ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტი

გიორგი კაკოჩაშვილი

უოლშისა და ჰაარის პოლინომებით აპროქსიმაცია ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეში

სამაგისტრო პროგრამა: მათემატიკა

მისანიჭებელი ხარისხი: მათემატიკის მაგისტრი

ხელმძღვანელი: შალვა ზვიადაძე, მათემატიკის დოქტორი, თსუ ასისტენტ პროფესორი

თბილისი 2017

სარჩევი

ანოტაცია

ნაშრომში მოყვანილია ზოგიერთი შედეგი ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეში ჰაარისა და უოლშის პოლინომებით აპროქსიმაციის შესახებ.

გამოყენებულია ექსტრაპოლაციის თეორემა და მაკენხაუპტის A_p წონები. მიღებულია ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეში გოლუბოვის და შარაპუდინოვის ზოგიერთი თეორემის ანალოგები. ასევე დამტკიცებულია ოწრონიანი უტოლობა ფურიე-უოლშის 2^n რიგის კერძო ჯამებისთვის.

Summary

In the present work some results concerning to the approximation by Haarand Walsh polynomials in the variable exponent Lebesgue spaces are given.

In the present work is given some results concerning to the approximation by Haar and Walsh polynomials in the variable exponent Lebesgue spaces.

It is used theorem of extrapolation and Muckenhoupt A_p weights. There are obtained some analogues of Golubov's and Sharapudinov's theorems in the variable exponent Lebesgue spaces. Also there is proved two weight inequality for 2^n-th partial sums of Walsh-Fourier series.

1 შესავალი

გასული (მეოცე) საუკუნის ბოლოს ცხადი გახდა, რომ კლასიკური ფუნქციური სივრცეები აღარ არის საკმარისი მთელი რიგი პრობლემების ამოსახსნელად, რომლებიც ჩნდება არაწრფივი დრეკადობის თეორიის, უკუმშვად სითხეთა დინების მექანიკის მათემატიკურ მოდელებში, არაწრფივ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიაში და სხვა. გაჩნდა ახალი სივრცეების შემოღებისა და გამოკვლევის აუცილებლობა. ამ გარემოებამ განაპირობა ახალი, არასტანდარტული ბანახის ფუნქციური სივრცეების შემოღება და მათი ინტენსიური გამოკვლევა. ერთ-ერთ ასეთ ფუნქციურ სივრცეს წარმოადგენს ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცე.

როგორც დასახელებიდან ჩანს, ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცე წარმოადგენს კლასიკური ლებეგის სივრცის განზოგადებას თუ მუდმივ p მაჩვებელს ჩავანაცვლებთ არამუდმივი ფუნქციით $p(\cdot)$. ამგვარად მიღებული ბანახის $L^{p(\cdot)}$ სივრცეს მრავალი მსგავსი თვისება აქვს კლასიკური L^p სივრცეებისა, თუმცა მრავალი განმასხვავებელი თვისებაც გააჩნია. მაგალითისთვის მოვიყვანთ მცირე ჩამონათვლას:

- $L^{p(\cdot)}$ სივრცეში არაა შემოსაზღვრული ძვრის ოპერატორი $T_h : L^{p(\cdot)} \to L^{p(\cdot)}$, $T_h f(x) = f(x+h)$;

- ცვლადმაჩვენებლიანი სივრცისთვის ანალოგი არა აქვს იუნგის უტოლობას ნახვევისთვის $||f * g||_{L^{p(\cdot)}} \leq C||f||_{L^1} \cdot ||g||_{L^{p(\cdot)}}$.

- ასევე ანალოგი არ აქვს ცვლადი მაჩვენებლისთვის შემდეგ ფორმულას
$$\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx = p \int_0^\infty t^{p-1} |\{x \in \Omega : |f(x)| > t\}| dt;$$

- მაქსიმალური, პუანკარეს, სობოლოევის და სხვა ზოგიერთი მნიშვნელოვანი უტოლობა მოდულარის ფორმით არაა სამართლიანი ცვლადი მაჩვენებლების შემთხვევაში. მაგალითისთვის ლერნერმა [40] აჩვენა, რომ უტოლობა
$$\int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^{p(x)} dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(x)} dx$$
სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ მაჩვენებლი მუდმივია $p(x) = p$ და $p \in (1; +\infty)$.

ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცე შემოიღო ვ. ორლიჩმა ჯერ კიდევ გასული საუკუნის 30-იან წლებში. თავდაპირველად აღნიშნული სივრცის შემოღება განპირობებული იყო თეორიული მოსაზრებებით, მაგრამ გასული საუკუნის და ამ, საუკუნის მიჯნაზე ინტერესი ამ სივრცეების მიმართ გაძლიერდა. მაგალითისათვის "Mathematical Reviews"—ის ინფორმაციით 2000 წლამდე ამ საკითხებს მიეძღვნა 15 სამეცნიერო სტატია, 2000 - 2004 წლებში 31 სამეცნიერო სტატია, 2005-2010 წლებში კი 267, მიუხედავად იმისა, რომ მოყვანილი სტატისტიკა არაზუსტია, სურათი მაინც მრავლისმთქმელია.

ინტერესი ცვლადმაჩვენებლიანი სივრცეების მიმართ გაძლიერდა, ვინაიდან, უკანასკნელ წლებში გამოიკვეთა აღნიშნული სივრცეების გამოკვლევის არსებითი აუცილებლობა მრავალ გამოყენებით ამოცანაში. გამოყენების არეალიდან აღსანიშნავია ელექტრორეოლოგიური სითხეების მათემატიკური მოდელი.

ელექტრორეოლოგიური სითხეები ეს ისეთი სითხეებია, რომელთა სიბლანტე იცვლება (ხშრად მკვეთრად) ელექტრული ველის ზემოქმედებით. მიუხედავად იმისა, რომ ამგვარი სითხეები ექსპერიმენტების გზით საკმაოდ შესწავლილია სრული თეორიული მოდელი კვლავინდებურად არ არსებობს. სითხეთა დინამიკაში ამგვარ სითხეებს მოიხსენიებენ, როგორც არანიუტონისეულ სითხეებს. ერთ-ერთი მოდელი, რომელიც აქტიურად შეისწავლება, არის, როცა ენერგია მოიცემა შემდეგი ინტეგრალით

$$\int_{\Omega} |Du(x)|^{p(x)} dx$$

სადაც Du არის სიბლანტის გრადიენტის სიმეტრიული ნაწილი, ხოლო მაჩვნებელი არის ელექტრული ველის ფუნქცია. აღნიშნული მოდელი შემოიღო რუზიცკამ (იხ. [47], [48]) და შემდეგში მის განვითარებაში მიიღეს მონაწილეობა ასერბიმ და მინჯიონიმ. მოდელის შესწავლისას წარმოქმნილმა პრობლემებმა მნიშვნელოვანი სტიმული მისცა ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგისა და ცვლადმაჩვენებლიანი სობოლევის სივრცეების შესწავლას.

ზემოაღნიშნულის გარდა ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეები გამოიყენება სხვა ფიზიკური მოვლენების აღმწერ მათემატიკურ მოდლებშიც. მაგალითად: კვაზი-ნიუტონისეული სითხეების, თერმისტორის (თერმო რეზისტორის) ამოცანის, ფოროვან გარემოში სითხეთა მოძრაობისა და მაგნიტოსტატიკის მათემატიკურ მოდელებში.

ცვლადმაჩვენებლიან სივრცეებს იყენებენ გამოსახულების აღდგენის ამოცანაშიც, ბლუმგრინმა ჩათვალა, რომ უფრო მკაფიო გამოსახულების მიღება შეიძლება ინტერპოლების ტექნიკით, რომელიც იყენებს ცვლად მაჩვენებელს, შესაბამისი ნორმა არის

$$\int_{\Omega} | \bigtriangledown u(x)|^{p(\bigtriangledown u)} dx$$

სადაც მაჩვენებელი $p(\cdot)$ მონოტონურად იკლებს 2-დან 1-მდე, როცა $\bigtriangledown u$ იზრდება.

უკანასკნელ წლებში აღნიშნული მიდგომა და მასთან დაკავშირებული საკითხები გადმოცემულია შემდეგ მონოგრაფიებსა და შრომებში [1], [6], [7], [11], [19], [41], [47], [57]. ზემო აღნიშნული შრომების უმრავლესობაში გამოიკვეთა აუცილებლობა ჰარმონიული ანალიზის მეთოდებისა და შედეგების ანალოგების დადგენისა ცვლადმაჩვენებლიან სივრცეებში. მალევე ნათელი გახდა, რომ უმთავრესი პრობლემაა განისაზღვროს $p(\cdot)$ მაჩვენებელზე დადებული პირობები იმგვარად, რომ ჰარმონიული ანალიზის კლასიკური ოპერატორები, როგორებიცაა: მაქსიმალური ოპერატორი, სინგულარული ინტეგრალები, წილადური ინტეგრალები და სხვა იყოს შემოსაზღვრული $L^{p(\cdot)}$ სივრცეში.

უნდა აღინიშნოს, რომ დღეისათვის ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში ჰარმონიული ანალიზის ინტეგრალურ ოპერატორთა თეორიამ გამოყენებებითურთ განვითარების მაღალ დონეს მიაღწია. ამის დასტურია უკანასკნელ წლებში გამოქვეყნებული მონოგრაფიები ([13], [18], [28], [29], [30]). აღნიშნული თემატიკა ახალია და სწრაფად მზარდი. მის მიმართ ინტერესი სულ უფრო იმატებს, მრავალი გამოჩენილი ქართველი თუ უცხოელი მეცნიერი (ვ. კოკილაშვილი, ა. მესხი, თ. კოპალიანი, ვ. პაატაშვილი, გ. ონიანი, ლ. დიენინგი, ა. ნეკვინდა, ა. ლერნერი, ლ. პიკი, მ. რუზიცკა, ს. სამკო, დ. ედმუნდსი, ა. კარლოვიჩი, დ. კრუზ-ურიბე, ა. ფიორენზა, კ. პერეზი, ჯ. მარტელი, ს. ნეუგებაუერი, პ. ჰასტო, ზ. ფანი, თ. ფუტამურა, უ. მიზუტა, თ. სიმომურა, პ. ჰარჯულეტო, ს. ვარონენი, ვ. ლატვალა და სხვ.) სწავლობს აღნიშნულ პრობლემატიკას იხ. მონოგრაფიები [12], [23] და მათი ბიბლიოგრაფია.

აპროქსიმაციის თეორია მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ჰარმონიული ანალიზის პრობლემათა კვლევის პროცესში. კლასიკურ ფუნქციურ სივრცეებში ფუნქციათა კონსტრუქციული თეორია გადმოცემულია ცნობილ მონოგრაფიებში (იხ. [2], [8], [17], [43], [45], [55], [56]) გამოკვლევები ამ მიმართულებით დღესაც ინტენსიურად გრძელდება (იხ. მაგალითად [14], [15], [22], [54]).

