რადგან F MV-ფილტრია, მაშინ E ინახავს $\oplus, \odot, ^*$ ოპერაციებს [C]. დავუშვათ xEy ე.ი. $(x \Rightarrow y) \odot (x \Rightarrow y) \in F$. მაშინ, $(x \Rightarrow y) \in F$და $(x \Rightarrow y) \in F$ მაშასადამე, $\Box_i (x \Rightarrow y) \in F$ და $\Box_i (x \Rightarrow y) \in F$ ყოველი $i \in \{1, \dots, n\}$. შესაბამისად, $\Box_i\, x \Rightarrow \Box_i\, y \in F$ და $\Box_i\, x \Rightarrow \Box_i\, y \in F$ თეორემა 3-დან გამომდინარე. ამიტომ, $(\Box_i\, x \Rightarrow \Box_i\, y) \odot (\Box_i\, x \Rightarrow y) \in F$. საბოლოოდ მივიღეთ, რომ და $(\Box_i\, x) E (\Box_i\, y)$ ყოველი $i \in \{1, \dots, n\}$.

□

12. ქვეპირდაპირი წარმოდგენა

ავიღოთ, A□={a∈A: □$_i$ a=a, *i*=1,…,n}. ნათელია, რომ A□ არის (A^C, □$_1$,… □$_n$)-ის ქვეალგებრა.

ყოველი *X*⊂*A*, [*X*)-ით აღვნიშნოთ მულტი-მონადიკური ფილტრი, რომელიც წარმოიქმნება*X*-დან. ადვილი შესამოწმებელია, რომ [X)={ *a*∈*A* : *a* ≥□$_i$ x_1⊙…⊙□$_i$ x_n, x_1,…, x_n∈*X*, *i*=*1,…,n*}. შევნიშნოთ, რომ თუ X ჩაკე ტილია □$_i$ (i=1,…,n)-ის მიმართ მაშინ [X)={a∈A:a≥x ზოგიერთი x ∈ X− სთვის}.

ლემა 12.1. თუ ∇=[{a}∪F), სადაც a∈A□და F *მულტი-მონადიკური ფილტრი*, მაშინ ∇ არის აგრეთვე *მულტი-მონადიკური ფილტრი.*

დამტკიცება. თუ p ∈∇, მაშინ არსებობს b ∈F ისეთი, რომ p ≥ a⊙ b. მაშასადამე, □$_i$ (a⊙ b) ≥ □$_i$ a⊙□$_i$ b =a⊙□$_i$ b და,რადგან □$_i$ b ∈F,მივიღებთ □$_i$ p∈∇,i=1,…,n.

□

თეორემა 12.2. .E$\mathcal{L}_4^c(n)$ *ალგებრა (A^C, □$_1$,… □$_n$)-სფილტრი F⊂A მულტი-მონადიკურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ F =[F ∩A□), ამასთან, არსებობს მესერული იზმორფიზმი A-ს ყველა მულტიმონადიკურ ფილტრების მესერსა და A-ს ყველა ფილტრების მესერს შორის.*

*დამტკიცება.*დავუშვათ F ⊂ A არის მულტიმონადიკური ფილტრი. დავუშვათ *a*∈*F.* მაშინ □$_i$ *a*∈*F* და □$_i$ *a*∈F∩A□ აქედან გამომდინარე, *a* ≥ □$_i$ a-დან, გვაქვს *a* ∈[*F* ∩A□), ნებისმიერი *i* = 1*, …, n.* პირიქით, თუ *a* ∈[F∩A□), მაშინ *a* ≥ *x* ზოგიერთი x ∈[*F* ∩A□). მაშასადამე, □$_i$ *a* ≥ □$_i$ *x* = *x* მაშინ, გვაქვს *a*∈*F.* შევნიშნოთ, რომ A□ MV -ალგებრაა. შესაბამისობა ასახავს A-ს ყოველ F ფილტრს (A^C, □$_1$,… □$_n$)-ს მულტიმონადიკურ ფილტრში, რადგან ჩაკეტილია ⊙-ის მიმართ. ნათელია, რომ F =[F∩A□). მეორეს მხრივ, J არის (A^C, □$_1$,… □$_n$)ალგებრის ფილტრი. მაშინ J = [J ∩A□). J ∩A□ არის A□-ის ფილტრი, ჩვენ ვაჩვენეთ საჭირო შესაბამისობა (A^C, □$_1$,… □$_n$)-ს მულტი-მონადიკური ფილტრების სიმრავლესა და A□-ის MV-ფილტრების სიმრავლეს შორის. საბოლოოდ, ადვილი შესამოწმებელია, რომ F_1⊂ F_2⇒ [F_1) ⊂[F2) და J_1⊂ J_2⇒J_1∩A□. ამით თეორემის დამტკიცება დამთავრებულია.

