ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის

სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მიმართულება: გამოყენებითი მათემატიკა

სამაგისტრო ნაშრომი თემაზე

ფურიეს მწკრივების ლოგარითმული მეთოდით შეჯამებადობა

ლაშა ბარამიძე

ხელმძღვანელი

სრული პროფესორი: უშანგი გოგინავა

თბილისი 2017

ს ა რ ჩ ე ვ ი

ანოტაცია

ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივების განზოგადოებული ლოგარითმული საშუალოებისათვის ჩვენ დავახასიათეთ კრებადობის სიმრავლე და ასევე დავადგინეთ პირობა, რომელიც უზრუნველყოფს ორმაგი ფურიეს მწკრივების ლოგარითმული საშუალოების ზომით კრებადობას.

Anotation

We characterize the set of convergence of the general logarithmic means of trigonometric Fourier series and also we establish condition which guarantees convergence in measure of logarithmic means of the two-dimensional Fourier series.

შესავალი

ფურიეს ანალიზის კლასიკური თეორია ეყრდნობა სინუს ჰარმონიკების (ტალღების) საშუალებით ფუნქციის წარმოდგენას. აღნიშნულ ფუნქციებს ფართოდ იყენებენ სიგნალების დამუშავების, კოდირების თეორიაში, ფილტრაციასა და რიცხვით ანალიზში. ფურიეს მწკრივების თეორია წარმოადგენს აბსტრაქტული ჰარმონიული ანალიზის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან მიმართულებას, სადაც შეისწავლება ორთონორმირებული სისტემები. ტრიგონომეტრიული სისტემა არის მნიშვნელოვანი მოდელი, რომელზედაც შეიძლება ილუსტრირება აბსტრაქტული ანალიზის მრავალი ფუნდამენტალური დებულებისა. არსებობს მრავალი მონოგრაფია, სადაც მოცემულია ტრიგონომეტრიული სისტემის გამოყენებანი (იხ. [17] და [18]).

ინტეგრებადი f ფუნქციის ფურიეს მწკრივის n-ური რისის ლოგარითმული საშუალოები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\frac{1}{\mathrm{l_n}}\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}}\frac{\mathrm{S_k}(f)}{\mathrm{k}+1},\ \mathrm{l_n}=\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}}\frac{1}{\mathrm{k}+1},$$

სადაც $\mathrm{S_k}(f)$ არის f ფუნქციის ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამი. ლოგარითმული საშუალოები ტრიგონომეტრიული სისტემისათვის შესწავლილი იქნა ბევრი ავტორის მიერ. მაგალითისთვის ის განხილულია შემდეგ შრომებში [14],[16]. აღნიშნული საშუალოები უოლშისა და ვილენკინის სისტემის მიმართ განხილული იყო შიმონისა და გატის მიერ [2],[13]. დადგენილია, რომ რისის ლოგარითმულ საშუალოებს აქვს კარგი თვისებები კრებადობის თვალსაზრისით. ეს საშუალოები კრებადია ინტეგრალური აზრით, უწყვეტ ფუნქციათა სივრცის ნორმით და თითქმის ყველგან.

ვთქვათ $\{q_k : k \geq 0\}$ არის არაუარყოფით რიცხვთა მიმდევრობა. ინტეგრებადი f ფუნქციის ფურიეს მწკრივის ნორლუნდის საშუალოები განიმარტება შემდეგნაირად:

$$\frac{1}{\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}}\mathrm{q_k}}\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}}\mathrm{q_k}\mathrm{S_{n-k}}(f).$$

თუ $q_k=\frac{1}{k+1}$, მაშინ ნორლუნდის ლოგარითმულ საშუალოებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$L_n(f;x)=\frac{1}{\mathrm{l_n}}\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}}\frac{\mathrm{S_{n-k}(f)}}{\mathrm{k}+1}.$$

ეს საშუალოები არის რისის ლოგარითმული საშუალოების „შებრუნებული" საშუალოები. [3],[4]-ში განხილულია ზოგიერთი კრებადობისა და განშლადობის საკითხი უწყვეტ ფუნქციათა სივრცესა და ინტეგრებად ფუნქციათა სივრცეში. დადგენილია, რომ აღნიშნული საშუალოები არიან ცუდი თვისებების მატარებლები კრებადობის თვალსაზრისით.

ერთ-ერთ თავის ბოლო ნაშრომში [15] ტყებუჩავას მიერ განხილული იყო ლოგარითმული საშუალოები, რომლებიც კერძო შემთხვევაში მოიცავენ რისისა და ნორლუნდის ლოგარითმულ საშუალოებს. მის მიერ განხილული საშუალოები განიმარტება შემდეგნაირად:

$$T_{n,\beta(n)}f = \frac{1}{\log n}\left(\sum_{k=0}^{\beta(n)-1}\frac{S_k f}{\beta(n)-k+1} + \sum_{k=\beta(n)}^{n}\frac{S_k f}{k-\beta(n)+1}\right) \qquad 0 \le \beta(n) \le n,$$

სადაც პირველი ნაწილი ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოების მსგავსია, ხოლო მეორე ნაწილი რისის საშუალოების მსგავსი.

თუ $\beta(n) = 0$ მიიღება რისის საშუალოები, ხოლო თუ $\beta(n) = n$ მიიღება ნორლუნდის საშუალოები.

$$F_{\mathrm{n},\beta(n)}\mathrm{f} = \frac{1}{\mathrm{l}(\mathrm{n},\beta(n))}\left(\sum_{\mathrm{k}=0}^{\beta(n)-1}\frac{D_k}{\beta(n)-\mathrm{k}+1} + \sum_{\mathrm{k}=\beta(n)}^{\mathrm{n}}\frac{D_k}{\mathrm{k}-\beta(n)+1}\right).$$

ტყებუჩავამ დაამტკიცა, რომ თუ $0 \le \beta(n) \le n$, მაშინ

$$\left(1 + \frac{log^2(\beta(n)+2)}{\log(n+2)}\right) \preccurlyeq \left\|F_{\mathrm{n},\beta(n)}\right\|_{L_1(T)} \preccurlyeq \left(1 + \frac{log^2(\beta(n)+2)}{\log(n+2)}\right).$$

სადაც $a \preccurlyeq b$ აღნიშნავს, რომ $a \preccurlyeq cb$. c არის აბსოლუტური კონსტანტა.

$$T_{\mathrm{n},\beta(n)}\mathrm{f} = F_{\mathrm{n},\beta(n)} * \mathrm{f}$$

ამ შეფასებიდან მიიღება შემდეგი თორემა : თუ $\log\beta(n) = O(\sqrt{\log \mathrm{n}})$, მაშინ

ა) $\forall f \in \mathrm{L}_1(\mathrm{T})$ ➔ $\left\|\mathrm{T}_{\mathrm{n},\beta(n)}f - f\right\|_{\mathrm{L}_1(\mathrm{T})} \to 0$

ბ) $\forall f \in \mathrm{C}(\mathrm{T})$ ➔ $\left\|\mathrm{T}_{\mathrm{n},\beta(n)}f - f\right\|_{\mathrm{C}(\mathrm{T})} \to 0$

ანუ ტყებუჩავას საშუალოები $\log\beta(n) = O(\sqrt{\log \mathrm{n}})$ პირობისას კრებადია ინტეგრალური ნორმითა და უწყვეტ ფუნქციათა სივრცის ნორმით.

ასევე ტყებუჩავამ დაამტკიცა, რომ თუ $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log\beta(n)}{\sqrt{\log n}} = +\infty$ მაშინ არსებობს შესაბამისად ინტეგრებადი და უწყვეტი ფუნქციები, რომლისტვისაც ეს კრებადობა არ სრულდება. ანუ ეს პირობა არის აუცილებელი და საკმარისი პირობა.

ჩვენი მიზანი იყო დაგვედგინა უზრუნველყოფს თუ არა $\log\beta(n) = O(\sqrt{\log \mathrm{n}})$ პირობა თითქმის ყველგან კრებადობას, რომელიც ერთ-ერთი აქტუალური საკითხია ფურიეს ანალიზში.

ჩვენ ამ პირობებში დავამტკიცეთ თითქმის ყველგან კრებადობა, ამასთან დავახასიათეთ ის წერტილები, სადაც კრებადობას აქვს ადგილი.

ორმაგი ფურიეს მწკრივების შერეული ლოგარითმული საშუალოები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$(L_n{}^{\circ}R_m)f = \frac{1}{\log n \log m}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{m}\frac{S_{ij}f}{(n-i)j}.$$

ორმაგი ფურიეს მწკრივების ნორლუნდისა და რისის ლოგარითმული საშუალოები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$(L_n{}^{\circ}L_m)f = \frac{1}{\log n \log m}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{S_{ij}f}{(n-i)(m-j)},$$

$$(R_n{}^{\circ}R_m)f = \frac{1}{\log n \log m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{S_{ij}f}{ij},$$

შესაბამისად.