მოცემული უწყვეტი ფუნქციიდან ფურიეს კერძო ჯამების გადახრის შესახებ პირველი შედეგი მიიღო ლებეგმა [42]. მან დაამტკიცა, რომ

$$|f(x) - S_n(f, x)| \le (\ln n + 3)E_n(f),$$

სადაც $S_n(f, x)$ არის f ფუნქციის ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის კერძო ჯამი, ხოლო $E_n(f)$ არის f ფუნქციის ტრიგონომტრიული პოლინოიმებით საუკეთესო მიახლოება უწყვეტ ფუნქციათა სივრცეში.

აღსანიშნავია, რომ აღნიშნულ შემთხვევაში საუკეთესო მიახლოება ფასდება ფუნქ-

ციის უწყვეტობის მოდულით (ჯექსონის თეორემა). ხოლო საუკეთესო მიახლოების შეფასება ფუნქციათა სხვადასხვა კლასებისთვის საშუალებას იძლევა აღნიშნული გადახრა უფრო ზუსტად შევაფასოთ. ამ მიმართულებით ცნობილი შედეგები აქვთ კოლმოგოროვს, ნიკოლსკის, კორნეჩუკს და სხვათ.

ჯექსონის თეორემის ანალოგი უწყვეტი ფუნქციების უოლშისა და ჰაარის პოლინომებით საუკეთესო მიახლოებებისათვის მიღებული აქვს გოლუბოვს (იხ. [24]).

მოცემული ფუნქციიდან ფურიე-ჰაარის მწკრივის კერძო ჯამების გადახრის შეფასება L^p სივრცის ფუნქციებისათვის, მოგვცა ულიანოვმა.

ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში ფუნქციათა მიახლოების მიმართულებით უნდა აღინიშნოს შარაპუდინოვის პიონერული ხასიათის ნაშრომები ([50], [51], [52], [53]) და ნაშრომთა შემდგომი ციკლი, რომელიც ასახულია [54] მონოგრაფიაში.

ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის წონიან სივრცეებში ფუნქციათა აპროქსიმაციის ამოცანები შესწავლილია აკგუნის, კოკილაშვილის, ჩაიჩენკოს, ისრაფილოვისა და სამკოს შრომებში (იხ. [3] [4], [5], [9], [37]). აღნიშნულ ნაშრომებში შესწავლილია პერიოდულ ფუნქციათა ტრიგონომეტრიული პოლინომებით აპროქსიმაციის ზოგიერთი საკითხი.

შევნიშნოთ, რომ აღნიშნული ნაშრომების უმრავლესობაში მოთხოვნილია, რომ მაჩვენებელი აკმაყოფილებდეს ლოკალურ ჰელედერის ლოგარითმულ პირობას, ამასთან $\inf p(x) > 1$. შარაპუდინოვს თავის ნაშრომში [50] განხილული აქვს $\inf p(x) = 1$ შემთხვევა, თუმცა მაჩვენებელზე ლოგარითმული პირობა მაინც შენარჩუნებულია. აგრეთვე შევნიშნავთ, რომ ზემოთ მოყვანილ შრომებში მიღებული შედეგები მიღებულია ტრიგონომეტრიული სისტემისთვის.

აღნიშნული ამოცანები ღიაა უოლშისა და ჰაარის სისტემებისთვის. ამ ნაშრომში ჩვენ დავადგენთ ტრიგონომეტრიული სისტემებისთვის მიღებული შედეგების ანალოგებს უოლშისა და ჰაარის სისტემებისთვის. ამასთან ტრიგონომეტრიული სისტემისათვის ზოგიერთ შემთხვეაში მოვხსნით ჰელდერის ლოგარითმულ პირობას.

ჩვენ გამოვიყენებთ განსხვავებული ტიპის მეთოდებს, რომელიც ეყრდნობა წონიან სივრცეებსა და რუბიო დე ფრანსიას ექსტრაპოლაციის თეორიას.

გარდა ამისა ნაშრომში ასევე დამტკიცებულია ზოგიერთი ორწონიაანი უტოლობა.

2 ძირითადი აღნიშვნები და ცნებები

ამ თავში მოვიყვანთ ძირითად აღნიშვნებს და ცნებებს. უპირველეს ყოვლისა შემოვიღებთ ბანახის ფუნქციურ სივრცეს (ბენეტისა და შარპლის მიხედვით) და შემდგომში მოვიყვანთ ამ სივრცეთა კერძო შემთხვევებს ლებეგის წონიანი სივრცისა და ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცის სახით.

ბანახის ფუნქციური სივრცე

დაუშვათ $\mathcal{M}$ იყოს სიმრავლე ყველა ზომადი ფუნქციისა. წყვილს $(X, ||\cdot||_X)$ ვუწოდებთ ბანახის ფუნქციურ სივრცეს თუ მოცემულია ასახვა $||\cdot||_X : \mathcal{M} \to [0;\infty]$ და სიმრავლე

$$X = \{f \in \mathcal{M} : ||f||_X < \infty\},$$

ისეთი, რომ სრულდება შემდეგი პირობები:

1. $||f||_X = |||f|||_X$ და $||f||_X = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f \equiv 0$;

2. $\|f+g\|_X \leq \|f\|_X + \|g\|_X$;

3. $\|\alpha f\|_X = |a| \, \|f\|_X$, ყოველი $\alpha \in \mathbb{R}$-თვის.

4. X არის სრული ნორმირებული ვექტორული სივრცე $||\cdot||_X$ მიმართ.

5. თუ $|f| \leq |g|$ თითქმის ყველგან, მაშინ $||f||_X \leq ||g||_X$;

6. თუ $\{f_n\} \subset \mathcal{M}$ არის მიმდევრობა ისეთი, რომ $|f_n| \nearrow |f|$ თითქმის ყველგან, მაშინ $||f_n||_X \nearrow ||f||_X$;

7. თუ $E \subset \Omega$ არის ზომადი სიმრავლე და $|E| < \infty$, მაშინ $||\chi_E||_X < \infty$;

8. $\int_E |f(x)|dx \leq C_E ||f||_X$ თუ $|E| < \infty$, სადაც $C_E < \infty$ დამოკიდებულია E და X-ზე,

მაგრამ არა f-ზე.

განსაზღვრება 2.1 *ვიტყვით, რომ $f \in X$ ფუნქციას გააჩნია აბსოლუტურად უწყვეტი ნორმა თუ ნებისმიერი ერთმანეთში ჩალაგებული ზომად სიმრავლეთა E_k მიმდევრობისათვის, რომლისთვისაც $|E_k| \to 0$, $k \to +\infty$ გვაქვს $||f\chi_{E_k}||_X \to 0$, $k \to +\infty$.*

ნორმა $||\cdot||_X$ არის აბსოლუტურად უწყვეტი თუ ყოველ ფუნქციას X-ში აქვს აბსოლუტურად უწყვეტი ნორმა.

განვსაზღვროთ X' სიმრავლე

$$X' = \left\{ g \ : \ \int_\Omega f(x)g(x)dx < \infty, \, \forall f \in X \right\}.$$

X'-ზე შემოვიღოთ ე.წ.ასოცირებული ნორმა:

$$||g||_{X'} := \sup \left\{ \int_\Omega |f(x)g(x)|dx \ : \ ||f||_X \le 1 \right\}.$$

X^*-ით აღვნიშნოთ X-ის შეუღლებული სივრცე, მაშინ შემდეგი წინადადებები ერთმანეთის ექვივალენტურია:

1. $||\cdot||_X$ ნორმა არის აბსოლუტურად უწყვეტი.

2. X არის სეპარაბელური.

3. $X^* = X'$.

განსაზღვრება 2.2 *ბანახის X სივრცეს ეწოდება თანაბრად ამოზნექილი თუ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, ისეთი, რომ თუ $x, y \in X$, $||x||_X = ||y||_Y = 1$ და $||x-y||_X \ge \varepsilon$, მაშინ $||x+y||_X \le 2 - \delta$.*

ჰარდისა და ლიტლვუდის მაქსიმალური ოპერატორი

ჰარდისა და ლიტლვუდის მაქსიმალური ოპერატორი ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ოპერატორია ჰარმონიული ანალიზისა. ამ პარაგრაფში ჩვენ მოვიყვანთ ჰარდისა და ლიტლვუდის მაქსმალური ოპერატორის განსაზღვრებას და მასთან დაკავშირებით ზოგიერთ ცნობილ ფაქტს.

დავუშვათ μ არაუარყოფითი ბერელის ზომაა და სასრულია $\mathbb{R}^n$-ის შემოსაზღვრულ ქვესიმარავლეებზე. განვიხილოთ ფუნქცია

$$Mf(x) = \sup \frac{1}{\mu(I)} \int_I f(t) d\mu(t),$$

სადაც სუპრემუმი აიღება ყველა I კუბის მიმართ, რომელიც მოიცავს x წერტილს.

ვიტყვით, რომ ჰარდისა და ლიტლვუდის მაქსიმალური ოპერატორი არის ძლიერი ტიპის, თუ ოპერატორი შემოსაზღვრულია ბანახის X ფუნქციური სივრციდან Y ფუნქციურ სივრცეში ანუ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი C ისეთი, რომ

$$||Mf||_Y \leq C \cdot ||X||_X, \quad \forall f \in X.$$

ვიტყვით, რომ ჰარდისა და ლიტლვუდის მაქსიმალური ოპერატორი არის სუსტი ტიპის, თუ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი C ისეთი, რომ სრულდება

$$||\lambda \cdot \chi_{\{Mf > \lambda\}}||_Y \leq C ||f||_X.$$

აღნიშნული ოპერატორისთვის სხვადასხვა სივრცეებში კარგადაა შესწავლილი ძლიერი და სუსტი უტოლობები. მაგალითისათვის ამ ოპერატორისთვის სრულდება სუსტი უტოლობა L^1 სივრცეში, სრულდება ძლიერი უტოლობა L^p სივრცეში სადაც $1 < p \leq +\infty$. თუმცა ზოგიერთ სივრცეში კვლავინდებურად პრობლემატური საკითხია დადგენა პირობებისა რომლებიც უზრუნველყოფს ძლიერი ან სუსტი უტოლობის შესრულებას (მაგ.: ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცე).

ყოველი $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილისთვის ამ წერტილის მომცველი შემოსაზღვრული, დადებითი ზომის მქონე სიმრავლეთა ოჯახი ავღნიშნოთ $\mathcal{B}(x)$ სიმბოლოთი. ამასთან ამ ოჯახიდან გამოიყოფა ერთი მაინც მიმდევრობა $\{R_k\} \subset \mathcal{B}$ ისეთი, რომ $\mu(R_k) \to 0$, $k \to +\infty$.