□

$\mathcal{L}_4^c(n)$ ალგებრა (A^C, $\square_1,\ldots \square_n$)-ს$F$ *ფილტრს* ეწოდება *მარტივი,* თუ $F \neq A$ და $a \vee b \in F$-დან გამომდინარეობს, რომ $a \in F$ ან $b \in F$.

თეორემა 12.3. *ყოველი* $E\mathcal{L}_4^c(n)$ *ალგებრა (*A^C, $\square_1,\ldots \square_n$*) იზომორფულია წრფივად დალაგებული* $E\mathcal{L}_4^c(n)$ *ალგებრების (*A_i^C, $\square_1,\ldots \square_n$*) ქვეპირდაპირი ნამრავლის.*

დამტკიცება. S-ით აღვნიშნოთ $A^{\square}$-ს ყველა მარტივი ფილტრების სიმრავლე ისეთი, რომ $\cap S=\{1\}$. ასეთი სიმრავლის არსებობა გამომდინარეობს ჩანგის თეორემიდან, რომლის თანახმადაც ყოველი MV-ალგებრა წარმოდგება სრულად დალაგებული MV-ალგებრების ქვეპირდაპირი ნამრავლის სახით[C]. მაშინ $\cap S'=\{0\}$,სადაც,$S'=\{[P]:P \in S\}$არის (A^C, $\square_1,\ldots \square_n$)-ის მულტი-მონადიკური ფილტრების ოჯახი.

□

მაგალითი. განვიხილოთ $\mathbf{E}\mathcal{L}_4^c(\mathbf{2})$-ალგებრა ($A^C$, $\square_1,\ldots \square_n$)=($S_3^3$, $\oplus$, $\odot$,*, $\square_1,\ldots,\square_n$,$\mathbf{0}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\mathbf{1}$), სადაც $\mathbf{0}$=(0,0,0), $\frac{1}{3}=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, $\frac{2}{3}=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$, $\mathbf{1}$=(1,1,1,), $\square_1(x,y,z)$ = (min(x,y), (min(x,y),z), $\square_2(x,y,z)$ = (x, min(y,z), (min(y,z)). მაგალითად, დავუშვათ, რომ a=(1, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$). მაშინ $\square_1$(a)=($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$), $\square_1$(a)=($\mathbf{1}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$,). შევნიშნოთ, რომ მხოლოდ სათანადო (A^C, $\square_1,\ldots \square_n$) მულტი-მონადიკური ფილტრი არის {$\mathbf{1}$}={(1,1,1)} და უფრო მეტიც,$A^{\square}$({$\mathbf{0}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\mathbf{1}$},$\oplus$, $\odot$,*, $\square_1$, $\square_2$,$\mathbf{0}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\mathbf{1}$). ასე, რომ (A^C, $\square_1,\ldots \square_n$) ქვეპირდაპირი დაუშლადია.

13. სისრულის თეორემა

(Form($E\mathcal{L}_4^c(n)$),$\veebar$, &, ¬, $\square_1,\ldots,\square_n$,⊥, c_1, c_2, ⊤) არის $E\mathcal{L}_4^c(n)$ფორმულათა ლოგიკის ალგებრა.აღვნიშნოთ ექვივალენტობის მიმართება $\equiv E\mathcal{L}_4^c(n)$ფორმულათა ლოგიკის ყველა ფორმულათა სიმრავლეზე: $\varphi \equiv \psi$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ და $\vdash \psi \rightarrow \varphi$ ანუ $\vdash \varphi \rightarrow \psi \& \psi \rightarrow \varphi$. ჩანგის შედეგის თანახმად ≡ მიმართება კონგრუენტული მომართებაა $\veebar$, &,