ცხადია, რომ სამართლიანია შემდეგი:

$$(L_n{}^{\circ}L_m)f = \frac{1}{\pi^2}\int_{T^2} f(s,t)F_n(x-s)F_m(y-t)dsdt,$$

$$(R_n{}^\circ R_m)f = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2} f(s,t)G_n(x-s)G_m(y-t)dsdt$$

და

$$(L_n{}^\circ R_m)f = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2} f(s,t)F_n(x-s)G_m(y-t)dsdt,$$

სადაც

$$F_n(u) = \frac{1}{\mathrm{l_n}}\sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{n}}\frac{\mathrm{D_{n-k}(u)}}{\mathrm{k+1}}, \quad G_n(u) = \frac{1}{\mathrm{l_n}}\sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{n}}\frac{\mathrm{D_k(u)}}{\mathrm{k+1}}.$$

ვთქვათ $L_Q = L_Q(T^2)$ არის ორლიჩის სივრცე [11] გენერირებული Q ფუნქციით. Q არის ამოზნექილი, უწყვეტი ფუნქცია ისეთი, რომ $Q(0) = 0$ და

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{Q(u)}{u} = +\infty, \quad \lim_{u\to 0}\frac{Q(u)}{u} = 0.$$

ამ სივრცეში ნორმა განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\|f\|_{L_Q(T^2)} = inf\left\{k > 0 : \int\limits_{T^2} Q\left(\frac{|f|}{k}\right) \le 1\right\}.$$

კერძოდ თუ $Q(u) = u\, log^\beta(1+u)$ $(u,\ \beta > 0)$ მაშინ შესაბამის სივრცეს ავღნიშნავთ $L\, log^\beta L(T^2)$ -ით.

ვთქვათ $f \in L_p(T^2)$ $1 < p < \infty$. მაშინ ორმაგი ფურიეს მწკრივის მართკუთხოვანი კერძო ჯამი $S_{n,m}f$ კრებადია f-კენ ნორმით როცა $n \to \infty$ [17]. $L_1(T^2)$ -თვის აღნიშნული თეორემა არ არის სამართლიანი. მაგრამ ერთგანზომილებიანი შემთხვევისათვის და $f \in \mathrm{L_1(T)}$-თვის $S_n f$ აქვს სუსტი (1,1) ტიპი [18]. ამ შეფასებიდან გამომდინარეობს $S_n f$-ის კრებადობა $f \in \mathrm{L_1(T)}$-კენ ზომით. თუმცა ორმაგი ფურიეს მწკრივებისათვის აღნიშნული შედეგი არ სრულდება [10],[12]. უფრო მეტიც, დამტკიცებულია, რომ ორმაგი ფურიეს მწკრივის კვადრატული კერძო ჯამიც არ არის ზომით კრებადი T^2-ზე თუ განვიხილავთ ორლიჩის სივრცეს ფართეს ვიდრე $L\, logL(T^2)$. მეორეს მხრივ კარგად არის ცნობილი, რომ თუ $f \in L\, logL(T^2)$, მაშინ მართკუთხოვანი კერძო ჯამი $S_{n,m}f$ კრებადია f-კენ ზომით T^2-ზე.

კლასიკური რეგულარული მეთოდები ხშირად აუმჯობესებენ ფურიეს მწკრივების კრებადობას. მაგალითისათვის, ორმაგი ფურიეს მწკრივების ფეიერის საშუალოები $f \in L_1(T^2)$-თვის კრებადია f-კენ $L_1(T^2)$ ნორმით[17]. ეს საშუალოები არის ნორლუნდის საშუალოების კერძო შემთხვევა.

კარგად არის ცნობილი, რომ ორმაგი ფურიეს მწკრივების ნორლუნდის შეჯამებადეობის მეთოდი არის უფრო სუსტი ვიდრე ნებისმიერი დადებითი რიგის ჩეზაროს შეჯამებადობის მეთოდი. [8]-ში არის დამტკიცებული, რომ ორმაგი ფურიეს მწკრივებისათვის ეს საშუალოები საზოგადოდ არ არის კრებადი T^2-ზე, მაშინაც კი თუ განვიხილავთ ორლიჩის სივრცეს ფართეს ვიდრე $L\,logL(T^2)$. აქედან გამომდინარე ყველა კლასიკურ რეგულარულ მეთოდს არ შეუძლია ზომით კრებადობის გაუმჯობესება.

უოლშის სისტემისათვის ლოგარითმული საშუალოების შეჯამებადობის საკთხები შეგიძლიათ მოიძიოთ [3],[5],[6],[7],[14],[16].

[9]-ში განხილულია შერეული ლოგარითმული საშუალოების $(L_n{}^\circ R_m)f$ მართკუთხოვანი კერძო ჯამი მრავალგანზომილებიანი შემთხვევისათვის და დამტკიცებულია, რომ აღნიშნული საშუალოები მოქმედებს $L_1(T^d)$ სივრციდან სუსტ $L_1(T^d)$-ში. აქედან გამომდინარეობს, რომ ორმაგი ფურიეს მწკრივის ლოგარითმული საშუალოების მართკუთხოვანი კერძო ჯამი კრებადია ზომით. კერძოდ სამართლიანია შემდეგი:

თეორემა GG1 (გოგინავა, გოგოლაძე). ვთქვათ $f \in L_1(T^2)$. მაშინ

$(L_n{}^\circ R_m)f \to f$-კენ ზომით T^2-ზე, როცა $n, m \to \infty$.

თეორემა GG2 (გოგინავა, გოგოლაძე). ვთქვათ $f \in L\,logL(T^2)$. მაშინ

$(L_n{}^\circ L_m)f \to f$-კენ ზომით T^2-ზე, როცა $n, m \to \infty$.

თეორემა GG3 (გოგინავა, გოგოლაძე). ვთქვათ $L_Q(T^2)$ ორლიჩის სივრცე ისეთი, რომ

$$L_Q(T^2) \nsubseteq L\,logL(T^2).$$

მაშინ იმ f ფუნქციების სიმრავლე $L_Q(T^2)$-დან რომლებისთვისაც $(L_n{}^\circ L_m)f \to f$-კენ ზომით T^2-ზე არის ბერის I კატეგორიის $L_Q(T^2)$-ში.

ნებისმიერი ნატურალური $n, \beta(n)$და m რიცხვებისათვის სადაც

$0 \le \beta(n) \le n$ გვაქვს

$$\left(\mathrm{T}_{\mathrm{n},\beta(n)} f \circ L_m\right) f = f * \left(\mathrm{F}_{\mathrm{n},\beta(n)} \times \mathrm{F}_{\mathrm{m}}\right).$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$\left(\mathrm{T}_{\mathrm{n},\beta(n)} f \circ L_m\right) f = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{T^2} f(s,t) \mathrm{F}_{\mathrm{n},\beta(n)}(x-s) F_m(y-t) dsdt$$

თუ $\beta(n) = 0$ მიიღება $(L_n{}^\circ R_m)f$ საშუალოები, ხოლო თუ $\beta(n) = n$ მიიღება $(L_n{}^\circ L_m)f$ საშუალოები.

ზემოთ თქმულიდან გამომდინარე ჩვენ შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი პრობლემა:

ვთქვათ $f \in L_1(T^2)$. რა პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს $\beta(n)$, რომელიც უზრუნველყოფს $\left(\mathrm{T}_{\mathrm{n},\beta(n)} f \circ L_m\right) f$ საშუალოების ზომით კრებადობას T^2-ზე. ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ ეს არის ტყებუჩავას პირობა, ანუ $\log \beta(n) = O(\sqrt{\log \mathrm{n}})$. ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ ეს პირობა არის აუცილებელი და საკმარისი პირობა.

განმარტებები, აღნიშვნები, დამხმარე თეორემები

(ერთგანზომილებიანი შემთხვევა)

$L_p(T)$-ით აღვნიშნოთ ყველა ზომად f ფუნქციათა კლასი, რომლებიც არიან 2π პერიოდული და აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობას:

$\|f\|_p = \left(\int_T |f|^p\right)^{1/p} < \infty$, სადაც $T = [-\pi, \pi]$.

ვთქვათ $f \in L_1(T)$. f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი ტრიგონომეტრიული სისტემისთვის მოიცემა შემდეგნაირად

$S[f] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx}$,

სადაც

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_T f(x)\, e^{-inx}dx$$

არის f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტი.

ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამს აქვს შემდეგი სახე:

$$S_N(f,x) = \sum_{|n|\leq N} \hat{f}(n)e^{inx}.$$

ინტეგრებადი f ფუნქციის ფურიეს მწკრივის n-ური რისის ლოგარითმული საშუალოები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\frac{1}{l_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{S_k(f)}{k+1},\ l_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1},$$

სადაც $S_k(f)$ არის f ფუნქციის ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამი.

ვთქვათ $\{q_k: k \geq 0\}$ არის არაუარყოფით რიცხვთა მიმდევრობა. ინტეგრებადი f ფუნქციის ფურიეს მწკრივის ნორლუნდის საშუალოები განიმარტება შემდეგნაირად:

$$\frac{1}{\sum_{k=0}^{n} q_k}\sum_{k=0}^{n} q_k S_{n-k}(f).$$

თუ $q_k = \frac{1}{k+1}$, მაშინ ნორლუნდის ლოგარითმულ საშუალოებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$L_n(f;x) = \frac{1}{\mathrm{l_n}} \sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{n}} \frac{\mathrm{S_{n-k}(f)}}{\mathrm{k+1}}.$$

ეს საშუალოები არის რისის ლოგარითმული საშუალოების „შებრუნებული" საშუალოები.

ერთ-ერთ თავის ბოლო ნაშრომში [15] ტყებუჩავას მიერ განხილული იყო ლოგარითმული საშუალოები, რომლებიც კერძო შემთხვევაში მოიცავენ რისისა და ნორლუნდის ლოგარითმულ საშუალოებს. მის მიერ განხილული საშუალოები განიმარტება შემდეგნაირად:

$$t_{n,\beta(n)}f = \frac{1}{\log n}\left(\sum_{k=0}^{\beta(n)-1} \frac{S_k f}{\beta(n)-k+1} + \sum_{k=\beta(n)}^{n} \frac{S_k f}{k-\beta(n)+1}\right) \qquad 0 \le \beta(n) \le n.$$

სადაც პირველი ნაწილი ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოების მსგავსია, ხოლო მეორე ნაწილი რისის საშუალოების მსგავსი.

თუ $\beta(n) = 0$ მიიღება რისის საშუალოები, ხოლო თუ $\beta(n) = n$ მიიღება ნორლუნდის საშუალოები.

$$F_{\mathrm{n},\beta(n)}\mathrm{f} = \frac{1}{\mathrm{l(n},\beta(n))}\left(\sum_{\mathrm{k=0}}^{\beta(n)-1} \frac{D_k}{\beta(n)-\mathrm{k}+1} + \sum_{\mathrm{k}=\beta(n)}^{\mathrm{n}} \frac{D_k}{\mathrm{k}-\beta(n)+1}\right).$$

ტყებუჩავამ დაამტკიცა: **თეორემა T1.** თუ $0 \le \beta(n) \le n$, მაშინ

$$\left(1 + \frac{log^2(\beta(n)+2)}{\log(n+2)}\right) \preccurlyeq \left\|F_{\mathrm{n},\beta(n)}\right\|_{L_1(T)} \preccurlyeq \left(1 + \frac{log^2(\beta(n)+2)}{\log(n+2)}\right). \qquad (1)$$

სადაც $a \preccurlyeq b$ აღნიშნავს, რომ $a \preccurlyeq cb$. c არის აბსოლუტური კონსტანტა.

$$T_{\mathrm{n},\beta(n)}\mathrm{f} = F_{\mathrm{n},\beta(n)} * \mathrm{f}$$

ამ შეფასებიდან მიიღება შემდეგი თორემა : **თეორემა T2.** თუ $\log\beta(n) = \mathrm{O}(\sqrt{\log \mathrm{n}})$, მაშინ

ა) $\forall f \in \mathrm{L_1(T)}$ ➔ $\left\|\mathrm{T}_{\mathrm{n},\beta(n)}f - f\right\|_{\mathrm{L_1(T)}} \to 0$

ბ) $\forall f \in \mathrm{C(T)}$ ➔ $\left\|\mathrm{T}_{\mathrm{n},\beta(n)}f - f\right\|_{\mathrm{C(T)}} \to 0$

ანუ ტყებუჩავას საშუალოები $\log\beta(n) = O(\sqrt{\log n})$ პირობისას კრებადია ინტეგრალური ნორმითა და უწყვეტ ფუნქციათა სივრცის ნორმით.

მოვიყვანოთ **თეორემა T1**-ის დამტკიცება.

საკმარისია დავამტკიცოთ (1) $n > 1$-თვის. პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ

$$F_{n,\beta(n)}(x) = \frac{1}{l(n,\beta(n))}\left(\sum_{j=2}^{\beta(n)+1}\frac{D_{\beta(n)+1-j}(x)}{j} + D_{\beta(n)}(x)\right.$$

$$\left. + \sum_{j=2}^{n-\beta(n)+1}\frac{D_{j+\beta(n)-1}(x)}{j}\right). \qquad (2)$$

და

$$\left\|F_{n,\beta(n)}\right\|_{L^1} = 2\left[\int_0^{\frac{1}{n+2}}\left|F_{n,\beta(n)}(x)\right|dx + \int_{\frac{1}{n+2}}^{\pi}\left|F_{n,\beta(n)}(x)\right|dx\right] \equiv 2(A_1 + A_2). \qquad (3)$$

რადგან $|D_k(x)| \le k + \frac{1}{2} \quad \forall k\ \forall x \in [-\pi,\ \pi]$, მაშინ

$$A_1 = \int_0^{\frac{1}{n+2}}\left|F_{n,\beta(n)}(x)\right|dx \le 1. \qquad (4)$$

ამის გარდა (1)-დან მივიღებთ

$$F_{n,\beta(n)}(x) = \frac{1}{l(n,\beta(n))}\left\{\frac{sin\left(\beta(n) + 1 + \frac{1}{2}\right)x}{2sin\frac{x}{2}}\sum_{j=2}^{\beta(n)+1}\frac{cosjx}{j}\right.$$

$$-\frac{cos\left(\beta(n) + 1 + \frac{1}{2}\right)x}{2sin\frac{x}{2}}\sum_{j=2}^{\beta(n)+1}\frac{sinjx}{j}$$

$$(5)$$

$$+D_{\beta(n)}(x) + \frac{sin\left(\beta(n) - 1 + \frac{1}{2}\right)x}{2sin\frac{x}{2}}\sum_{j=2}^{n-\beta(n)+1}\frac{cosjx}{j}$$

$$+\frac{\cos\left(\beta(n)-1+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{\mathrm{j}=2}^{n-\beta(n)+1}\frac{\sin jx}{j}\Bigg\}.$$

A_2-თვის გვაქვს შემდეგი გაშლა

$$A_2=\int_{\frac{1}{n+2}}^{\pi}\left|F_{\mathrm{n},\beta(n)}(x)\right|dx\le F_{\mathrm{n},\beta(n)}(x)$$

$$=\frac{1}{\mathrm{l}(\mathrm{n},\beta(n))}\left\{\int_{\frac{1}{n+2}}^{\pi}\left|\frac{\sin\left(\beta(n)+1+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\left|\sum_{\mathrm{j}=2}^{\beta(n)+1}\frac{\cos jx}{j}\right|dx\right.$$

$$+\int_{\frac{1}{n+2}}^{\pi}\left|\frac{\cos\left(\beta(n)+1+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\left|\sum_{\mathrm{j}=2}^{\beta(n)+1}\frac{\sin jx}{j}\right|dx$$

$$+\int_{\frac{1}{n+2}}^{\pi}\left|\frac{\sin\left(\beta(n)-1+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\left|\sum_{\mathrm{j}=2}^{n-\beta(n)+1}\frac{\cos jx}{j}\right|dx \tag{6}$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{n+2}}^{\pi}\left|\frac{\cos\left(\beta(n)-1+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\left|\sum_{\mathrm{j}=2}^{n-\beta(n)+1}\frac{\sin jx}{j}\right|dx+\int_{\frac{1}{n+2}}^{\pi}\left|D_{\beta(n)}(x)\right|dx\right\}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{l}(\mathrm{n},\beta(n))}\{A_{2,1}+A_{2,2}+A_{2,3}+A_{2,4}+A_{2,5}\}.$$

თუ $\beta(n)=0$ მაშინ $A_{2,1}=A_{2,2}=0$ და თუ $\beta(n)=n$ მაშინ $A_{2,3}=A_{2,4}=0$.