განსაზღვრება 2.3 *$\mathcal{B}$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ გაერთიანებული ოჯახი*

$$\mathcal{B} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{B}(x)$$

და ვუწოდოთ მას დიფერენციალური ბაზისი.

დიფერენციალური ბაზისის მაგალითებია: თუ $\mathcal{B}(x)$ ოჯახის როლში ვიგულისხმებთ x წერტილის მომცველ ყველა ღია კუბს, x წერტილის მომცველ ყველა მართკუთხა პარალელეპიპედს, x წერტილის მომცველ ყველა ორობით ინტერვალს და ა.შ.

ხშირად იხილავენ ჰარდისა და ლიტლვუდის მაქსიმალური ოპერატორის განზოგადებულ ვარიანტებს სხვადასხვა დიფერენციალური ბაზისების მიმართ. ვთქვათ მოცემულია $\mathcal{B}$ ბაზისი, მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი შესაბამისი $\mathcal{B}$ ბაზისით განსაზღვრულია შემდეგნაირად,

$$M_{\mathcal{B}}(f)(x) = \sup_{I \in \mathcal{B}(x)} \frac{1}{|I|} \int_I |f(y)| dy.$$

წონიანი სივრცეები და მაკენხაუპტის წონები

ბანახის ფუნქციურ სივრცეთა ერთ-ერთ კერძო მაგალითს წარმოადგენს ე.წ. ლებეგის წონიანი სივრცეები. ამ პარაგრაფში მოვიყვანთ ლებეგის წონიანი სივრცის განსაზღვრებას და ზოგიერთ დებულებას, რომელიც მნიშვნელოვან როლს ასრულებს რუბიო დე ფრანსიას ექსტრაპოლების თეორიაში.

განსაზღვრება 2.4 *ვთქვათ მოცემულია $w : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ ზომადი ფუნქცია. L^p_w ($p \geq 1$) სიმბოლოთი აღვნიშნავთ სივრცეს, ყველა ისეთი ზომადი f ფუნქციებისა რომლისთვისაც*

$$||f||_{p,w} = \left(\int_0^1 |f(x)|^p w(x) dx \right)^{1/p} < \infty.$$

w ფუნქციას ვუწოდებთ წონას. ხოლო L^p_w-ს ვუწოდებთ ლებეგის წონიან სივრცეს w წონით.

ჰარდისა და ლიტლვუდის მაქსიმალური ოპერატორის შესწავლა სხვადასხვა სივრცეებზე ფრიად მნიშვნელოვანი ამოცანაა და ცხადია წონიანი სივრცის შემთხვევაში ფრიად მნიშვნელოვანია დადგენა პირობებისა, რომელიც უზრუნველყოფს აღნიშნული ოპერატორის შემოსაზღვრულობას ლებეგის წონიან სივრცეზე.

ამ საკითხთან დაკავშირებით მაკენხაუპტმა შემოიღო წონების $\mathcal{A}_p$ კლასის ცნება. ვიტყვით, რომ w წონა ეკუთვნის მაკენჰხაუპტის $\mathcal{A}_p$ კლასს ($1 < p < \infty$), თუ

$$\sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int_I w(x) dx \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I (w(x))^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} < \infty$$

სადაც სუპრემუმი აიღება ყველა I კუბის მიმართ.

სამართლიანია შემდეგი:

თეორემა 2.1 (მაკენჰაუპტი) *დავუშვათ μ არის ბორელის არაუარყოფითი, შემოსაზღვრულ სიმრავლეზე სასრული ზომა. დავუშვათ ჰარდისა და ლიტლვუდის მაქსიმალური ოპერატორისთვის სრულდება სუსტი უტოლობა $L^p_\mu(\mathbb{R}^n)$ სივრცეში რაიმე p რიცხვისთვის $(1 \leq p < \infty)$ ანუ*

$$\lambda^p \mu(\{Mf > \lambda\}) \leq C \cdot ||f||^p_{L^p_\mu}, \quad \forall f \in L^p_\mu(\mathbb{R}^n),$$

მაშინ:

(i) *μ არის აბსოლუტურად უწყვეტი ლებეგის ზომის მიმართ. ე.ი არსებობს არაუარყოფითი, ლოკალურად ინტეგრებადი w ფუნქცია ისეთი, რომ $d\mu(x) = w(x)dx$.*

(ii) *ნებისმიერი ღია I კუბისთვის და $f \in L^p_\mu(\mathbb{R}^n)$*

$$\frac{1}{|I|}\int_I |f(y)|dy \leq C\left(\frac{1}{\mu(I)}\int_I |f(y)|^p d\mu(y)\right)^{1/p} \tag{2.1}$$

სადაც $C = C_{\mu,p}$ დამოუკიდებელია f-გან.

(iii) *$w \in \mathcal{A}_p$, ანუ w წონისთვის სრულდება მაკენჰაუპტის პირობა. ე.ი., არსებობს მუდმივი $C = C(\mu, p)$, რომელიც არაა დამოკიდებული I ღია კუბზე ისეთი, რომ*

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy\right)\left(\frac{1}{|I|}w(y)^{-1/(p-1)}dy\right)^{p-1} \leq c, \quad 1 < p < \infty \tag{2.2}$$

ან

$$\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy \leq c \inf_I w, \quad p = 1 \tag{2.3}$$

(iv) *თითოეული ღია I კუბისთვის და I-ს ზომადი E ქვესიმრავლისთვის*

$$\frac{\mu(I)}{\mu(E)} \leq C \cdot \left(\frac{|I|}{|E|}\right)^p, \tag{2.4}$$

სადაც $C := C(\mu, p)$ დამოკიდებული არაა E-ზე და I-ზე.

თეორემა 2.2 (მაკენჰაუპტი) *დავუშვათ $w \in \mathcal{A}_1$, მაშინ M ასახავს $L^p_\mu(\mathbb{R}^n)$ სივრცეს სუსტ $wk - L^p_\mu(\mathbb{R}^n)$. ამასთან ოპერატორის ნორმა დამოუკიდებელია $\mathcal{A}_p$ სივრცის ელემენტზე.*

თეორემა 2.3 (მაკენჰაუპტი) *დავუშვათ $w \in \mathcal{A}_p$, $1 < p < \infty$. მაშინ M არის უწყვეტი ასახვა $L^p_\mu(\mathbb{R}^n)$ სივრციდან თავის თავში, რომლის ნორმა დამოუკიდებელია $\mathcal{A}_p$-სგან.*

თეორემა 2.4 (ჰელდერის შებრუნებული უტოლობა) *დავუშვათ $w \in \mathcal{A}_1$, მაშინ არსებობს დადებითი რიცხვი η ისეთი, რომ ყოველი I კუბისთვის გვაქვს*

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I w^{1+\eta}(x)dx\right)^{\frac{1}{1+\eta}} \le C \cdot \frac{1}{|I|}\int_I w(x)dx,$$

სადაც C არ არის დამოკიდებული $\mathcal{A}_1$-ის ელემენტზე და I კუბზე.

წინადადება 2.1 *დაუშვათ w_1, $w_2 \in \mathcal{A}_1$ და ვთქვათ $w(x) = w_1(x)w_2(x)^{1-p}$, $1 < p < \infty$; მაშინ $w \in \mathcal{A}_p$*

წინადადება 2.2 *დაუშვათ $w(x) = w_1(x)w_2^{1-p}(x)$, $w_1, w_2 \in \mathcal{A}_1, \quad 1 < p < \infty$, მაშინ*

(i) *არსებობს $\varepsilon > 0$ ისეთი, რომ $w \in A_{p-\varepsilon}$;*

(ii) *არსებობს დადებითი რიცხვი η ისეთი, რომ w წონისთვის სრულდება ჰელდერის შებრუნებული უტოლობა;*

(iii) *არსებობს $\delta > 0$ ისეთი, რომ ყოველი I ღია კუბისთვის და ამ კუბის ყოველი ზომადი E ქვესიმრავლისთვის სრულდება*

$$\frac{\mu(E)}{\mu(I)} \le C \cdot \left(\frac{|E|}{|I|}\right)^{\delta},$$

სადაც C არაა დამოკიდებული $\mathcal{A}_p$-ზე E-ზე და I-ზე.

(iv) *არსებობს დამოუკიდებელი $\mathcal{A}_p$-სგან C ისეთი, რომ*

$$\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{-np}d\mu(x) \le C \cdot \mu(I_0),$$

სადაც I_0 აღნიშნავს $\mathbb{R}^n$-ის ერთეულოვან კუბს.

თეორემა 2.5 (ჯონსი) *დაუშვათ $w \in \mathcal{A}_p, \quad 1 < p < \infty$. მაშინ არსებობენ წონები $w_1, w_2 \in \mathcal{A}_1$ ისეთი, რომ $w(x) = w_1(x) \cdot w_2(x)^{1-p}$.*

ხშირად იხილავენ წონათა $\mathcal{A}_p$ კლასებს რომელიმე დიფერენციალური ბაზისის მიმართ. ანუ ვიტყვით, რომ w წონისთვის სრულდება მაკენხაუპტის პირობა $\mathcal{B}$ დიფერენციალური ბაზისის მიმართ თუ

$$\sup_{I\in\mathcal{B}}\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I (w(x))^{-1/(p-1)}dx\right)^{p-1} < \infty.$$

ამ შემთხვევაში ვწერთ, რომ $w \in \mathcal{A}_p^{\mathcal{B}}$.

ხშირად იხილავენ ე.წ. ორწონიან უტოლობებს და შესაბამისად მაკენხაუპტის პირობას წონათა წყვილებისათვის. ვიტყვით, რომ წონათა (w, v) წყვილისთვის სრულდება მაკენხაუპტის პირობა და დავწერთ $(w, v) \in \mathcal{A}_p$ თუ

$$\sup_I \left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I (v(x))^{-1/(p-1)}dx\right)^{p-1} < \infty.$$

ასევე იხილავენ მაკენხაუპტის პირობას წონათა წყვილისათვის რაიმე $\mathcal{B}$ დიფერენციალური ბაზისის მიმართ ამ შემთხვევაში წერენ $(w, v) \in \mathcal{A}_p^{\mathcal{B}}$.

ასევე იხილავენ მაკენხაუპტის კლასებს სხვადასხვა ბაზისების მიმართ.

ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეები

ამ პარაგრაფში ჩვენ მოვიყვანთ ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცის განსაზღვრებას და ზოგიერთ მნიშვნელოვან დებულებას.

განსაზღვრება 2.5 *მოცემულია Ω სიმრავლე. $\mathcal{P}(\Omega)$ სიმბოლოთი ავღნიშნოთ სიმრავლე ლებეგის აზრით ზომადი $p(\cdot) : \Omega \to [1; +\infty]$ ფუნქციებისა. $\mathcal{P}(\Omega)$ სიმრავლის ელემენტს ვუწოდებთ მაჩვენებელ ფუნქციას, ცვლად მაჩვენებელს, ექსპონენტა ფუნციას ან უბრალოდ ექსპონენტას.*

იმისათვის, რომ განვასხვავოთ ერთმანეთისგან რიცხვი p და ექსპონენტა ფუნქცია p, ჩვენ ფუნქციას ავღნიშნავთ $p(\cdot)$ სიმბოლოთი.

მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი ექსპონენტა ფუნქციებისა:

1) ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განვიხილოთ მუდმივი ექსპონენტა ფუნქცია $p(x) = p$, სადაც $1 \le p \le \infty$;

2) $p(x) = 2 + \sin(x)$.

ექსპონენტა ფუნქცია შეიძლება იყოს შემოუსაზღვრელიც, მაგალითად:

3) $\Omega = (1, \infty)$ და $p(x) = x$;

4) $\Omega = (0, 1)$ და $p(x) = 1/x$.

ცვლადი მაჩვენებლებისთვის შემოვღოთ ზოგიერთი სიმბოლური აღნიშნვნა. მოცემულია $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ და $E \subset \Omega$, მაშინ

$$p_-(E) := ess \inf_{x \in E} p(x), \qquad p_+(E) := ess \sup_{x \in E} p(x),$$
$$p_- := p_-(\Omega), \qquad p_+ := p_+(\Omega).$$

როგორც კლასიკური ლებეგის სივრცის შემთხვევაში ჰქონდა მნიშვნელობა იმას თუ რა სიდიდის იქნებოდა მაჩვენებელი p, ჩვენ შემთხვევაშიც სივრცის ყოფაქცევა დამოკიდებულია იმაზე თუ რა მნიშვნელობებს იღებს $p(\cdot)$ ექსპონენტა $(p(x) = 1, 1 < p(x) < \infty, p(x) = +\infty)$. ამიტომ ჩვენ დავყობთ Ω სიმრავლეს სამ ქვესიმრავლედ:

$$\Omega_\infty^{p(x)} = \{x \in \Omega : p(x) = \infty\},$$

$$\Omega_1^{p(x)} = \{\, x \in \Omega : \ p(x) = 1\},$$

$$\Omega_*^{p(x)} = \{\, x \in \Omega : \ 1 < p(x) < \infty\}.$$

მოცემული $p(\cdot)$ ცვლადი მაჩვენებლისთვის განვსაზღვროთ შეუღლებული ცვლადი მაჩვენებელი $p'(\cdot)$ შემდეგი ფორმულით:

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1, \quad x \in \Omega.$$

აღნიშვნებმა რომ არ გამოიწვიოს გაუგებრობა გაწარმოებისა და შეუღლების ოპერაციებს შორის აღნიშნულ ნაშრმში $p'(\cdot)$ სიმბოლოს ქვეშ ყოველთვის ვიგულისხმებთ შეუღლების პერაციას.

შევნიშნოთ რომ ადგილი აქვს შემდეგ დამოკიდებულებას:

$$(p'(\cdot))_+ = (p_-)^{'}, \quad (p'(\cdot))_- = (p_+)^{'}.$$

მოდულარი. მოცემული ექსპონენტა ფუნქციისთვის $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, ჩვენ გვინდა განვსაზღვროთ ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის $L^{p(\cdot)}$ სივრცე როგორც, სიმრავლე ყველა ისეთი ზომადი ფუნქციებისა, რომლისთვისაც:

$$\int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx < +\infty.$$

ამგვარ მიდგომას თან ახლავს გარკვეული პრობლემები, კერძოდ თუ Ω_∞ სიმრავლეს აქვს დადებითი ზომა, ამ მიდგომით ვეღარ ვისარგებლებთ. ამგვარი შემთხვევებიდან გამოსავლის საპოვნელად შემოვიტანოთ შემდეგი განსაზღვრება.

განსაზღვრება 2.6 *მოცემულია $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ და ლებეგის აზრით ზომადი ფუნქცია f. განვსაზღვროთ მოდულარი, შემდეგი გამოსახულებით:*

$$\rho(f) := \rho_{p(\cdot),\Omega}(f) := \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)} dx + ||f||_{L^\infty(\Omega_\infty)}$$

თუ f არის შემოუსაზღვრელი Ω_∞ სიმრავლეზე ან თუ $f \notin L^1(\Omega/\Omega_\infty)$, მაშინ მივიჩნიოთ $\rho(f) = +\infty$. როცა $|\Omega_\infty| = 0$, კერძოდ, როცა $p_+ < +\infty$, მაშინ $||f||_{L^\infty(\Omega_\infty)} = 0$. როდესაც $|\Omega \setminus \Omega_\infty| = 0$, მაშინ $\rho(f) = ||f||_{L^\infty(\Omega_\infty)}$. მოვიყვანოთ მოდულარის ფუნდამენტური თვისებები:

წინადადება 2.3 *მოცემულია Ω და $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$;*

1. *$\forall f$, $\rho(f) \geq 0$ და $\rho(|f|)$ = $\rho(f)$;*

2. *$\rho(f) = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ $f(x) = 0$ თითქმის ყველა $x \in \Omega$;*

3. *თუ $\rho(f) < \infty$, მაშინ $f(x) < \infty$, თითქმის ყველა $x \in \Omega$;*

4. *ρ არის ამოზნექილი: ანუ ყოველი $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$, გვაქვს*

$$\rho(\alpha f + \beta g) \leq \rho(\alpha f) + \rho(\beta g).$$

5. *ρ არის მონოტონური: თუ $|f(x)| \geq |g(x)|$ თ.ყ. მაშინ $\rho(f) \geq \rho(g)$;*

6. *ρ-ს აქვს უწყვეტობის თვისება: თუ არსებობს $\Lambda > 0$, $\rho(f/\Lambda) < \infty$, მაშინ ფუნქცია $\lambda \longmapsto \rho(f/\lambda)$ უწყვეტი და კლებადია $[\Lambda; \infty]$ -ზე. გარდა ამისა $\rho(f/\lambda) \to 0$, როცა $\lambda \to \infty$.*

უშუალოდ ρ-ს ამოზნექილობიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $\alpha > 1$, მაშინ $\alpha\rho(f) \leq \rho(\alpha f)$ და თუ $0 < \alpha < 1$ მაშინ $\rho(\alpha f) \leq \alpha\rho(f)$. ჩვენ შემდგომში ამოზნექილობის ამ თვისებას ხშირად გამოვიყენებთ.

დამტკიცება : თვისება (1) უშუალოდ გამომდინარეობს მოდულარის განსაზღვრებიდან, თვისებები (2) და (3) და (5) მიიღება L^1 და L^∞ თვისებებიდან. თვისება (4) სამართლიანია,

რადგან L^{∞} ნორმა არის ამოზნექილი და ასევე ფუნქცია $t \to t^{p(x)}$ თითქმის ყველა $x \in \Omega \backslash \Omega_{\infty}$-თვის ამოზნექილია.

(6) თვისების დასამტკიცებლად, შევნიშნოთ, რომ თვისება (5)-ის ძალით თუ $\lambda \geq \Lambda$, მაშინ $\rho(f/\lambda)$ არის კლებადი ფუნქცია და ზღვარზე გადასვლის თეორემის ძალით ის არის უწყვეტი და მიისწრაფის 0-კენ, როცა $\lambda \to \infty$.

შენიშვნა 2.1 *მოდულარი არ აკმაყოფილებს სამკუთხედის უტოლობას ანუ არ სრულდება $\rho(f+g) \leq \rho(f) + \rho(g)$. თუმცა მსგავსი ტიპის უტოლობა სრულდება შემდეგი სახეცვლილებით: თუ $p_+ < \infty$*

$$\rho(f+g) \leq 2^{p_+-1}(\rho(f) + \rho(g)).$$

ჩვენ შემდგომში მოვიხსენიებთ ამას როგორც სამკუთხედის უტოლობას მოდულარისათვის.

ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცე. კარგადაა ცნობილი, რომ კლასიკური ლებეგის L^p სივრცე არის ბანახის სივრცე. აქ ჩვენ განვსაზღვრავთ $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ და გამოვიყენებთ მოდულარის თვისებებს, რათა ვაჩვენოთ, რომ ის არის ნორმირებული ვექტორული სივრცე.

განსაზღვრება 2.7 *მოცემულია $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. განვსაზღვროთ $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, როგორც სიმრავლე ყველა ისეთი ლებეგის აზრით ზომადი ფუნქციებისა, რომელთათვისაც არსებობს $\lambda > 0$ ისეთი, რომ $\rho(f/\lambda) < \infty$. შესაბამისად განვსაზღვროთ $L^{p(\cdot)}_{loc}(\Omega)$ როგორც სიმრავლე ყველა ისეთი ლებეგის აზრით ზომადი ფუნქციებისა, რომლისთვისაც $f \in L^{p(\cdot)}(K)$, ყოველი $K \subset \Omega$ კომპაქტისათვის.*

$L^{p(\cdot)}(\Omega)$ სივრცეში ნორმა განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$||f||_{L^{p(\cdot)}} = \inf\{\lambda > 0 : \rho(f/\lambda) \leq 1\}.$$

შენიშვნა 2.2 *წინადადება 2.3-ის 3 თვისების ძალით, თუ $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, მაშინ f არის სასრული თითქმის ყველგან.*

შემდეგი წინადადებები ერთმანეთის ექვივალენტურია:

1. $1 < p_- \leq p_+ < \infty$;

2. $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ სივრცე არის რეფლექსური.

3. $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ და ა$L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ აქვთ აბსოლუტურადუწყვეტი ნორმა.

4. $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ არის თანაბრად ამოზნექილი.

განსაზღვრება 2.8 *მოცემულია* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$*. ვიტყვით, რომ* $p(\cdot)$ *აკმაყოფილებს ლოკალურ ჰელდერის ლოგარითმულ პირობას და აღვნიშნავთ* $p(\cdot) \in LH_0(\Omega)$*, თუ არსებობს* C *აბსოლუტური მუდმივი ისეთი, რომ* $\forall x, y \in \Omega$, $|x-y| < \frac{1}{2}$*, სრულდება შემდეგი*

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{-\log(|x-y|)}.$$

განსხვავებით მუდმივმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეებისგან, აღმოჩნდა, რომ ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სიცრვეებში ჰარდისა და ლიტლვუდის მაქსიმალური ოპერატორის შემოსაზღვრულობის შესწავლა საკმაოდ პრობლემურია და არსებითადაა დამოკიდებული მაჩვენებელი ფუნქციის თვისებებზე. ამგვარად საკმაოდ დიდხანს ღია ამოცანად რჩებოდა განსაზღვრულიყო პირობები ექსპონენტაზე, რომელიც უზრუნველყოფდა ჰარდისა და ლიტლვუდის მაქსიმალური ოპერატორის შემოსაზღვრულობას ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეზე.