¬ კავშირების გამოყენებით (ფორმულებს შორის) [C].თუ გავითვალისწინებთ $\boldsymbol{E\mathcal{L}_4^c(n)}$-ის აქსიომების თარგმანს ალგებრულ ტერმებში, დავასკვნით, რომ ≡ მიმართება კონგრუენტული მიმართებაა $\Box_1,\dots,\Box_n,\bot$, c_1, c_2, $\top$ ოპერატორების მიმართ. (Form($E\boldsymbol{\mathcal{L}_4^c(n)}$) $/\equiv$, $\veebar$, &, ¬, $\Box_1,\dots,\Box_n,\bot/\equiv$, $c_1/\equiv$, $c_2/\equiv$, $\top/\equiv$) $\boldsymbol{E\mathcal{L}_4^c(n)}$ალგებრა ცნობილია, როგორც *ლინდერბაუმის ალგებრა.* უფრო ზუსტად

თეორემა 13.1. *ლინდერბაუმის ალგებრა* (Form($E\boldsymbol{\mathcal{L}_4^c(n)}$)$/\equiv$, $\veebar$, &, ¬, $\Box_1,\dots,\Box_n$,**0**, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1)$E\boldsymbol{\mathcal{L}_4^c(n)}$- ალგებრაა, სადაც $\mathbf{0}=\bot/\equiv$, $\frac{1}{3}=c_1/\equiv$, $\frac{2}{3}=c_2/\equiv$, $\mathbf{1}=\top/\equiv$).

$\mathbf{E}\boldsymbol{\mathcal{L}_4^c(n)}$ლოგიკის ყოველი პროპოზიციული ფორმულა φ შეიძლება გადავიყვანოთ $\mathbf{E}\boldsymbol{\mathcal{L}_4^c(n)}$ -ალგებრულ ტერმში (პოლინომში)შემდეგი გზით: $p_i \mapsto tr(\varphi)=x_i$, $\& \mapsto tr(\&)=\odot$, $\veebar \mapsto tr(\veebar)=\oplus$, ¬ $tr(\neg)=*$, $\Box_i$ $tr(\Box_i)=\Box_i$ $(i=1,\dots,n)$, $\bot$ $tr(\bot)=\mathbf{0}$, ¬ $tr(\neg)=*$, c_1 $tr(c_1)=\frac{1}{3}$, c_2 $tr(c_2)=\frac{2}{3}$, $\top$ $tr(\top)=\mathbf{1}$.

$\mathbf{E}\boldsymbol{\mathcal{L}_4^c(n)}$ლოგიკის პროპოზიციულ ფორმულა φ-ს ეწოდება *ტავტოლოგია,* თუ იგივეობა $tr(\varphi)=\mathbf{1}$ სრულდება ყოველ ქვეპირდაპირ დაუშლად $\mathbf{E}\boldsymbol{\mathcal{L}_4^c(n)}$-ალგებრაში.

თეორემა 13.2. $E\,\boldsymbol{\mathcal{L}_4^c(n)}$ *-ლოგიკის* φ ფორმულა *თეორემაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* φ *ტავტოლოგიაა.*

დამტკიცება. ადვილი შესამოწმებელია, რომ თუ φ თეორემაა $\mathbf{E}\boldsymbol{\mathcal{L}_4^c(n)}$-ში, მაშინ φ ტავტოლოგიაა. პირიქით, დავუშვათ, რომ, φ ფორმულა $\mathbf{E}\boldsymbol{\mathcal{L}_4^c(n)}$-ში არ არის თორემა. მაშინ $\varphi/\equiv\neq 1$. თეორემა 12-ის თანახმად, *ლინდერბაუმის ალგებრა* (Form($E\boldsymbol{\mathcal{L}_4^c(n)}$) $/\equiv,\Box_1,\dots,\Box_n$) იზომორფულია,ისეთი ($A_i^{\Box}$, $\Box_1,\dots,\Box_n$) ალგებრების ქვეპირდაპირი ნამრავლის, რომ, $A_i^{\Box}$ წრფივად დალაგებულია. აქედან გამომდინარე, $\varphi/\equiv$ შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც მიმდევრობა$(a_1,\dots,a_k,\dots)$ სადაც $a_k\in A_k^c$ და $a_k\neq 1$. h-ით აღვნიშნოთ ნატურალური ჰომომორფიზმი (Form($\mathbf{E}\boldsymbol{\mathcal{L}_4^c(n)}$), $\Box_1,\dots,\Box_n$) (Form($\mathbf{E}\boldsymbol{\mathcal{L}_4^c(n)}$)$/\equiv$, $\Box_1,\dots,\Box_n$)-ზე, ე.ი. $h(\varphi)=\varphi/\equiv$. მაშინ, $e=\pi_k\circ h$ ასახვა, სადაც, π_k არის (Form($\mathbf{E}\boldsymbol{\mathcal{L}_4^c(n)}$)$/\equiv$, $\Box_1,\dots,\Box_n$)-ის პროექცია k-ურ კომპონენტზე(A_k^C, $\Box_1,\dots\Box_n$), ისეთი შეფასებაა, რომ $e(\varphi)\neq\mathbf{1}$. მაშასადამე φ არ არის ტავტოლოგია.