რადგანაც როცა $N\ge 1$ და $-\pi\le x\le\pi$ ჩვენ გვაქვს შემდეგი შეფასება

$$\left|\sum_{\mathrm{j}=1}^{N}\frac{\sin jx}{j}\right|\le C, \tag{7}$$

მაშინ

$$A_{2,2}=\int_{\frac{1}{n+2}}^{\pi}\left|\frac{\cos\left(\beta(n)+1+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\left|\sum_{\mathrm{j}=2}^{\beta(n)+1}\frac{\sin jx}{j}\right|dx\le C\int_{\frac{1}{n+2}}^{\pi}\left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right|dx$$

$$\le C\ln(n+2) \tag{8}$$

და

$$A_{2,4} = \int_{\frac{1}{n+2}}^{\pi} \left| \frac{\cos\left(\beta(n) - 1 + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \right| \left| \sum_{j=2}^{n-\beta(n)+1} \frac{\sin jx}{j} \right| dx \le C \int_{\frac{1}{n+2}}^{\pi} \left| \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \right| dx \tag{9}$$

$$\le C \ln(n+2).$$

უფრო მეტიც

$$A_{2,1} = \int_{\frac{1}{n+2}}^{\pi} \left| \frac{\sin\left(\beta(n) + 1 + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \right| \left| \sum_{j=2}^{\beta(n)+1} \frac{\cos jx}{j} \right| dx \le C \sum_{j=2}^{\beta(n)+1} \frac{1}{j} \int_{\frac{1}{n+2}}^{\pi} \left| D_{\beta(n)+1}(x) \right| dx \tag{10}$$

$$\le C \ln(\beta(n)+2) \left\| D_{\beta(n)+1} \right\|_{L^1[-\pi,\pi]} \le C\, ln^2(\beta(n)+2).$$

ახლა შევაფასოთ $A_{2,3}$

$$A_{2,3} = \int_{\frac{1}{n+2}}^{\pi} \left| \frac{\sin\left(\beta(n) - 1 + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \right| \left| \sum_{j=2}^{n-\beta(n)+1} \frac{\cos jx}{j} \right| dx$$

$$= \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{\beta(n)+2}} \left| \frac{\sin\left(\beta(n) - 1 + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \right| \left| \sum_{j=2}^{n-\beta(n)+1} \frac{\cos jx}{j} \right| dx \tag{11}$$

$$+ \int_{\frac{1}{\beta(n)+2}}^{\pi} \left| \frac{\sin\left(\beta(n) - 1 + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \right| \left| \sum_{j=2}^{n-\beta(n)+1} \frac{\cos jx}{j} \right| dx = A_{2,3,1} + A_{2,3,2}.$$

რადგან

$$\left| \sum_{j=1}^{N} \frac{\cos jx}{j} \right| \le C + \ln\frac{1}{x} \qquad \forall x \in (0,\pi] \qquad \forall N \ge 1$$

მაშინ

$$\left| \sum_{j=2}^{s} \frac{\cos jx}{j} \right| \le C + \ln(\beta(n)+2) \qquad x \in \left[\frac{1}{\beta(n)+2}, \pi\right]. \tag{12}$$

აქედან გამომდინარე მივიღებთ შემდეგ შეფასებას

$$A_{2,3,1} \leq (\beta(n)+2) \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{\beta(n)+2}} \left(C + \ln\frac{1}{x}\right) dx \leq C + \ln(\beta(n)+2) \qquad (13)$$

$$A_{2,3,2} \leq \big(C + \ln(\beta(n)+2)\big) \int_{\frac{1}{\beta(n)+2}}^{\pi} \frac{1}{2sin\frac{x}{2}} dx \leq C\big(ln^2(\beta(n)+2) + \ln(\beta(n)+2)\big). \qquad (14)$$

რადგან

$$A_{2,5} = \int_{\frac{1}{n+2}}^{\pi} \left|D_{\mathrm{j}}(x)\right| dx \leq \left\|D_{\beta(n)}\right\|_{L^1[-\pi,\pi]} \leq \ln(\beta(n)+2), \qquad (15)$$

მაშინ $(6), (8), (9), (10), (11), (13), (14), (15)$-დან

$$A_2 \leq C\frac{ln^2(\beta(n)+2)}{\ln(n+2)} + C.$$

ამით (1)-ის მარჯვენა მხარე დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ (1)-ის მარცხენა მხარე. მე-(4) შეფასებიდან ცხადია გვექნება

$$\mathrm{l}(\mathrm{n},\beta(n))F_{\mathrm{n},\beta(n)}(x) = D_{\beta(n)}(x) + \frac{cos\left(\beta(n)-1+\frac{1}{2}\right)x}{2sin\frac{x}{2}} \sum_{\mathrm{j}=2}^{n-\beta(n)+1} \frac{sinjx}{j}$$

$$-\frac{cos\left(\beta(n)+1+\frac{1}{2}\right)x}{2sin\frac{x}{2}} \sum_{\mathrm{j}=2}^{\beta(n)+1} \frac{sinjx}{j} + \frac{cos\left(\beta(n)+\frac{1}{2}\right)xsinx}{2sin\frac{x}{2}} \sum_{\mathrm{j}=2}^{\beta(n)+1} \frac{cosjx}{j}$$

(16)

$$-\frac{cos\left(\beta(n)+\frac{1}{2}\right)xsinx}{2sin\frac{x}{2}} \sum_{\mathrm{j}=2}^{n-\beta(n)+1} \frac{cosjx}{j} + D_{\beta(n)}(x)cosx \sum_{\mathrm{j}=2}^{\beta(n)+1} \frac{cosjx}{j}$$

$$D_{\beta(n)}(x)cosx \sum_{\mathrm{j}=2}^{n-\beta(n)+1} \frac{cosjx}{j} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{7} B_k.$$

(6) $-$ის გათვალისწინებით ყოველი $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$-თვის გვექნება

$$|B_k| \leq \frac{C}{x} \qquad k = 1,2,3. \qquad (17)$$

(11) შეფასების გამოყენებით $x \in \left[\frac{1}{\beta(n)+1}, \pi\right]$-თვის გვექნება

$$|B_k| \leq C\ln(\beta(n)+2) \qquad k = 4,5. \qquad (18)$$

რადგან $\mathrm{s} \geq 2$-თვის

$$\sum_{j=2}^{s}\frac{cosjx}{j}=\sum_{j=1}^{s-2}\frac{2}{j(j+1)(j+2)}\frac{sin^2\frac{j+1}{2}x}{2sin^2\frac{x}{2}}$$

$$+\frac{1}{s(s-1)}\frac{sin^2\frac{sx}{2}}{2sin^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{s}D_S(x)-\frac{3}{4}-\cos x \qquad (19)$$

მაშინ $\beta(n)\geq 3$-თვის

$$B_6=D_{\beta(n)}(x)\sum_{j=1}^{\beta(n)-1}\frac{1}{j(j+1)(j+2)}\frac{sin^2\frac{j+1}{2}x}{2sin^2\frac{x}{2}}+\frac{D_{\beta(n)}(x)cosx}{\beta(n)(\beta(n)-1)}\frac{sin^2\frac{\beta(n)+1}{2}x}{2sin^2\frac{x}{2}}$$

(20)

$$D_{\beta(n)}(x)cosx\frac{1}{\beta(n)+1}D_{\beta(n)+1}(x)-\frac{3}{4}D_{\beta(n)}(x)cosx-D_{\beta(n)}(x)cos^2x=\sum_{i=1}^{5}B_{6,i.}$$

ანალოგიურად $x\in[0,\pi]$ და $j=2,\dots,5$-თვის გვექნება

$$|B_k|\leq\frac{C}{x}. \qquad (21)$$

რადგან $0\leq k\leq\sqrt{\beta(n)+1}$-თვისა და

$$x\in J_{\beta(n)}=\left\{x\colon sin\left(\beta(n)+\frac{1}{2}\right)x\geq\frac{1}{2}\quad \frac{\pi}{2}\frac{1}{\beta(n)+1}<x<\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{\beta(n)+1}}\right\}$$

გამომდინარეობს, როცა $0\leq kx\leq\frac{\pi}{2}$ და $\sin kx\geq\frac{2}{\pi}kx$ მივიღებთ

$$B_{6,1}\geq D_{\beta(n)}(x)cosx\sum_{1\leq k\leq\sqrt{\beta(n)+1}}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}\frac{sin^2\frac{k+1}{2}x}{2sin^2\frac{x}{2}}$$

(22)

$$\geq C\frac{sin\left(\beta(n)+\frac{1}{2}\right)x}{2sin\frac{x}{2}}\sum_{1\leq k\leq\sqrt{\beta(n)+1}}\frac{1}{k}\geq\frac{C}{x}\ln(\beta(n)+2) \qquad x\in J_{\beta(n)}.$$

შევნიშნოთ, რომ როცა $\beta(n)=n$ მაშინ $B_7=0$ და $\beta(n)=n-1$ მაშინ $|B_7|\leq\frac{C}{x}\quad\forall x\in[-\pi,\pi]$-თვის.