აღნიშნული ოპერატორის შემოსაზღვრულობა პირველად დაამტკიცა დიენინგმა [20] იმ დაშვებით, რომ $1 < p_- \leq p_+ < +\infty$, ამასთან მაჩვენებელი აკმაყოფილებს ლოკალურ ჰელდერის ლოგარითმულ პირობას და მუდმივია რაიმე კომპაქტური სიმრავლის გარეთ.

მოთხოვნა მაჩვენებლის მუდმივობაზე კომპაქტური სიმრავლის გარეთ მოხსნეს კრუზურიბემ, ფიორენზამ, ნეუგბაუერმა [10] და ნეკვინდამ [44]. კერძოდ, [10]-ში ავტორებმა დაამტკიცეს, რომ დასკვნა ძალაში დარჩება თუ კომპატური სიმრავლის გარეთ მუდმივობის მაგივრად მოვთხოვთ გლობალურ ჰელდერის ლოგარითმულ პირობას ანუ მუდმივი $p_\infty > 1$ და აბსოლუტური მუდმივი C ისეთი, რომ

$$|p(x) - p_\infty| \leq \frac{C}{\ln(e+|x|)}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

[44]-ში ნეკვინდამ აღნიშნული ბოლოს მოყვანილი პირობა შეცვალა უფრო ზოგადი პირობით: დავუშვათ, მაჩვენებელი აკმაყოფილებს ლოკალურ ჰელდერის ლოგარითმულ პირობას და $1 \in L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, სადაც $r(\cdot)$ მოიცემა შემდეგი ტოლობით

$$\frac{1}{r(x)} = \left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p_\infty}\right|.$$

ლოკალური და გლობალორი ჰელდერის ლოგარითმული პირობები ოპტიმალური წერტილოვანი პირობებია და ამის შესაბამისი მაგალითები მოცემულია [10] და [46]-ში. მეორეს მხრივ, აღმოჩნდა, იმ ექსპონენტთა სიმრავლის სრული დახასიათება უწყოვეტობის მოდული ტერმინებში, რომელთათვისაც შესაბამის ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეზე ჰარდისა და ლიტლვუდის მაქსიმალური ოპერატორი შემოსაზღვრულია შეუძლებელია. კერძოდ, ლერნერმა [38] ააგო მაგალითი წყვეტილი ფუნქციისა, რომელის შესაბამის ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეზე ჰარდიდა და ლიტლვუდის მაქსიმალური ოპერატორი შემოსაზღვრულია.

დიენინგმა თავის ნაშრომში [21] შემოგვთავაზა იმ ექსპონენტთა, რომელთათვისაც ჰარდისა და ლიტლვუდის მაქსიმალური ოპერატორი შემოსაზღვრულია უწყვეტობის მოდულისგან განსხვავებული ტიპის დახასიათება. კერძოდ, მან დაადგინა, რომ აღნიშნული მაქსიმალური ოპერატორი შემოსაზღვრულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ არსებობს $C > 0$ ისეთი, რომ ყოველი თანაუკვეთი კუბების Π ოჯახისთვის და ყოველი $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ ფუნქციისთვის გვაქვს

$$\left\| \sum_{Q\in\Pi} f_Q \chi_Q \right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \cdot ||f||_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)},$$

სადაც

$$f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(t)dt.$$

ვიტყვით, რომ $p(\cdot) \in \mathcal{A}$ თუ არსებობს $C > 0$ ისეთი, რომ ყოველი Q კუბისთვის და ყოველი $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ ფუნქციისთვის გვაქვს

$$\|f_Q \chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c \parallel f \parallel_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} .$$

კომპაქტური სიმრავლის გარეთ მუდმივი მაჩვენებლებისთვის კოპალიანმა [31] მიიღო უფრო კონსტრუქციული დახასიათება ვიდრე დიენინგმა, კერძოდ, მან აჩვენა, რომ ასეთი მაჩვენებლებისთვის ჰარდისა და ლიტლვუდის მაქსიმალური ოპერატორი არის შემოსაზღვრული მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $p(\cdot) \in \mathcal{A}$. მეორეს მხრივ, [32]-ში ნაჩვენებია, რომ $p(\cdot) \in \mathcal{A}$ პირობიდან საზოგადოდ არ გამომდინარეობს, რომ ჰარდისა და ლიტლვუდის მაქსიმალური ოპერატორი შემოსაზღვრული იქნება $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ სივრცეზე.

3 ექსტრაპოლაცია და მისი ზოგიერთი გამოყენება

რუბიო დე ფრანსიას ექსტრაპოლაციის თეორემა არის ჰარმონიულ ანალიზში ერთ-ერთი სიღმისეული შედეგი, რომელიც მიღებულია წონიანი უტოლობების შესასწავლად. ჩამოსაყალიბებლად იოლია, მაგრამ ამასთან ერთად აქვს უამრავი მრავალფეროვანი გამოყენებები. ამ თავის მიზანია მოვიყვანოთ ექსტრაპოლაციის თეორიის ზოგიერთი მნიშვნელოვანი შედეგი და შემდეგ მათი დახმარებით გამოვიყვანოთ შედეგები ცვლადმაჩვენებლიანი სივრცეებისთვის.

თეორემა 3.1 (რუბიო დე ფრანსია) *მოცემულია T ოპერატორი, დავუშვათ, რაიმე p_0 რიცხვისთვის $1 \leq p_0 < +\infty$ და ყოველი $w_0 \in \mathcal{A}_{p_0}$ წონისთვის არსებობს მუდმივი C ისეთი, რომ*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^{p_0} w_0(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{p_0} w(x)dx.$$

მაშინ ყოველი p, $1 < p < +\infty$ რიცხვისთვის და ყოველი $w \in \mathcal{A}_p$ წონისთვის არსებობს მუდმივი ისეთი, რომ

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^{p} w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{p} w(x)dx.$$

უნდა აღინიშნოს, რომ თეორემაში მოყვანილი დასკვნა იმდენად ზოგადია, რომ აღნიშნული შედეგი საკმაოდ გამანცვიფრებელი და მოულოდნელია მითუმეტეს, რომ აღნიშნულ თეორემაში არ იზღუდება T ოპერატორი. უფრო მეტიც მტკიცების ტექნიკიდან შენიშნეს, რომ კიდევ უფრო ზოგად შემთხვევაშიც შესაძლებელია ექსტრაპოლაციის თეორემის დამტკიცება ამიტომ იხილავენ (f, g) არაუარყოფით ფუნქციათა წყვილების რაიმე $\mathcal{F}$ ოჯახს.

ამგვარად რუბიო დე ფრანსიას ორიგინალი თეორემასთან ერთად უკვე ცნობილია ამ თეორემის უკვე საკმაოდ ზოგადი სახის განზოგადება.

თეორემა 3.2 *დავუშვათ, $\mathcal{B}$ არის მაკენხაუპტის ბაზისი, ამასთან რაიმე p_0, $1 \leq p_0 < +\infty$ რიცხვისთვის და ყოველი $w_0 \in \mathcal{A}_p^{\mathcal{B}}$ წონისთვის გვაქვს*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^{p_0} w_0(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} g(x)^{p_0} w_0(x)dx, \quad (f, g) \in \mathcal{F}.$$

მაშინ ყოველი p, $1 < p < +\infty$ რიცხვისთვის და ყოველი $w \in \mathcal{A}_p^{\mathcal{B}}$ წონისთვის გვექნება

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^{p} w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} g(x)^{p} w(x)dx, \quad (f, g) \in \mathcal{F}.$$

ცხადია თუ წყვილების ოჯახის როლში ვიგულისხმებთ (Tf, f) სახის წყვილებს, სადაც T რაიმე ოპერატორია, მაშინ მივიღებთ წინა მოყვანილ შედეგს.

ექსტრაპოლაციის თეორემა ბანახის ფუნქციურ სივრცეში

ამ პარაგრაფში ჩვენ ჩამოვაყალიბებთ და დავამტკიცებთ ექსტრაპოლაციის თეორემას ბანახის ფუნქციური სივრცეებისათვის, ანუ მოვიყვანს საკმარის პირობებს ბანახის ფუნქციური სივრცეთათვის, რომელიც უზრუნველყოფს L^{p_0} სივრცეში წონიანი უტოლობიდან მივიღოთ უტოლობა ნორმებით ბანახის X ფუნქციურ სივრცეში. ძირითადი დაშვება ამ შემთხვევაში იქნება ის, რომ ჰარდისა და ლიტლვუდის მაქსიმალური ოპერატორი შემოსაზღვრულია X ბანახის სივრცის სკალირებული X^{1/p_0} სივრცის ასოცირებულ სივრცეზე ანუ $(X^{1/p_0})'$ სივრცეზე.

თეორემა 3.3 *ვთქვათ $\mathcal{B}$ არის მაკენხაუპტის ბაზისი და X არის ბანახის ფუნქციური სივრცე. დაუშვათ, რომ რაიმე p_0-თვის, $0 < p_0 < \infty$ და ყოველი $w \in A_1^{\mathcal{B}}$ წონისთვის გვაქვს*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^{p_0} w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} g(x)^{p_0} w(x)dx, \quad (f,g) \in \mathcal{F}.$$

თუ არსებობს q_0, $p_0 \leq q_0 < \infty$, ისეთი, რომ X^{1/q_0} არის ბანახის ფინქციურ სივრცე და $M_{\mathcal{B}}$ არის შემოასაზღვრული $(\mathbb{X}^{1/q_0})'$ სივრცეზე, მაშინ

$$||f||_{\mathbb{X}} \leq C||g(x)||_{\mathbb{X}}, \quad (f,g) \in \mathcal{F}. \tag{3.1}$$

გარდა ამისა, ყოველი p-თვის, $p_0/q_0 \leq p < \infty$

$$||f||_{\mathbb{X}^p} \leq C||g(x)||_{\mathbb{X}^p}, \quad (f,g) \in \mathcal{F}. \tag{3.2}$$

დამტკიცება : ჯერ დავამტკიცებთ (3.1)-ს. დავუშვათ $Y := X^{1/q_0}$, რადგან $M_{\mathcal{B}}$ შემოსაზღვრულია Y' სივრცეზე ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ რუბიო დე ფრანსიას იტერაციული ალგორითმი ყოველი არაუარყოფითი h ფუნქციისთვის:

$$\mathcal{R}h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M_{\mathcal{B}}^k h(x)}{2^k ||M_{\mathcal{B}}||_{Y'}^k}.$$

აქ $M_{\mathcal{B}}^2 h(x) := M_{\mathcal{B}}(M_{\mathcal{B}} h(x))$ და შესაბამისად $M_{\mathcal{B}}^k h(x) := M_{\mathcal{B}}(M_{\mathcal{B}}^{k-1} h(x))$. რუბიო დე ფრანსიას იტერაციული ალგორითმის განსაზღვრებიდან გამომდიანრეობს:

ა) $h(x) \leq \mathcal{R}h(x)$;

ბ) $||\mathcal{R}h||_{Y'} \leq 2||h||_{Y'}$;

გ) $[Rh]_{\mathcal{A}_1^{\mathcal{B}}} \leq 2||M_{\mathcal{B}}||_{Y'}$.