14. იმუნური სისტემის აღწერა კრიპკეს ფრეიმებით

ამ ნაწილში ჩვენ შევეცდებით წარმოვადგინოთ იმუნური სისტემის ზოგიერთი მარტივი ფრაგმენტი 4-ნიშნა კრიპკეს ფრეიმებით იმუნური მოდელებში შემდეგ ინტერპრეტაციასთან ერთად.

მოდით $\mathfrak{I}_1$= (W_1, R_1) იყოს 4 -ნიშნა კრიპკეს ფრეიმი აგენტი 1-სთვის , სადაც W_1 (=APC) = {a_1, ..., a_n} და R_1ორადგილიანი მიმართებაა {(a_1, a_1), ..., (a_n, a_n)};

$\mathfrak{I}_2$ (= DC) = (W_2, R_2) იყოს 4 -ნიშნა კრიპკეს ფრეიმი აგენტი 2-სთვის , სადაც W_2 (=APC) = {a_1, ..., a_n} და R_2ორადგილიანი მიმართებაა {(d_1, d_1), ..., (d_n, d_n)};

$\mathfrak{I}_3$ (= MC) = (W_3, R_3) იყოს 4 -ნიშნა კრიპკეს ფრეიმი აგენტი 3-სთვის , სადაც W_3 (= MC) = {(*Hi, Se, He, NP, LT, PAF*} და R3 არის ბინარული მიმართება {(Hi, Hi), (Se, Se), (He, He), (NP, Np), (LT, LT), (PAF, PAF);

$\mathfrak{I}_4$ (= Th1) = (W4, R4) იყოს 4 -ნიშნა კრიპკეს ფრეიმი აგენტი 4-სთვის , სადაცW_4 = {(IFN - γ, IL - 2, IL - 4, IL - 12} და R_4არის ბინარული მიმართება {(IFN - γ, IFN - γ), (IL- 2, IL- 2), (IL- 4, IL- 4), (IL- 12, IL- 12)};

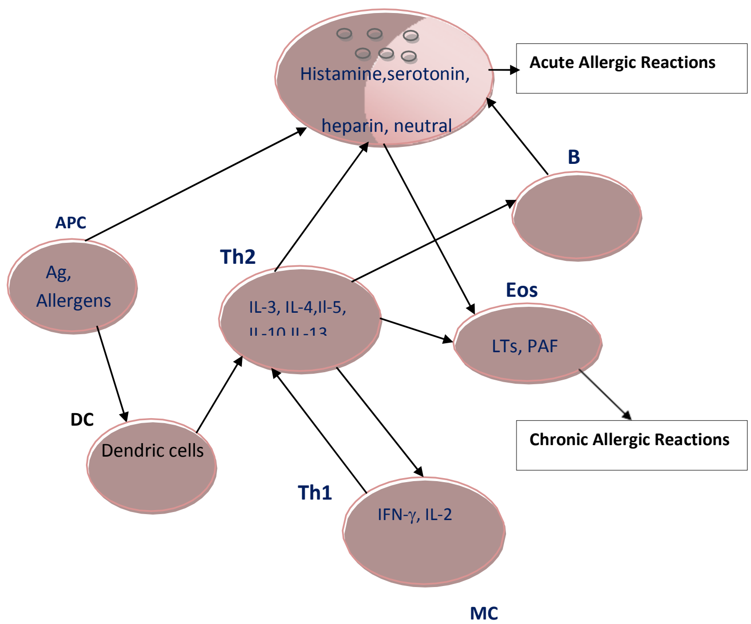
$\mathfrak{I}_5$ (= Th2) = (W_5, R_5) იყოს 4 -ნიშნა კრიპკეს ფრეიმი აგენტი 5-სთვის , სადაცW_5 = [IL-3, IL-4, IL- 5, IL- 10, IL- 13} და R_5არის ბინარული მიმართება {(IL-3, IL- 3), (IL- 4, IL- 4), (IL- 5, IL- 5), (IL- 10, IL- 10), (IL-13, IL - 13)};