$\beta(n)<n-1$-თვის გვექნება

$$B_7=D_{\beta(n)}(x)cosx\sum_{j=1}^{n-\beta(n)-1}\frac{2}{j(j+1)(j+2)}\frac{sin^2\frac{j+1}{2}x}{2sin^2\frac{x}{2}}$$

$$+\frac{D_{\beta(n)}(x)cosx}{(n-\beta(n)+1)(n-\beta(n))}\frac{sin^2\frac{n-\beta(n)+1}{2}x}{2sin^2\frac{x}{2}} \qquad (23)$$

$$D_{\beta(n)}(x)cosx\frac{1}{n-\beta(n)+1}D_{n-\beta(n)+1}(x)-\frac{3}{4}D_{\beta(n)}(x)cosx-D_{\beta(n)}(x)cos^2x=\sum_{\mathrm{i}=1}^{5}B_{7,i.}$$

ცხადია ანალოგიური შეფასებები იქნება სამართლიანი $B_{7,i}$ $\mathrm{i}=2,\dots,5$ როგორც $B_{6,i}$ $\mathrm{i}=2,\dots,5$. ასევე შევნიშნოთ, რომ $B_{7,1}>1$. საკმარისად დიდი n_0-თვის როცა $x\in J_{\beta(n)}$ გვექნება

$$\left|F_{\mathrm{n},\beta(n)}(x)\right|\geq\frac{1}{\mathrm{l}(\mathrm{n},\beta(n))}\left\{C\frac{\ln(\beta(n)+2)}{x}-\frac{C}{x}-C\ln(\beta(n)+2)\right\}\geq C\frac{\ln(\beta(n)+2)}{x\mathrm{l}(\mathrm{n},\beta(n))}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ საკმარისად დიდი $\beta(n)$-თვის

$$\left\|F_{\mathrm{n},\beta(n)}\right\|_{L^1[-\pi,\pi]}\geq\int_{J_{\beta(n)}}\left|F_{\mathrm{n},\beta(n)}(x)\right|\mathrm{dx}\geq C\frac{ln^2(\beta(n)+2)}{\ln(n+2)}\qquad(24)$$

$$\left\|F_{\mathrm{n},\beta(n)}\right\|_{L^1[-\pi,\pi]}\geq\left|\int_0^{2\pi}\left|F_{\mathrm{n},\beta(n)}(x)\right|\mathrm{dx}\right|=1\qquad(25)$$

(24) და (25) ასრულებას (1)-ის მარცხენა მხარის მტკიცებს.

განსაზღვრება. ვთქვათ $f\in\mathrm{L}_1(\mathrm{T})$. ვიტყვით რომ x არის f ფუნქციის ლებეგის წერტილი თუ

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}|f(\mathrm{x}+\mathrm{t})-f(\mathrm{x})|\,\mathrm{dt}=0.$$

ცნობილია, რომ თითქმის ყველა წერტილი არის ლებეგის წერტილი.

განმარტებები, აღნიშვნები, დამხმარე თეორემები

(ორგანზომილებიანი შემთხვევა)

$L_p(T^2)$ -თი აღვნიშნოთ ყველა ზომად f ფუნქციათა კლასი, რომლებიც არიან 2π პერიოდული და აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობას:

$$\|f\|_p = \left(\int_{T^2}|f|^p\right)^{1/p} < \infty, \text{ სადაც } T^2 = [-\pi,\ \pi]^2.$$

სუსტი $L_1(T^2)$ სივრცე მოიცავს ყველა ზომად f ფუნქციებს, რომლებიც 2π პერიოდულია ყველა ცვლადის მიმართ და სრულდება შემდეგი:

$$\|f\|_{weak-L_1(T^2)} = \sup_{\lambda} \lambda \mathrm{mes}\{(x,y) \in T^2 \colon |f(x,y)| > \lambda\} < \infty.$$

ვთქვათ $f \in L_1(T^2)$. f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი ტრიგონომეტრიული სისტემისთვის მოიცემა შემდეგნაირად:

$$S[f] = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(m,n)e^{i(mx+ny)},$$

სადაც

$$\hat{f}(m,n) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{T^2} f(x,y)\, e^{-i(mx+ny)}dxdy$$

არის f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტი. ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამს აქვს შემდეგი სახე:

$$S_{N.M}\, f = \sum_{|n|\le N}\sum_{|m|\le M} \hat{f}(m,n)e^{i(mx+nx)}.$$

ორმაგი ფურიეს მწკრივების „მიქსი'' ლოგარითმული საშუალოები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$(L_n{}^\circ R_m)f = \frac{1}{\log n \log m}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{m}\frac{S_{ij}f}{(n-i)j}.$$

ორმაგი ფურიეს მწკრივების ნორლუნდისა და რისის ლოგარითმული საშუალოები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$(L_n{}^\circ L_m)f = \frac{1}{\log n \log m}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{S_{ij}f}{(n-i)(m-j)},$$

$$(R_n{}^\circ R_m)f = \frac{1}{\log n \log m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{S_{ij}f}{ij},$$

შესაბამისად.

ნებისმიერი ნატურალური $n, \beta(n)$ და m რიცხვებისათვის სადაც

$0 \le \beta(n) \le n$ გვაქვს

$$\left(\mathrm{T}_{\mathrm{n},\beta(n)}f \circ L_m\right)f = f * \left(\mathrm{F}_{\mathrm{n},\beta(n)} \times \mathrm{F}_{\mathrm{m}}\right).$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$\left(\mathrm{T}_{\mathrm{n},\beta(n)}f \circ L_m\right)f = \frac{1}{\pi^2}\int_{T^2} f(s,t)\mathrm{F}_{\mathrm{n},\beta(n)}(x-s)F_m(y-t)dsdt$$

თუ $\beta(n) = 0$ მიიღება $(L_n{}^\circ R_m)f$ საშუალოები, ხოლო თუ $\beta(n) = n$ მიიღება $(L_n{}^\circ L_m)f$ საშუალოები.

ზემოთ თქმულიდან გამომდინარე ჩვენ შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი პრობლემა:

ვთქვათ $f \in L_1(T^2)$. რა პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს n_0, რომელიც უზრუნველყოფს $\left(\mathrm{T}_{\mathrm{n},\beta(n)}f \circ L_m\right)f$ საშუალოების ზომით კრებადობას T^2-ზე.

ძირითადი შედეგების ფორმულირება

(ერთგანზომილებიანი შემთხვევა)

თეორემა1. ვთქვათ $f \in \mathrm{L}_1(\mathrm{T})$ და

$$\log \beta(\mathrm{n}) = O(\sqrt{\log \mathrm{n}}),$$

მაშინ

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{T}_{\mathrm{n},\beta(\mathrm{n})}(f, \mathrm{x}) = f(\mathrm{x})$$

თუ x არის f ფუნქციის ლებეგის წერტილი.

შედეგი 1. ვთქვათ $f \in \mathrm{L}_1(\mathrm{T})$ და

$$\log \beta(\mathrm{n}) = O(\sqrt{\log \mathrm{n}}),$$

მაშინ

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{T}_{\mathrm{n},\beta(\mathrm{n})}(f, \mathrm{x}) = f(\mathrm{x})$$

თითქმის ყველგან.

ძირითადი შედეგების ფორმულირება

(ორგანზომილებიანი შემთხვევა)

თეორემა 2. ა) თუ $\log\beta(n) = O(\sqrt{\log n})$ მაშინ $(T_{n,\beta(n)}{}^\circ L_m)f \to f$ ზომით $\forall f \in L_1(T^2)$-თვის.

ბ) თუ $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log\beta(n)}{\sqrt{\log n}} = +\infty$ მაშინ იმ f ფუნქციების სიმრავლე, სადაც ადგილი აქვს $(T_{n,\beta(n)}{}^\circ L_m)f \to f$ ზომით კრებადობას, არის ბერის I კატეგორიის სიმრავლე,

ანუ $\exists f \in L_1(T^2)$ ისეთი, რომ არ აქვს ადგილი $(T_{n,\beta(n)}{}^\circ L_m)f \to f$ ზომით კრებადობას .

ძირითადი შედეგების დამტკიცება (ერთგანზომილებიანი შემთხვევა)

თეორემა1. ვთქვათ $f \in \mathrm{L}_1(\mathrm{T})$ და

$$\log \beta(\mathrm{n}) = O(\sqrt{\log \mathrm{n}}),$$

მაშინ

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{T}_{\mathrm{n},\beta(\mathrm{n})}(f,\mathrm{x}) = f(\mathrm{x})$$

თუ x არის f ფუნქციის ლებეგის წერტილი.