სადაც $[w]_{\mathcal{A}_1^{\mathcal{B}}}$ არის w წონის $\mathcal{A}_1^{\mathcal{B}}$ მუდმივა.

ახლა სკალირების გამოყენებით შემოვიღოთ ფუნქციათა ახალი ოჯახი $\mathcal{F}_0$.

$$\mathcal{F}_0 := \{(f^{p_0}, g^{p_0}) \ : \ (f,g) \in \mathcal{F}\}.$$

თუ $\mathcal{F}_0$ ფუქნციათა წყვილების ოჯახისთვის გამოვიყენებთ თეორემა 3.2-ს, ყოველი $p \geq 1$ რიცხვისთვის და $w \in \mathcal{A}_1^{\mathcal{B}} \subset \mathcal{A}_p^{\mathcal{B}}$ წონისთვის მივიღებთ

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f(x)^{p_0})^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (g(x)^{p_0})^p w(x)dx, \quad (f,g) \in \mathcal{F}.$$

თუ ავიღებთ $p = q_0/p_0$ მაშინ მივიღებთ

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^{q_0} w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} g(x)^{q_0} w(x)dx, \quad (f,g) \in \mathcal{F}. \tag{3.3}$$

დავაფიქსიროთ წყვილი $(f,g) \in \mathcal{F}$. ვინაიდან Y არის ბანახის ფუნქციური სივრცე

$$||f||_X^{q_0} = ||f^{q_0}||_Y = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)^{q_0} h(x)| dx \ : \ h \in Y', ||h||_{Y'} \leq 1 \right\}.$$

ვინაიდან f არაუარყოფითი ფუქნციაა, ამიტომ სუპრემუმი შეგვიძლია შევზღუდოთ არაუარყოფ-ითი h ფუნქციებზე. ანუ საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^{q_0} h(x)dx \leq C||g||_X^{q_0},$$

სადაც მუდმივა C არ არის დამოკიდებული h ფუნქციაზე.

ა)-ს ძალით გვაქვს

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^{q_0} h(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^{q_0} \mathcal{R}h(x)dx.$$

ბოლო ინტეგრალში თუ გამოვიყენებთ ჰელდერის უტოლობას ბანახის ფუქნციური სივრცეებისა-თვის მივიღებთ

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^{q_0} h(x)dx \leq ||f^{q_0}||_Y \cdot ||\mathcal{R}h||_{Y'},$$

აქედან კი ბ)-ს ძალით გვექნება

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^{q_0} h(x)dx \leq C \cdot ||f^{q_0}||_Y \cdot ||h||_{Y'} < +\infty.$$

აქედან გამიომდინარე გ)-ს ძალით $\mathcal{R}h \in \mathcal{A}_{1,\mathcal{B}}$, შემდეგ 3.3-ის ბ)-ს და კვლავ ჰელდერის უტოლობის გამოყენებით გვექნება შემდეგი შეფასება

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^{q_0} h(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} g(x)^{q_0} \mathcal{R}h(x)dx \leq C||g^{q_0}||_{\mathbb{Y}} ||\mathcal{R}h||_{\mathbb{Y}'} \leq 2C||g||_X^{q_0}.$$

რადგან C მუდმივი არ არის დამოკიდებული h-ზე მივიღებთ დასამტკიცებელს.

ახლა დავამტკიცოთ 3.2. დავაფიქსიროთ p, $p_0/q_0 \leq p < \infty$ და ვთქვათ $\mathbb{Y} = \mathbb{X}^p$. თუ $\bar{q}_0 = pq_0 \geq p_0$, მაშინ $\mathbb{Y}^{1/\bar{q}_0}$ არის ბანახის ფუნქციური სივრცე და $M_{\mathcal{B}}$ არის შემოსაზღვრული $(\mathbb{Y}^{1/\bar{q}_0})'$-ში. აქედან გამომდინარე, ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ 3.1 $\mathbb{Y}$-თვის, საიდანაც მივიღებთ დასამტკიცებელს.

თეორემა 3.3-დან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი თეორემის სამართლიანობა

თეორემა 3.4 *დაუშვათ, რომ რაიმე p_0-თვის, $0 < p_0 < \infty$ და $\omega \in \mathcal{A}_1$ წონისთვის*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^{p_0}\omega(x)dx \leq C\int_{\mathbb{R}^n} g(x)^{p_0}\omega(x)dx \tag{3.4}$$

თუ ექსპონენტა $p(\cdot)$ არის ისეთი, რომ $p_0 \leq p_- \leq p_+ < \infty$ და $p(\cdot) \in LH$, მაშინ

$$||f||_{p(\cdot)} \leq C||g||_{p(\cdot)} \tag{3.5}$$

ჰანტი, მაკენხაუპტი, ვიდენის მიერ [27] ნაჩვენებია, რომ ტრიგონომეტრიული სისტემა ბაზისია L^p_ω-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\omega \in \mathcal{A}_p, \quad p > 1$. სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3.5 *თუ $p_- > 1$ და ჰარდი ლიტლვუდის მაქსიმალური ოპერატორი შემოსაზღვრულია $L^{p(\cdot)}$ სივრცეზე მაშინ ტრიგონომეტრიული სისტემა წარმოადგენს შაუდერის ბაზისს $L^{p(\cdot)}$ სივრცეში.*

კაზარიანმა [26] აჩვენა, რომ უოლშის სისტემა ბაზისია L^p_ω-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\omega \in \mathcal{A}_p, \quad p > 1$.

ექსტრაპოლაციის თეორემის გამოყენებით სრულდება შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3.6 *თუ $p_- > 1$ და ჰარდი ლიტლვუდის მაქსიმალური ოპერატორი შემოსაზღვრულია $L^{p(\cdot)}$ სივრცეზე მაშინ უოლშის სისტემა წარმოადგენს ბაზისს $L^{p(\cdot)}$ სივრცეში.*

ზინკიმ [58] აჩვენა, რომ ფრანკლინის სისტემა არის შაუდერის ბაზისი $L^{p(\cdot)}_\omega$-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\omega \in \mathcal{A}_p$. მაშინ კვლავ ექსტარაპოლაციის თეორემის ძალით სამართლინაია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3.7 *თუ $p_- > 1$ და ჰარდი ლიტლვუდის მაქსიმალური ოპერატორი შემოსაზღვრულია $L^{p(\cdot)}$ სივრცეზე მაშინ ფრანკლინის სისტემა წარმოადგენს შაუდერის ბაზისს $L^{p(\cdot)}$ სივრცეში.*

4 ჰაარისა და უოლშის პოლინომებით აპროქსიმაცის ზოგიერთი საკითხი

მოცემული უწყვეტი ფუნქციიდან ფურიეს კერძო ჯამების გადახრის შესახებ პირველი შედეგი მიიღო ლებეგმა [42]. მან დაამტკიცა, რომ

$$|f(x) - S_n(f(x))| \leq (\ln(n) + 3)E_n(f)$$

სადაც $S_n(f)$ არის f ფუნქციის ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის კერძო ჯამი, ხოლო $E_n(f)$ არის f ფუნქციის ტრიგონომტრიული პოლინოიმებით საუკეთესო მიახლოება უწყვეტ ფუნქციათა სივრცეში. აღსანიშნავია, რომ აღნიშნულ შემთხვევაში საუკეთესო მიახლოება ფასდება ფუნქციის უწყვეტობის მოდულით (ჯექსონის თეორემა). ხოლო საუკეთესო მიახლოების შეფასება ფუნქციათა სხვადასხვა კლასებისთვის საშუალებას იძლევა აღნიშნული გადახრა უფრო ზუსტად შევაფასოთ. ამ მიმართულებით ცნობილი შედეგები აქვთ კოლმოგოროვს, ნიკოლსკის, კორნეჩუკს და სხვა მრავალ ცნობილ მეცნიერს. ჯექსონის თეორემის ანალოგი უწყვეტი ფუნქციების უოლშისა და ჰაარის პოლინომებით საუკეთესო მიახლოებებისათვის მიღებული აქვს გოლუბოვს.

თეორემა 4.1 (გოლუბოვი) *ვთქვათ $n = 2^m + k,\ k \in \{0, 1, ..., 2^m - 1\}$. მაშინ ყოველი $f \in L^p \quad (1 \leq p < \infty)$ ფუნქციისთვის სამართლიანია უტოლობა*

$$||f(\cdot) - H_n(f)||_p \leq 2^{1/p} \cdot w_p(f, 1/2^m). \tag{4.1}$$

სადაც $H_n(f,x)$ ფურიე-ჰაარის მწკრივის კერძო ჯამია და ω_p უწყვეტობის ინტეგრალური მოდული განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\omega_p(f, \delta) = \sup_{0 < h\delta \leq h} \left(\int_0^1 |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{1/p}. \tag{4.2}$$

ულიანოვმა ასევე დაამტკიცა შემდეგი:

თეორემა 4.2 *ვთქვათ $f \in L^p\ (1 \leq p < \infty)$, მაშინ*

$$E_n^p(f) \leq ||f(\cdot) - H_n(f, x)||_p \leq 2 \cdot E_n^p. \tag{4.3}$$

აქ საუკეთესო მიახლოება განიხილება ჰაარის პოლინომებით L^p სივრცეში.

ჩამოვაყალიბოთ და დავამტკიცოთ თეორემა 4.1 და თეორემა 4.2 ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცის შემთხვევაში.