$\mathfrak{I}_6$ (= B) = (W_6, R_6) იყოს 4 -ნიშნა კრიპკეს ფრეიმი აგენტი 6-სთვის , სადაც W_6 = {IgE, IgA, IgG, IgM} და R_6 არის ბინარული მიმართება {(IgE, IgE), (IgA, IgA), (IgG, IgG), (IgM, IgM)};

$\mathfrak{I}_7$(= Eos) = (W_7, R_7) იყოს 4 -ნიშნა კრიპკეს ფრეიმი აგენტი 7-სთვის , სადაცW_7 = {LT, PAF} და R_7არის ბინარული მიმართება {(LT, LT), (PAF, PAF)}.

W = {W1, W2, W3, W4, W5, W6, W7} იყოს აგენტების სისტემა, რომელიც არის

იმუნური სისტემის სიმრავლე. $\mathfrak{I}$ = (W, R) წარმოადგენს გლობალურ იმუნურ სისტემას, როგორც გლობალური 4 -ნიშნა კრიპკეს ფრეიმი, სადაც R არის {(W1, W2), (W3, W3), (W3, W3), (W4, W4), (W5, W5), (W6, W6),(W5, W3), (W1, W3), W1, W3), (W2, W5), (W4, W5), (W5, W4), (W5, W3), (W5, W6),(W5, W7), (W3, W7)} მიმართების ტრანზიტული ჩაკეტა, იხ. ცხრილი 1.



ცხრილი 1.

მწვავე ალერგიული რეაქციები გამოწვეულია ჰისტამინის და ლიპიდური შუამავლების ანტიგენური გამოთავისუფლებული გათავისუფლებისგან. ქრონიკული ალერგიული რეაქციები, მათ შორის გვიანი ფაზის რეაქცია, შეიძლება დამოკიდებული იყოს გზების კომბინაციაზე, მათ შორის ეოზინოფილური რეკრუტირება, ჰისტამინის გათავისუფლების ფაქტორები და ნეიროგენული ანთება.

ახლა ჩვენ ვასრულებთ იმუნური სისტემის მოდელის გარკვეულ ინტერპრეტაციას. მოდით $\mathfrak{I}$= (W, R), W = {W$_1$, ..., Wn} არის n აგენტის (ან შესაძლო სამყაროს) სიმრავლე; R ⊂ W × W. W-ზე არის ბინარული რეფლექსიური და ტრანზიტული მომართება (ე.წ. ACCESSIBILITY მიმართება i (= Wi)) აგენტებს შორის.

4-ნიშნა აღწერილი კრიპკეს გლობალური მოდელი (ან აღწერითი კრიპკეს გლობალური მოდელი) არის წყვილი M= $(J,\ V)$ სადაც $V(\phi,\ W_i) = \wedge\{e_i(\phi,\ w) : w \in W_i,$

$e_i : Var \times W_i \to S_3^C\}, V(\Box\phi, W_i) = \wedge\{V(\phi, W_j) : (W_i, W_j) \in R\}, V(\Diamond\phi, W_i) = \vee\{V(\phi, W_j) : (W_i, W_j) \in R\}$, სადაც $\Box\phi$ და $\Diamond\phi$ არის აბრევიატურა $\Box_1\phi \wedge \ldots \wedge \Box_n\phi$ და $\Diamond_1\phi \vee \ldots \vee \Diamond_n\phi$.