დასამტკიცებლად ჯერ დავამტკიცოთ შემდეგი ლემის სამართლიანობა:

ლემა 1. სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$\left|F_{\mathrm{n},\beta(\mathrm{n})}(\mathrm{x})\right| \preccurlyeq n\mathbb{I}_{\left[0,\frac{1}{n}\right)}(x) + \frac{1}{x\log n}\mathbb{I}_{\left[\frac{1}{n},\frac{1}{\beta(\mathrm{n})}\right)}(x) + \frac{\beta(\mathrm{n})}{\log n}\log\frac{1}{x}\mathbb{I}_{\left[\frac{1}{n},\frac{1}{\beta(\mathrm{n})}\right)}(x) + \frac{1}{\mathrm{x}\log n}\log\frac{1}{x}\mathbb{I}_{\left[\frac{1}{\beta(\mathrm{n})},\pi\right]}(x).$$

$F_{\mathrm{n},\beta(\mathrm{n})}(\mathrm{x})$ შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned}
F_{\mathrm{n},\beta(\mathrm{n})}(\mathrm{x}) = \frac{1}{\mathrm{l}(\mathrm{n},\beta(\mathrm{n}))}\Bigg(&\frac{\sin\left(\beta(\mathrm{n})+1+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{\mathrm{j}=2}^{\beta(\mathrm{n})+1}\frac{\cos jx}{\mathrm{j}} \\
&-\frac{\cos\left(\beta(\mathrm{n})+1+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{\mathrm{j}=2}^{\beta(\mathrm{n})+1}\frac{\sin jx}{\mathrm{j}} + D_{\beta(\mathrm{n})}(x) \\
&+\frac{\sin\left(\beta(\mathrm{n})-1+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{\mathrm{j}=2}^{\mathrm{n}-\beta(\mathrm{n})+1}\frac{\cos jx}{\mathrm{j}} + \frac{\cos\left(\beta(\mathrm{n})-1+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{\mathrm{j}=2}^{\mathrm{n}-\beta(\mathrm{n})+1}\frac{\sin jx}{\mathrm{j}}\Bigg) \\
&= \frac{1}{\mathrm{l}(\mathrm{n},\beta(\mathrm{n}))}\{A_1+A_2+A_3+A_4+A_5\}
\end{aligned}$$

ცნობილია რომ სამართლიანია შემდეგი შეფასებები:

$$\left|\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}}\frac{\sin jx}{\mathrm{j}}\right| \preccurlyeq 1, x \in T, n \geq 1,$$

$$\left|\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}}\frac{\cos jx}{\mathrm{j}}\right| \leqslant 1+\ln\frac{1}{x} \quad \forall x\in(0,\pi],$$

$$\left|\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}}\frac{\cos jx}{\mathrm{j}}\right| \leqslant \ln(m+2) \quad x\in\left[\frac{1}{m+2},\pi\right], n\geq 1.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$\left|F_{\mathrm{n},\beta(\mathrm{n})}(\mathrm{x})\right| \leq n.$$

ზემოთ მოყვანილი შეფასებებიდან გვექნება

$$|A_1| \leqslant \frac{1}{\log n}\left\{\beta(\mathrm{n})\log\beta(\mathrm{n})\,\mathbb{I}_{\left[\frac{1}{n},\frac{1}{\beta(\mathrm{n})}\right)}(x)+\frac{1}{x}\log\frac{1}{x}\mathbb{I}_{\left[\frac{1}{\beta(\mathrm{n})},\pi\right]}(x)\right\}$$

$$|A_2| \leqslant \frac{1}{x\log n}\,\mathbb{I}_{\left[\frac{1}{\mathrm{n}},\pi\right]}(x)$$

$$|A_3| \leqslant \frac{1}{\log n}\left\{\beta(\mathrm{n})\mathbb{I}_{\left[\frac{1}{n},\frac{1}{\beta(\mathrm{n})}\right)}(x)+\frac{1}{x}\mathbb{I}_{\left[\frac{1}{\beta(\mathrm{n})},\pi\right]}(x)\right\}$$

$$|A_4| \leqslant \frac{1}{\log n}\left\{\beta(\mathrm{n})\log\frac{1}{x}\mathbb{I}_{\left[\frac{1}{n},\frac{1}{\beta(\mathrm{n})}\right)}(x)+\frac{1}{x}\log\frac{1}{x}\mathbb{I}_{\left[\frac{1}{\beta(\mathrm{n})},\pi\right]}(x)\right\}$$

$$|A_5| \leqslant \frac{1}{x\log n}\,\mathbb{I}_{\left[\frac{1}{\mathrm{n}},\pi\right]}(x)$$

აღნიშნული შეფასებები ამტკიცებს ლემის სამართლიანობას.

ახლა დავამტკიცოთ **თეორემა 1**. პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ

$$\left|T_{\mathrm{n},\beta(\mathrm{n})}(\mathrm{f},\mathrm{x})-\mathrm{f}(\mathrm{x})\right| \leq \left(\int_0^{\frac{1}{n}}+\int_0^{\frac{1}{\beta(\mathrm{n})}}+\int_{\frac{1}{\beta(\mathrm{n})}}^{\pi}\right)\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-f(x)\right|F_{\mathrm{n},\beta(\mathrm{n})}(\mathrm{x})dt$$
$$=I_1+I_2+I_3$$

გამოვიყენოთ **ლემა 1** და მივიღბთ:

$$I_1 \leqslant n\int_0^{\frac{1}{n}}\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-f(x)\right|dt=o(1)$$

ყოველი x -თვის, რომელიც არის f ფუნქციის ლებეგის წერტილი. კვლავ გამოვიყენოთ **ლემა 1** და გვექნება:

$$I_2 \leqslant \frac{1}{\log n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{\beta(n)}}\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-f(x)\right|\frac{dt}{t}$$

$$+\frac{\beta(n)}{\log n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{\beta(n)}}\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-f(x)\right|\log\frac{1}{t}dt = I_{21}+I_{22}.$$

განვიხილოთ F აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია მოცემული შემდეგნაირად:

$$F_x(t)=F(t)=\int_0^t\left|\frac{f(x+s)+f(x-s)}{2}-f(x)\right|ds$$

მაშინ ცხადია სამართიანია შემდეგი

$$I_{21}\leqslant\frac{1}{\log n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{\beta(n)}}\frac{F'(t)}{t}dt$$

თუ მოვახდენთ ნაწილობით ინტეგრებას მივიღებთ:

$$I_{21}\leqslant\frac{1}{\log n}\frac{F(t)}{t}\Bigg|_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{\beta(n)}}+\frac{1}{\log n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{\beta(n)}}\frac{F(t)}{t^2}dt$$

$\frac{F(t)}{t}=o(1)$ ყოველი x -თვის, რომელიც არის f ფუნქციის ლებეგის წერტილი და I_{21}-ის პირველი ნაწილი არის $o(1)$ როცა $n\to\infty$. მეორე ნაწილისთვისაც ანალოგიურია სამართლიანი. მართლაც, ყოველი $\varepsilon>0$-თვის საკმარისად დიდი n-თვის $\frac{F(t)}{t}<\varepsilon\ \left[\frac{1}{n},\frac{1}{\beta(n)}\right]$ სეგმენტზე. აქედან გამომდინარე

$$I_{21}\leqslant\frac{\varepsilon}{\log n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{\beta(n)}}\frac{dt}{t}\leqslant\varepsilon$$

ანალოგიურად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ $I_{22} = o(1)$ როცა $n \to \infty$

საბოლოოდ მივიღებთ, რომ $I_2 = o(1)$ როცა $n \to \infty$.

I_3 ინტეგრალი შეგვიძლია დავშალოთ ორ ინტეგრალად

$$I_3 = \int_{\frac{1}{\beta(n)}}^{\eta} + \int_{\eta}^{\pi} = I_{31} + I_{32}$$

ლემა 1-ის გამოყენებით გვექნება

$$I_{32} \leqslant \frac{1}{\log n} \frac{1}{\eta} \log \frac{1}{\eta} c_f$$

სადაც c_f დამოკიდებულია f ფუნქციაზე. ცხადია ეს წევრი შეგვიძლია გავხადოთ საკმარისად მცირე, მაგრამ უნდა დავიცვათ ბალანსი η-სა და n-ს შორის. მაგალითად $\eta = \frac{1}{\log \beta(n)}$ მაშინ დიდი n -თვის საკმარისად მცირეს გავხვდით ამ წევრს. ანუ გვექნება $I_{32} = o(1)$ როცა $n \to \infty$

კვლავ **ლემა 1**-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$I_{31} \leqslant \frac{1}{\log n} \int_{\frac{1}{\beta(n)}}^{\frac{1}{\log \beta(n)}} \frac{1}{t} \log \frac{1}{t} \left| \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - f(x) \right| dt$$

ეს შეფასება შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$I_{31} \leqslant \frac{1}{\log n} \int_{\frac{1}{\beta(n)}}^{\frac{1}{\log \beta(n)}} \frac{1}{t} \log \frac{1}{t} F'(t) dt$$