იმის გამო, რომ ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში ძვრის ოპერატორი არ არის უწყვეტი, კლასიკური ფორმით უწყვეტობის მოდული ვეღარ განისაზღვრება. ნაცვლად ამისა, ჩვენ განვიხილავთ ბუტცერ-ნესელის ტიპის განზოგადებულ სიგლუვის მოდულს, რომელიც განისაზღვრება სტეკლოვის ოპერატორის საშუალებით.

$$\Omega_{p(\cdot)}(f,\delta)=\left\|f(\cdot)-\frac{1}{h}\int_0^h f(\cdot+t)dt\right\|_{p(\cdot)}. \tag{4.4}$$

თეორემა 4.3 *თუ* $f\in L^{p(\cdot)}[0;1)\quad p(\cdot)\in\mathcal{B}\quad 1\le p<\infty$ *მაშინ*

$$||S_{2^n}(f)||_{p(\cdot)}\le ||f||_{p(\cdot)}$$

დამტკიცება :

$$||S_{2^n}(x,f)||_{p(\cdot)}=$$
$$\sup_{||g||_{p'(\cdot)}\le1}\int_0^1 g(x)S_{2^n}(f,x)dx=\sup_{||g||_{p'(\cdot)}\le1}\int_0^1 g(x)2^n\int_{\Delta_i^{(n)}}f(t)dtdx\le$$
$$\le\sup_{||g||_{p'(\cdot)}\le1}\int_0^1 g(x)dx2^n\int_{\Delta_i^{(n)}}f(t)dt\le 2^n\int_{\Delta_i^{(n)}}f(t)dt\le c||f||_{p(\cdot)}\quad .$$

თეორემა 4.4 *თუ* $f\in L^{p(\cdot)}[0;1)\quad p(\cdot)\in\mathcal{B}\quad 1\le p<\infty$ *მაშინ*

$$||S_{2^n}(f)||_{p(\cdot)}\le\Omega(f,1/2^n)$$

დამტკიცება :

$$||f-S_{2^n}(f)||_{p(\cdot)}$$
$$=\sup_{||g||_{p(\cdot)}\le1}\int_0^1 g(x)\left(f(x)-S_{2^n}(x)\right)dx=\sup_{||g||_{p(\cdot)}\le1}\int_0^1 g(x)\left(f(x)-2^n\int_{\Delta_i^{(n)}}f(x+t)dt\right)dx=$$
$$=\sup_{||g||_{p(\cdot)}\le1}\int_0^1 g(x)\left(2^n\int_{\Delta_i^{(n)}}f(x+t)-f(x)dt\right)dx\le\Omega(f,1/2^n)\quad .$$

თეორემა 4.5 *თუ* $f\in L^{p(\cdot)}[0;1)\quad p(\cdot)\in\mathcal{B}\quad 1\le p<\infty$ *მაშინ*

$$E_n^{p(\cdot)}(f)\le c(p)\Omega(1/2^n,f)$$

დამტკიცება :

$$E_n^{p(\cdot)}(f)\le E_{2^n}^{p(\cdot)}(f)\le\Omega(1/2^n,f)\le c(p)\Omega(1/n,f)\quad .$$

შარაპუდინოვმა დაამტკიცა, რომ $p(\cdot)$ მაჩვენებელზე დადებულ გარკვეულ პირობებში $f \in L^{p(\cdot)}$ ფუნქციისთვის სამართლიანია

$$E_n^{p(\cdot)}(f) \leq c(p)\Omega(f, 1/n)$$

სადაც $E_n^{p(\cdot)}(f)$ აღნიშნავს f ფუნქციის საუკეთესო მიახლოებას ტრიგონომეტრიული პოლინომებით $L^{p(\cdot)}$ სივრცეში.

განვიხილოთ შარაპუდინოვის თეორემის ანალოგი უოლშისა და ჰაარის სისტემებისთვის ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეში.

სამართლიანია შემდეგი.

თეორემა 4.6 *ვთქვათ* $n = 2^m + l$, $l = 0, 1, ..., 2^m - 1$, $f \in L^{p(\cdot)}$ *და* $p(\cdot) \in \mathcal{B}$, *მაშინ*

$$||f(\cdot) - H_{2^m}(f)||_{p(\cdot)} \leq C(p) \cdot \Omega(f, 1/2^m).$$

დამტკიცება : ნორმის განმარტების თანახმად გვექნება

$$\|f(\cdot) - H_{2^m}(f)\|_{p(\cdot)} = \sup_{||g||_{p'(\cdot)} \leq 1} \int_0^1 g(x) \left(f(x) - H_{2^n}(f)\right) dx \leq C\Omega(2^{-m}, f).$$

თეორემა 4.7 *ვთქვათ* $f \in L^p$ $(1 \leq p < \infty)$, *მაშინ*

$$E_n^{p(\cdot)}(f) \leq ||f(\cdot) - H_n(f, x)||_{p(\cdot)} \leq 2 \cdot E_n^{p(\cdot)}. \tag{4.5}$$

აქ საუკეთესო მიახლოება განიხილება ჰაარის პოლინომებით $L^{p(\cdot)}$ *სივრცეში.*

დამტკიცება : მარცხენა უტოლაბა პირდაპირ გამომდინარეობს საუკეთესო მიახლოების პოლინომის განსაზღვრებიდან. დავამტკიცოთ მარჯვენა უტოლობა. $\mathcal{P}_n(x)$-ით f აღვნიშნოთ ფუნქციის n-ური რიგის საუკეთესო მიახლოების პოლინომი. მაშინ გვექნება

$$\|f - H_n(f)\|_{p(\cdot)} = \sup_{||g||_{p'(\cdot)} \leq 1} \int_0^1 g(x) \left(f - \mathcal{P}_n - H_n(f - \mathcal{P}_n)\right) dx \leq$$

$$\leq \|f - \mathcal{P}_n\|_{p(\cdot)} + \|H_n(f - \mathcal{P}_n)\|_{p(\cdot)} \leq 2\,\|f - \mathcal{P}_n\|_{p(\cdot)} = 2E_n^{p(\cdot)} \quad .$$

თეორემა 4.8 *ვთქვათ* $f \in L^p(\cdot)(\Omega)$ *და* $p(\cdot) \in B$ *მაშინ*

$$\|f - H_n(f)\|_{p(\cdot)} \leq \Omega(f, 1/2^n)$$

დამტკიცება :
$$\|f-H_n(f)\|_{p(\cdot)} = \sup_{||g||_{p(\cdot)}\le 1} \int_0^1 g(x)\left(f(x)-H_n(x)\right)dx =$$

$$= \sup_{||g||_{p(\cdot)}\le 1} \int_0^1 g(x)\left(f(x)-2^n\int_{\Delta_n} f(t)dt\right)dx$$

$$\le \sup_{||g||_{p(\cdot)}\le 1} \|g\|_{p'(\cdot)} \left\|f(x)-2^n\int_{\Delta_n} f(t)dt\right\|_{p(\cdot)} = \Omega(f,1/2^n).$$

5 უოლშის პოლინომების ზოგიერთი ორწონიანი უტოლობა

ამ თავში დამტკიცებულია უოლშის პოლინომებისთვის უტოლობა, როდესაც უტოლობის სხვადასხვა მხარეს სივრცის განსხვავებული წონები წერია.

თეორემა 5.1 *ვთქვათ $1<p<+\infty$. მაშინ იმისათვის, რომ*

$$||S_{2^n}(\cdot,f)||_{L_v^p} \le C||f||_{L_w^p}$$

ყოველი $f\in L_w^p$, სადაც C აბსოლუტური მუდმივია, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $(v,w)\in A_p^\alpha$.

დამტკიცება : დავამტკიცოთ საკმარისობა. განვიხილოთ
$$\int_0^1 |S_{2^n}(x,f)|^p\cdot v(x)dx = \sum_{j=0}^{2^n-1}\int\limits_{\Delta_j^{(n)}} |S_{2^n}(x,f)|^p\cdot v(x)dx =$$

$$= \sum_{j=0}^{2^n-1}\int\limits_{\Delta_j^{(n)}} \left|\frac{1}{|\Delta_j^{(n)}|}\int\limits_{\Delta_j^{(n)}} f(t)dt\right|^p\cdot v(x)dx = \sum_{j=0}^{2^n-1} 2^{pn}\cdot\int\limits_{\Delta_j^{(n)}} \frac{1}{|\Delta_j^{(n)}|}\left|\int_{\frac{j}{2^n}}^{\frac{j+1}{2^n}} f(t)dt\right|^p v(x)dx \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{2^n-1} 2^{pn}\cdot\int\limits_{\Delta_j^{(n)}} v(x)dx\cdot\int_{\frac{j}{2^n}}^{\frac{j+1}{2^n}} |f(t)|^p\,dt \le \sum_{j=0}^{2^n-1}\int\limits_{\Delta_j^{(n)}} |f(t)|^p w(t)dt\cdot 2^{pn}\int\limits_{\Delta_j^{(n)}} v(x)dx\left(\int\limits_{\Delta_j^{(n)}} w(t)^{-p'/p}\right)^{p/p'} =$$

$$= \sum_{j=0}^{2^n-1} \int\limits_{\Delta_j^{(n)}} |f(t)|^p w(t)dt \frac{1}{|\Delta_j^{(n)}|} \cdot \int\limits_{\Delta_j^{(n)}} v(x)dx \left(\frac{1}{\Delta_j^{(n)}} \int\limits_{\Delta_{\Delta_j}^{(n)}} w^{1-p'}(t)dt \right)^{p-1} \leq B \sum_{j=0}^{2^n-1} \int\limits_{\Delta_j^{(n)}} |f(t)|^p w(t)dt =$$

$$= B \int_0^1 |f(t)|^p w(t)dt = B \cdot ||f||_{L_w^p}$$

აუცილებლობა

განვიხილოთ $f_0(t) = w^{1-p'}(t)\chi_{\Delta_j^{(n)}}(t)$

$$\int_0^1 |S_{2^n}(f_0, x)|^p v(x)dx \leq C \int_0^1 |f_0|^p w(x)dx$$

$$\int_0^1 \left| \int_-^1 f_0(t) D_{2^n}(x+t)dt \right|^p \cdot v(x)dx = \int_0^1 \left| \int_-^1 w^{1-p'}(t)\chi_{\Delta_j^{(n)}}(t) D_{2^n}(x+t)dt \right|^p \cdot v(x)dx =$$

$$= \int_0^1 \left| \int\limits_{\Delta_j^{(n)}} w^{1-p'}(t) D_{2^n}(x+t)dt \right|^p \cdot v(x)dx = \sum_{k=0}^{2^n-1} \int\limits_{\Delta_k^{(n)}} \left| \int\limits_{\Delta_j^{(n)}} w^{1-p'}(t) D_{2^n}(x+t)dt \right|^p \cdot v(x)dx =$$

$$= \int\limits_{\Delta_j^{(n)}} \left| \int\limits_{\Delta_j^{(n)}} w^{1-p'}(t) \cdot 2^n dt \right|^p \cdot v(x)dx = 2^{np} \int\limits_{\Delta_j^{(n)}} v(x)dx \left(\int\limits_{\Delta_j^{(n)}} w^{1-p'}(t)dt \right)^p \leq$$

$$\leq C \int_0^1 f_0(t) w(t)dt = C \int_0^1 \left(w^{1-p'}(t) \right)^p w(t) \chi_{\Delta_j^{(n)}} dt =$$

$$= C \int\limits_{\Delta_j^{(n)}} w^{p-p'p+1}(t)dt = C \int\limits_{\Delta_j^{(n)}} w^{1-p'}(t)dt.$$

დასკვნა

დამტკიცებულია ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში შემდეგი თეორემები:

თეორემა 1 ვთქვათ $n = 2^m + l$, $l = 0, 1, ..., 2^m - 1$, $f \in L^{p(\cdot)}$ და $p(\cdot) \in \mathcal{B}$, მაშინ

$$||f(\cdot) - H_{2^m}(f)||_{p(\cdot)} \leq C(p) \cdot \Omega(f, 1/2^m).$$

თეორემა 2. ვთქვათ $f \in L^p(\cdot)(\Omega)$ და $p(\cdot) \in B$ მაშინ

$$\|f - H_n(f)\|_{p(\cdot)} \leq \Omega(f, 1/2^n)$$

თეორემა 3. ვთქვათ $f \in L^p$ $(1 \leq p < \infty)$, მაშინ

$$E_n^{p(\cdot)}(f) \leq ||f(\cdot) - H_n(f, x)||_{p(\cdot)} \leq 2 \cdot E_n^{p(\cdot)}.$$

თეორემა 4. თუ $f \in L^{p(\cdot)}[0; 1)$ $\quad p(\cdot) \in \mathcal{B} \quad 1 \leq p < \infty$ მაშინ

$$||S_{2^n}(f)||_{p(\cdot)} \leq ||f||_{p(\cdot)}$$

თეორემა 5. ვთქვათ $1 < p < +\infty$. მაშინ იმისათვის, რომ

$$||S_{2^n}(\cdot, f)||_{L^p_v} \leq C||f||_{L^p_w}$$

ყოველი $f \in L^p_w$, სადაც C აბსოლუტური მუდმივია, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $(v, w) \in A^\alpha_p$.