15. დასკვნა

ჩვენს მიერ შემოღებულია ახალი ლოგიკები - ოთხ-ნიშნა მულტიმოდალური ეპისტემიკური ლუკასევიჩის ლოგიკები $EL_4^c(n)$, რომელთაც ადეკვატური ალგებრული და რელაციური სემანტიკას წარმოადგენენ $EL_4^c(n)$-ალგებრები და 4-ნიშნა დესკრიფციული კრიპკეს ფრაიმები.

შემოღებული ოთხნიშნა მულტიმოდალური ეპისტემიკური ლუკასევიჩის ლოგიკა კონსტანტებით $EŁ_4^c(n)$, რომელიც ოთხნიშნა ლუკასევიჩის ლოგიკის $Ł_4$ გაფართოვებაა, რომლის ენა გაფართოვებულია ნულარული და უნარული კავშირებით; ამავე დროს განვითარებულია ამ ლოგიკების შესაბამისი ალგებრული თეორია. უნარული კავშირები ინტერპრეტირებულია როგორც მოდალური ოპერატორები (ცოდნის ოპერატორები). ეს ლოგიკა განსაზღვრულია აქსიომატიკურად და დამტკიცებულია სისრული თეორემა შესაბამისი ალგებრათა მრავალსახეობის მიმართ. აღვნიშნოთ, რომ მოცემული ლოგიკა გამოიყენება იმუნური სისტემის შესწავლაში.

გამოყენებული ლიტერატურა

[BRV] P. Blackburn, M. de Rijke, and Y. Venema, Modal logic, Number 53 in Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[BEGR] F. Bou, F. Esteva, L. Godo, and R. Rodr__guez. n- Lukasiewicz modal logic. Manuscript, 2007.

[CR] X. Caicedo and R. Rodr__guez, A G• odel similaritybased modal logic, Manuscript. A shortened version was published as A G• odel modal logic, in: Proc. of Logic, Computability and Randomness 2004. Cordoba, Argentina, 2007.

[CZ] A. Chagrov and M. Zakharyaschev, Modal Logic,volume 35 of Oxford Logic Guides. Oxford University Press, 1997.

[CG] I. Chaida and K. Glazek, A basic course on general algebra, Technical University Press, Zielona Gora, Poland.

[C] C. C. Chang, Algebraic Analysis of Many-Valued Logics, Trans. Amer. Math. Soc., 88(1958), 467-490.

[DGM] A. Di Nola, R. Grigolia, N. Mitskevich, Multimodal epistemic ukasiewicz logics with application in immune system, Soft Computing, Volume 19, Issue 11 (2015), pp. 3341-3351.

[F1] M. Fitting, Many-valued modal logics, Fundamenta Informaticae, 15:235254, 1992.

[F2] M. Fitting, Many-valued modal logics, II, Fundamenta Informaticae, 17:5573, 1992.

[G] R. Grigolia, Algebraic analysis of Lukasiewicz-Tarski n-valued logical systems, Selected papers on Lukasiewicz Sentential Calculi, Wroclaw, 81-91 (1977)

[H] P. Hajek. Metamathematics of fuzzy logic, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

[HT] G. Hansoul and B. Teheux, Completeness results for many-valued Lukasiewicz modal systems and relational semantics, 2006. Available at http://arxiv.org/abs/math/0612542.

[K] C. D. Koutras, A catalog of weak many-valued modal axioms and their corresponding frame classes, Journal of Applied Non-Classical Logics, 13(1):4772, 2003.

[M] A. M. Mironov. Fuzzy modal logics. Journal of Mathematical Sciences, 128(6):36413483, 2005.

[Ra] N. Rashevsky, Organismic Sets, J.M. Richards Lab, Grosse-Pointe Park, MI, (1972).

[Ro1] R. Rosen, A relational theory of biological systems, Bull. Math. Biophysics 20, 245-260 (1958).

[Ro2] R. Rosen, The representation of biological systems from the standpoint of the theory of categories, Bull. Math.Biophysics 20, 317-342 (1958).

[P] Timothy Porter, Geometric Aspects of Multiagent Systems, Electronic Notes in Theoretical Computer Science 81 (2003), URL: http://www.elsevier.nl/locate/entcs/volume81.html.

[S] N. Y. Suzuki, Kripke frame with graded accessibility and fuzzy possible world semantics, Studia Logica, 59(2):249269, 1997.

[W] H. Woodger, The Axiomatic Method in Biology, Cambridge University Press, (1937).