თუ მოვახდენთ ნაწილობით ინტეგრებას მივიღებთ:

$$I_{31} \leqslant \frac{1}{\log n} \frac{F(t)}{t} \log \frac{1}{t} \Bigg|_{\frac{1}{\beta(n)}}^{\frac{1}{\log \beta(n)}} + \frac{1}{\log n} \int_{\frac{1}{\beta(n)}}^{\frac{1}{\log \beta(n)}} \frac{F(t)}{t^2} \log \frac{1}{t} dt$$

$\frac{F(t)}{t} = o(1)$ ყოველი x -თვის, რომელიც არის f ფუნქციის ლებეგის წერტილი და I_{31}-ის პირველი ნაწილი არის $o(1)$ როცა $n \to \infty$. მეორე ნაწილისთვისაც ანალოგიურია სამართლიანი. მართლაც, ყოველი $\varepsilon > 0$-თვის საკმარისად დიდი n-თვის $\frac{F(t)}{t} < \varepsilon$ $\left[\frac{1}{\beta(n)}, \frac{1}{\log\beta(n)}\right]$ სეგმენტზე. აქედან გამომდინარე

$$I_{31} \leqslant \frac{\varepsilon}{\log n} \int_{\frac{1}{\beta(n)}}^{\frac{1}{\log\beta(n)}} \frac{1}{t} \log\frac{1}{t}\, dt \leqslant \frac{\varepsilon log^2 \beta(n)}{\log n} \leqslant \varepsilon$$

ანუ მივიღეთ, რომ $I_3 = o(1)$ როცა $n \to \infty$.

I_1, I_2, I_3-თვის მიღებული შეფასებები ასრულრბს თორემის დამტკიცებას.

ძირითადი შედეგების
დამტკიცება
(ორგანზომილებიანი შემთხვევა)

თეორემა 2. ა) თუ $\log\beta(n) = O(\sqrt{\log n})$ მაშინ $(T_{n,\beta(n)}{}^\circ L_m)f \to f$ ზომით $\forall f \in L_1(T^2)$-თვის.

ბ) თუ $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log\beta(n)}{\sqrt{\log n}} = +\infty$ მაშინ იმ f ფუნქციების სიმრავლე, სადაც ადგილი აქვს $(T_{n,\beta(n)}{}^\circ L_m)f \to f$ ზომით კრებადობას, არის ბერის I კატეგორიის სიმრავლე,

ანუ $\exists f \in L_1(T^2)$ ისეთი, რომ არ აქვს ადგილი $(T_{n,\beta(n)}{}^\circ L_m)f \to f$ ზომით კრებადობას .

თეორემა 2-ის დასამტკიცებლად ვიყენებთ [1]-ის მსჯელობას ჩამოყალიბებულს, როგორც კერძო შემთხვევას შემდები სახით:

თეორემა G. ვთქვათ $H : L_1(T^2) \to L_0(T^2)$ არის წრფივი, უწყვეტი ოპერატორი რომელიც კომუტატიურია $\mathcal{E}$ სიმრავლეზე. ანუ $\forall E \in \mathcal{E}$ და $\forall f \in L_1(T^2)$-თვის $HEf = EHf$. ვთქვათ $\|f\|_{L_1(T^2)} = 1$ და $\lambda > 1$. მაშინ ნებისმიერი $1 \le r \in \mathbb{N}$-თვის, იმ პირობით, რომ $mes\{(x,y) \in T^2 : |Hf| > \lambda\} \ge \frac{1}{r}$ არსებობს $E_1, \dots, E_r, E_1', \dots, E_r' \in \mathcal{E}$ და $\varepsilon_i = \pm 1,\ \ i = 1, \dots, r$ ისეთი, რომ

$$mes\left\{(x,y) \in T^2 : \left|H\left(\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i f(E_i x, E_i' y)\right)\right| > \lambda\right\} \ge \frac{1}{8}.$$

თეორემა GGT (გატი, გოგინავა, ტყებუჩავა). ვთქვათ $\{H_m\}_{m=1}^{\infty}$ არის წრფივი უწყვეტი ოპერატორების მიმდევრობა მოქმედი $L_1(T^2)$ სივრციდან $L_0(T^2)$-ში. დავუშვათ არსებობს ფუნქციათა მიმდევრობა $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ $L_1(T^2)$-ის ერთეულოვანი $S(0,1)$ ბირთვიდან, $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ და $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ უსასრულობისკენ მიმავალი რიცხვთა მიმდევრობა ისეთი, რომ

$$\varepsilon_0 = \inf_k mes\{(x,y) \in T^2 : |H_{m_k}\xi_k(x,y)| > \nu_k\} > 0$$

მაშინ K სიმრავლე ფუნქციებისა $L_1(T^2)$ სივრციდან, რომელთათვისაც $\{H_m f\}$ მიმდევრობა კრებადია ზომით არის ბერის I კატეგორიის სიმრავლე $L_1(T^2)$-ში.

თეორემა GGT დამტკიცება შეგიძლიათ იპოვოთ [15]-ში.

ვთქვათ

$$\alpha_{km}=\frac{\pi(12k+1)}{6(m+\frac{1}{2})},\beta_{km}=\frac{\pi(12k+5)}{6(m+\frac{1}{2})},\gamma_m=\frac{\pi}{6(m+\frac{1}{2})},$$

$$J_m=\bigcup_{k=1}^{\left[\frac{\sqrt{m+1}-5}{12}\right]}[\alpha_{km}+\gamma_m,\beta_{km}-\gamma_m\,].$$

ლემა T. (ტყებუჩავა). ვთქვათ $0\le z\le\gamma_n$ და $x\in J_n$. მაშინ

$$F_{\mathrm{n},\beta(n)}(\mathrm{x}-\mathrm{z})\geqslant\frac{\log(\beta(n)+2)}{\mathrm{x}\log(n+2)}.$$

ტყებუჩავას ლემის დამტკიცება შეგიძლიათ იპოვოთ [7]-ში.

თეორემა 2-ის დამტკიცება. **ა)** [9]-ში დამტკიცებულია, რომ ერთგანზომილებიან ოპერატორს $L_m(f)=f*F_m$ აქვს სუსტი $(1,1)$ ტიპი. ესეიგი $f\in L_1(T)$-თვის ჩვენ გვაქვს

$$\|L_m(f)\|_{weak-\mathrm{L}_1(\mathrm{T})}\preccurlyeq\|f\|_{\mathrm{L}_1(\mathrm{T})}.$$

მეორეს მხრივ ტყებუჩავამ [15]-ში დაამტკიცა, რომ

$$\sup_n\left\|F_{\mathrm{n},\beta(n)}\right\|_{\mathrm{L}_1(\mathrm{T})}<\infty$$

როცა

$$\log\beta(n)=O\left(\sqrt{\log n}\right).$$

ვთქვათ

$$\Omega=\left\{(x,y)\in T^2:\left|(T_{n,\beta(n)}{}^\circ L_m)(f,x,y)\right|>\lambda\right\}$$

მაშინ გვექნება

$$\lambda mes(\Omega)=\lambda\int_{\mathrm{T}^2}\mathbb{I}_\Omega(x,y)\,dxdy=$$

$$\lambda\int_{\mathrm{T}}\left(\int_{\mathrm{T}}\mathbb{I}_\Omega(x,y)\,dy\right)dx\preccurlyeq\left\|f*F_{n,\beta(n)}\right\|_{\mathrm{L}_1(T^2)}\preccurlyeq\|f\|_{\mathrm{L}_1(T^2)}$$

სადაც $\mathbb{I}_\Omega$ არის Ω სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია.

სტანდარტული მსჯელობის გამოყენებით [18]-დან და ზემოთ მიღებული შეფასებიდან დავამტკიცებთ **ა)** პუნქტს.