ლიტერატურა

[1] Antontsev, S., Diaz, J., Shmaraev, S.: Energy methods for free boundary problems. Applications to nonlinear PDEs and fluid mechanics. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, 48. (Boston, MA: Birkhauser Boston Inc.)

[2] Akhiezer, J.: Theory of Approximation, Ungar, New York, 1956.

[3] R.Akgün Polynomial approximation of functions in weighted Lebesgue and Smirnov spaces, Georgian math .J. 11 (2011),no.2, 203-235.

[4] R.Akgün and V.Kokilashvili. On converse theorem of trigonometric approximation in weighted variable exponent Lebesgue spaces . Banach J.Math.Analysis, 5 (2011), N0. 1, 70-82

[5] R.Akgün and V.Kokilashvili. The refined direct and converse inequalities of trigonometric approximation in weighted variable exponent Lebesgue spaces, Georgian Math.J. 18 (2011), 399-423.

[6] Acerbi, E., Mingione, G.: Regularity results for a class of functionals with nonstandard growth, Arch. Ration. Mech. Anal. 156 (2001), 121-140.

[7] Blomgren, P., Chan, T., Mulet, P., Wong, C.: Total variation image restoration: numericalmethods and extensions. In Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Image Processing, volume III, pages 384–387, 1997.

[8] Butzer, P., Nessel, R.: Fourier Analysis and Approximations, Acad. Press, New York, 1971.

[9] Chaichenko, S.: Best approximations of functions in generalized Lebesgue spaces, Ukr. Math. J. 64 (2012), #9, 1-17.

[10] Cruz-Uribe, D., A. Fiorenza and C. Neugebauer, The maximal function on variable Lp spaces, Ann. Acad. Sci. Fen. Math. J 28 (2003), 223-238, and 29 (2004), 247-249.

[11] Chen, Y., Levine S., Rao, M.: Variable exponent, linear growth functionals in image restoration. SIAM J. Appl. Math. 66 (2006), No.4.

[12] D. Cruz-Uribe and A. Fiorenza, Variable Lebesgue spaces, Fundations and Harmonic Analysis, Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhauser, Basel. 2013.

[13] Cruz-Uribe, D., Fiorenza, A.: Variable Lebesgue spaces, Birkhäuser, 2013.

[14] Dai, F., Ditzian, Z., Tikhonov, S.: Sharp Jackson inequality, Journal of Approx. Theory, 151 (2008), #1, 86-112.

[15] Dai, F., Xu, Y.: Approximation Theory and Harmonic Analysis on Spheres and Balls, Springer, 2013.

[16] A. Danelia, A. Gogatishvili, T. Kopaliani, Local Hardy-Littlewood maximal operator in variable exponent Lebesgue spaces, Banach Journal of Mathematical Analysis. v.8, #2, 2014.

[17] Devore, R., Lorentz, G.: Constructive Approximation, Springer-Verlag, 1993.

[18] Diening, L., Harjulechto, P., Hästö, P., Růžička, M.: Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, vol. 2017 of Lecture Notes in Mathematics. Springer, Heidelberg, 2011.

[19] L. Diening, Theoretical and Numerical Results for Electrorheological Fluids, Ph.D. thesis, University of Freibburg, Germany, 2002.

[20] L. Diening, Maximal operator on generalized Lebesgue spaces. Math. Inequal. Appl. 7 (2004), no. 2, 245-259.

[21] L. Diening, Maximal function on Orlicz - Musielak spaces and generalized Lebesgue spaces. Bull. Sci. Math. 129 (2005).

[22] Ditzian, Z., Tikhonov, S.: Note on order of approximation by Steklov means, Mosc. Univ. Math. Bull., 59 (2004), 47-48.

[23] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Růžička, Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, Lecture notes in Mathematics, vol. 2017, Springer-Verlang, Berlin, 2011.

[24] Golubov, B.: Best approximations to functions in the Lp norm by Haar and Walsh polynomials, Mat. Sbornik, 87 (1972), 254-274 (in Russian).

[25] Kakochashvili, G., Zviadadze, Sh.: On the theorem of F. Riesz in variable Lebesgue space, Trans. of A. Razmadze Math. Inst., 170, (2016), 56–61.

[26] K. Kazariani. Bases and unconditional bases in the space $L^p(d\mu)$. Studia mathematica 1982.

[27] HUNT, MUCKENHOUPT, WHEEDEN, WEIGHTED NORM INEQUALITIES FOR THE CONJUGATE FUNCTION AND HILBERT TRANSFORM Presented to the Society, January 19, 1972; received by the editors January 18, 1972. AMS (MOS) subject classifications (1969)- Primary 4430; Secondary 2649-

[28] Kokilashvili, V., Meskhi, A., Samko, S., Rafeiro, H.: Integral operators in nonstandard function spaces. Vol. I. Variable exponent Lebesgue and Amalgam spaces. Birkhäuser, (2016).

[29] Kokilashvili, V., Meskhi, A., Samko, S., Rafeiro, H.: Integral operators in nonstandard function spaces. Vol.II. Variable exponent Hölder, Morrey-Campanato and Grand spaces, Birkhäuser, (2016).

[30] Kokilashvili, V., Paatashvili, V.: Boundary Value Problems for analytic and harmonic functions in non-standard Banach functions spaces, Nova Science Publ., New York, 2011.

[31] T. Kopaliani, Infimal convolution and Muckenhoupt condition in variable spaces. Arch. Math. (Basel) 89 (2007), no. 2., 185-192.

[32] T. Kopaliani, On the Muckenhoupt condition in variable Lebesgue spaces. Proc. A. Razmadze Math. Inst. 145 (2008), 43-46.

[33] T. Kopaliani. On some structural properties of Banach function spaces and boundedness of certain integral operators. Czechoslovak Math. J., 54 (129) (3), (2004), 791–805.

[34] V.Kokilashvili, D. Israfilov and S. Samko, Approximations in weighted Lebesgue and Smirnov classes with variable exponents . Proc.A.Razmadze Math.Inst. 143 (2007), 25-35.

[35] T. Kopaliani, N. Samashvili, Sh. Zviadadze, On the upper and lower estimates of norms in variable exponent spaces, Mathematical Inequalities & Applications, Accepted, to appear (http://arxiv.org/abs/1411.3461).

[36] T. Kopaliani, Sh. Zviadadze, Hardy-Littlewood Maximal Operator And BLO Class of Exponents, Georgian Mathematical Journal, submitted. (http://arxiv.org/abs/1412.6795).

[37] Kokilashvili, V., Israfilov, D., Samko, S.: Approximations in weighted Lebesgue and Smirnov classes with variable exponents . Proc. A. Razmadze Math. Inst. 143 (2007), 25-35.

[38] A. K. Lerner, Some remarks on the Hardy-Littlewood maximal function on variable p L spaces. Math. Z. 251 (2005), No. 3, 509-521.

[39] A. K. Lerner, On some questions related to the maximal operator on variable spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010), No. 8, 4229-4242.

[40] A. K. Lerner, On modular inequalities in variable Lp spaces. Arch. Math. (Basel), 85 (6), (2005) 538-543.

[41] S. Levine, An adaptive variational model for image decomposition, Energy minimization methods in computer vision and pattern recognition. Springer Verlag LCNS no. 3757. 2005

[42] Lebesgue, H.: Sur les integrals singulieres, Ann. de Toulousee, 1909, 1, 25-117.

[43] Natanson, I.: Constructive Theory of functions, University of Michigan University Library, 1961.

[44] A. Nekvinda, Hardy-Littlewood maximal operator on , Math. Inequal. Appl. 7 (2004), no. 2, 255-266.

[45] Nikol'skii, S.: Approximation of functions of several variables and imbedding theorems, Moscow, 1969 (in Russian).

[46] L. Pick, M. Ružička, An example of a space on which the Hardy-Littlewood maximal operator is not bounded. Expo. Math. 19 (2001), No. 4, 369-371.

[47] M. Ruzicka, Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory: Springer-Verlang, Berlin, 2000.

[48] M. Ruzicka. Modeling, mathematical and numerical analysis of electrorheological fluids. Appl. Math., 49 (6), (2004), 565–609.

[49] V. S. Rychkov, Littlewood-Paley Theory and function spaces with weights, Math. Nach. 224 (2001), no. 2, 145–180.

[50] Sharapudinov, I.: Approximation of functions $L^{p(x)}$ by trigonometric polynomials, Izv. RAN, Ser. Mat. 77 (2013), 2, 197-224 (in Russian).

[51] Sharapudinov, I.: Approximation of smooth functions in $L^{p(x)}$ by Valle-Poisson means, Izv. Sarat. Univ. 13 (2012), #1, 45-49.

[52] Sharapudinov, I.: On uniform boundedness in $L_p(p = p(x))$ of some families of convolution oparators, Mat.Zametki, 59 (1996), 2, 291-302. (in Russian).

[53] Sharapudinov, I.: The topology of the spaces $L^{p(t)}[0, 1]$. Math. Notes, 26 (1979) No. 3-4, 796-806 (in Russian).

[54] Sharapudinov, I.: Some problems of approximations in Lebesgue spaces whith variable exponent, Itogi Nauki, Iug Rosii, RAN, 2012, Vladikavkaz, IUMI, 264 pages (in Russian).

[55] Timan, A.: Theory of approximation of functions of a real variable. Macmillan, New York, 1963.

[56] Zhizhiashvili, L.: Trigonometric Fourier Series and Their Conjugates, Kluwer Academic Publisher, 1996.

[57] V. V. Zhikov, Meyer-type estimates for solving the nonlinear Stokes system. (Russian), Differ. Uravn. 33 (1997), no.1, 107-114.

[58] R.Zink an orthonormal basis for G[0,1] that is not anconditional basis for $L^p([0;1]) \quad 1 \leq p \neq 2$ 1980 Mathematics Subject Classification. Primary 46B15, 46E30; Secondary 42C10.Received by the editors April 15, 1984.