ახლა დავამტკიცოთ **ბ)** პუნქტი. ვთქვათ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log \beta(n)}{\sqrt{\log n}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\beta(n_k)}{\sqrt{\log n_k}} = \infty.$$

თეორემა GGT გამოყენებით თეორემა იქნება დამტკიცებული თუ ვაჩვენებთ, რომ არსებობს უსასრულობისკენ მიმავალი რიცხვთა მიმდევრობები $\{n_k : k \geq 1\}$ და $\{\nu_k : k \geq 1\}$, ასევე ფუნქციათა მიმდევრობა $\{\xi_k : k \geq 1\}$ $L_1(T^2)$-ის ერთეულოვანი $S(0,1)$ ბირთვიდან ისეთი, რომ ყოველი n-თვის

$$\operatorname{mes}\left\{(x,y) \in T^2 : \left|(T_{n_k,\beta(n_k)} \circ L_{n_k})(\xi_k, x, y)\right| > \nu_k\right\} \geq \frac{1}{8}.$$

თავდაპირველად დავამტკიცოთ, რომ

$$\operatorname{mes}\left\{(x,y) \in T^2 : \left|(T_{n_k,\beta(n_k)} \circ L_{n_k})\left(\frac{\mathbb{I}_{[0,\gamma_{n_k}]^2}}{\gamma_{n_k}^2}, x, y\right)\right| \geqslant n_k^{3/2}\right\} \geqslant \frac{log^2\beta(n_k)}{n_k^{\frac{3}{2}} \log n_k}.$$

ლემა T გამოყენებით გვექნება:

$$(T_{n_k,\beta(n_k)} \circ L_{n_k})\left(\frac{\mathbb{I}_{[0,\gamma_{n_k}]^2}}{\gamma_{n_k}^2}, x, y\right)$$

$$= \frac{1}{\gamma_{n_k}^2} \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathrm{T}^2} f(s,t) F_{\mathrm{n},\beta(n_k)}(x-u)\, F_{n_k}(y-v) du dv$$

$$\geqslant \frac{\log \beta(n_k)}{\log n_k} \frac{1}{xy}, \qquad (x,y) \in J_{n_k} \times J_{n_k}.$$

დავუშვათ

$$s_{i,n_k} = \frac{\sqrt{n_k} \log \beta(n_k)}{i \ \log n_k}.$$

მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\operatorname{mes}\left\{(x,y) \in T^2 : \left|(T_{n_k,\beta(n_k)} {}^\circ L_{n_k})\left(\frac{\mathbb{I}_{[0,\gamma_{n_k}]^2}}{\gamma_{n_k}^2}, x, y\right)\right| \geqslant n_k^{\frac{3}{2}}\right\}$$
$$\geq \operatorname{mes}\left\{(x,y) \in J_{n_k} \times J_{n_k} : \left|(T_{n_k,\beta(n_k)} {}^\circ L_{n_k})\left(\frac{\mathbb{I}_{[0,\gamma_{n_k}]^2}}{\gamma_{n_k}^2}, x, y\right)\right| \geqslant n_k^{\frac{3}{2}}\right\}$$
$$\geq \operatorname{mes}\left\{(x,y) \in J_{n_k} \times J_{n_k} : \frac{\log \beta(n_k)}{\log n_k} \frac{1}{xy} \geqslant n_k^{\frac{3}{2}}\right\}$$
$$= \operatorname{mes}\left\{(x,y) \in J_{n_k} \times J_{n_k} : y \leqslant \frac{\log \beta(n_k)}{x\, n_k^{\frac{3}{2}} \log n_k}\right\}$$
$$\geqslant \frac{1}{n_k^2} \sum_{i=1}^{\frac{\sqrt{\beta(n_k)+1}-5}{12}} \sum_{l=1}^{s_{i,n_k}} = c \sum_{i=1}^{\frac{\sqrt{\beta(n_k)+1}-5}{12}} \frac{\sqrt{n_k} \log \beta(n_k)}{i\, n_k^2 \ \log n_k}$$
$$\geqslant \frac{log^2 \beta(n_k)}{n_k^{\frac{3}{2}} \log n_k}.$$

და ბოლის, **თეორემა G** გამოყენებით არსებობს $E_1, \dots, E_{r_k}, E'_1, \dots, E'_{r_k} \in \mathcal{E}$ და $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, \dots, r_k$ ისეთი, რომ

$$\operatorname{mes}\left\{(x,y) \in T^2 : \left|\sum_{i=1}^{r_k} \varepsilon_i \, (T_{n_k,\beta(n_k)} {}^\circ L_{n_k})\left(\frac{\mathbb{I}_{[0,\gamma_{n_k}]^2}}{\gamma_{n_k}^2}, E_i x, E'_i y\right)\right| \geqslant n_k^{3/2}\right\} > \frac{1}{8},$$

სადაც

$$r_k \sim \frac{n_k^{\frac{3}{2}} \log n_k}{log^2 \beta(n_k)}.$$

ავღნიშნოთ

$$\nu_k = \frac{log^2\beta(n_k)}{\log n_k}$$

და

$$\xi_k(x,y) = \frac{1}{r_k}\sum_{i=1}^{r_k} \varepsilon_i \frac{\mathbb{I}_{\left[0,\gamma_{n_k}\right]^2}}{\gamma_{n_k}^2}, E_i x, E_i' y.$$

დაგვრჩა მხოლოდ დასამტკიცებელი, რომ $\xi_k \in S(0,1)$. მართლაც

$$\|\xi_k\|_{L_1(T^2)} \leq \frac{1}{r_k}\sum_{i=1}^{r_k} \frac{\left\|\mathbb{I}_{\left[0,\gamma_{n_k}\right]^2}\right\|_{L_1(T^2)}}{\gamma_{n_k}^2} \leq 1,$$

რაც ასრულებს თეორემის მტკიცებას.

დასკვნა

აღნიშნულ ნაშრომში განხილულია განზოგადოებული ლოგარითმული საშუალოები რომლებიც შემოღებული იქნა ტყებუჩავას მიერ. განხილულია ამ საშუალოების კრებადობის საკითხები ერთგანზომილებიან და ორგანზომილებიან შემთხვევაში. ერთი ცვლადის ფუნქციებისათვის შესწავლილია ტყებუჩავას საშუალოების თითქმის ყველგან კრებადობის საკითხი და უფრო მეტიც დახასიათებულია ის წერტილები სადაც ამ კრებადობას აქვს ადგილი და ეს წერტილები არის ლებეგის წერტილები. ორგანზომილებიანი შემთხვევისათვის შესწავლილია ზომით კრებადობის საკითხი და დადგენილია, რომ ტყებუჩავას პირობა არის აუცილებელი და საკმარისი გარკვეული საშუალოების ზომით შეჯამებადობისათვის.

<u>დამხმარე ლიტერატურა</u>

1. Garsia A. Topic in almost everywhere convergence. *Chicago*, 1970.

2. Gat G. Investigation of certain operators with respect to the Vilenkin system. *Acta Math. Hungar.*, 61, 1-2 (1993), 131-149.

3. Gat G., Goginava U. uniform and *L*-convergence of logarithmic means of Walsh-Fourier series. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 22, 2 (2006), 497-506.

4. G. G_at and U. Goginava. On the divergence of N�orlund logarithmic means of Walsh-Fourier series. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 25(6):903-916, 2009.

5. Gat G., Goginava U., Tkebuchava G. Convergence in measure of Logarithmic means of double Walsh-Fourier series. *Georgian Math. J.*, 12, 4 (2005), 607-618.

6. Gat G., Goginava U., Tkebuchava G. Convergence in measure of logarithmic means of quadratical partial sums of double Walsh-Fourier series. *J. Math. Anal. Appl.*, 323, 1 (2006), 535-549.

7. Goginava U., Tkebuchava G. Convergence of the logarithmic means of Fourier series. *J. Math. Anal. Approx. Theory*, 1, 1 (2006), 30-41.

8. Goginava U., Gogoladze L. Convergence in measure of logarithmic means of multiple Fourier series. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, 49, 2 (2014), 70-77.

9. Goginava U., Gogoladze L. Convergence in measure of strong logarithmic means of double Fourier series. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, 49, 3 (2014), 109-116.

10. Getsadze R. On the divergence in measure of multiple Fourier seties. (Russian) *Some problems of functions theory*, 4 (1988), 84-117.

11. Krasnosel'skii M.A., Rutickii Ya.B. Convex functions and Orlicz space. *(English translation), P. Noorhoff (Groningen)*, 1961.

12. Konyagin S.V. Divergence with respect to measure of multiple Fourier series. (Russian) Mat. *Zametki*, 44, 2 (1988), 196-201, 286; *translation in Math. Notes*, 44, 1-2 (1988), 589-592 (1989).

13. Simon P. Strong convergence of certain means with respect to the Walsh-Fourier series. *Acta Math. Hungar.*, 49 (1987), 425-431.

14. Szasz O. On the logarithmic means of rearranged partial sums of Fourier series. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 48 (1942), 705–711.

15. Tkebuchava G. Logarithmic summability of Fourier series. *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyhzi. (N.S.)*, 21, 2 (2005), 161-167.

16. Yabuta K. Quasi-Tauberian theorems, applied to the summability of Fourier series by Riesz's logarithmic means. *Tˆ ohˆ oku Math. Journ.*, 22 (1970), 117-129.

17. Zhizhiashvili L.V. Some problems of multidimensional harmonic analysis. (Russian) *Tbilisi, TGU,* 1996.

18. Zygmund A. Trigonometric Series. vol. 1. *Cambridge Univ. Press, Cambridge*, 1959