ფურიეს მწკრივების ლოგარითმული მეთოდით შეჯამებადობა

ლაშა ბარამიძე

ივანე ჯავახიშვილის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

lashabara@gmail.com

თბილისი, 5 ივნისი, 2017 წელი

განმარტებები და აღნიშვნები

ვთქვათ $\mathbb{T} := [-\pi, \pi]$ აღნიშნავს ინტერვალს ერთ განზომილებიან $\mathbb{R}$ ევკლიდეს სივრცეში.
$L_p(\mathbb{T})$ ავღნიშნავს ყველა ზომად f ფუნქციათა სიმრავლეს, რომლებიც 2π-პერიოდულია თითოეული ცვლადის მიმართ და სრულდება შემდეგი პირობა

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{T}} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \; 1 \leq p \leq \infty.$$

$\mathrm{weak} - L_1\left(\mathbb{T}^2\right)$ სივრცე შეიცავს ყველა ზომად f ფუნქციებს, რომლებიც 2π-პერიოდულია თითოეული ცვლადის მიმართ და სრულდება პირობა

$$\|f\|_{\mathrm{weak}-L_1(\mathbb{T}^2)} := \sup_{\lambda} \lambda \operatorname{mes}\left\{(x, y) \in \mathbb{T}^2 : |f(x, y)| > \lambda\right\} < \infty.$$

განმარტებები და აღნიშვნები

ვთქვათ $f \in L_1\left(\mathbb{T}^2\right)$. f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი ტრიგონომეტრიული სისტემის მიმართ განიმარტება შემდეგნაირად

$$S[f] := \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n,m)\, e^{i(nx+my)},$$

სადაც

$$\widehat{f}(n,m) := \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} f(x,y) e^{-i(nx+my)} dxdy$$

არის f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტი. მართკუთხოვანი კერძო ჯამი განიმარტება შემდეგნაირად:

$$S_{NM}(f;x,y) := \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-M}^{M} \widehat{f}(n,m)\, e^{i(nx+my)}.$$

ინტეგრებადი f ფუნქციის n-ური რისის ლოგარითმული საშუალოები განიმარტება შემდეგნაირად:

$$\frac{1}{l_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{S_k(f)}{k+1},\quad l_n:=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1},$$

სადაც $S_k(f)$ არის ამ ფუნქციის ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამი.

განმარტებები და აღნიშვნები

ვთქვათ $\{q_k : k \geq 0\}$ არის არაუარყოფით რიცხვთა მიმდევრობა. f ფუნქციის ნორლუნდის საშუალოები განიმარტება შემდეგნაირად:

$$\frac{1}{l_n}\sum_{k=0}^{n} q_k S_{n-k}(f)$$

სადაც

$$l_k := \sum_{k=0}^{n} q_k$$

თუ $q_k = \frac{1}{k+1}$, მაშინ ჩვენ მივიღებთ ნორლუნდის ლოგარითმულ საშუალოებს

$$L_n(f;x) := \frac{1}{l_n}\sum_{k=0}^{n} \frac{S_{n-k}(f)}{k+1}.$$

ერთ-ერთ თავის ბოლო ნაშრომში ტყებუჩავამ განიხილა ლოგრითმული შეჯამებადობის მეთოდი, რომელიც მოიცავს ზემოთ განხილულ ორივე ლოგარითმულ შეჯამებადობის მეთოდს ზღვრულ შემთხვევებში. კერძოდ, ნებისმიერი n, $\beta(n)$-თვის სადაც $0 \leq \beta(n) \leq n$, ტყებუჩავას საშუალოებს აქვს შემდეგი სახე

$$T_{n,\beta(n)}(f;x) := \frac{1}{l(n,\beta(n))}\left(\sum_{k=0}^{\beta(n)-1}\frac{S_k(f;x)}{\beta(n)-k+1}+\sum_{k=\beta(n)}^{n}\frac{S_k(f;x)}{k-\beta(n)+1}\right),$$

სადაც

$$l(n,\beta(n)) := \sum_{k=0}^{\beta(n)-1}\frac{1}{\beta(n)-k+1}+\sum_{k=\beta(n)}^{n}\frac{1}{k-\beta(n)+1}.$$

თუ დავაკვირდებით პირველ ნაწილს ტყებუჩავას საშუალოებში აქვს ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოს მსგავსი სახე ხოლო მეორე ნაწილს რისის მსგავსი.
($\beta(n) = 0$) შემთხვევაში მიიღება რისის ლოგარითმული, საშუალოები ხოლო ($\beta(n) = n$) შემთხვევაში ნორლუნდის.

$$F_{n,\beta(n)} := \frac{1}{l\left(n, \beta(n)\right)} \left(\sum_{k=0}^{\beta(n)-1} \frac{D_k}{\beta(n) - k + 1} + \sum_{k=\beta(n)}^{n} \frac{D_k}{k - \beta(n) + 1} \right).$$

განმარტებები და აღნიშვნები

ორმაგი ფურიეს მწკრივის რისის ლოგარითმული საშუალოები განიმარტება შემდეგნაირად:

$$\left(R_n \circ R_m\right)(f;x,y) := \frac{1}{l_n l_m} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \frac{S_{i,j}(f;x,y)}{(i+1)(j+1)},$$

ცნობილია, რომ $\forall f \in L_1\left(\mathbb{T}^2\right)$

$$\left\| T_{n,\beta(n)} f - f \right\|_{L_1(\mathbb{T}^2)} \to 0 \ \text{ as } n \to \infty.$$

ჩებიშევის უტოლობიდან მივიღებთ

Theorem

ვთქვათ $f \in L_1\left(\mathbb{T}^2\right)$. მაშინ

$$\left(R_n \circ R_m\right)(f;x,y) \to f \text{ ზომით } \mathbb{T}^2\text{-ზე, როცა } n,m \to \infty.$$

2006 წელს გატმა, გოგინავამ და გოგოლაძემ გსნიხილეს შემდეგი საშუალოები:

$$(L_n \circ L_m)(f;x,y) := \frac{1}{l_n l_m} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \frac{S_{n-i,m-j}(f;x,y)}{(i+1)(j+1)},$$

მათ დაამტკიცეს, რომ თუ $f \in L_1(\mathbb{T}^2)$ და

$$(L_n \circ L_m)(f;x,y) \to f \text{ ზომით } \mathbb{T}^2\text{ზე}, \text{ როცა } n,m \to \infty,$$

მაშინ f არის ბერის პირველი კატეგორიის სიმრავლიდან.
ანუ, $\exists f \in L_1(\mathbb{T}^2)$ ისეთი რომ

$$(L_n \circ L_m)(f;x,y) \to f, \text{ როცა } n,m \to \infty,$$

არ სრულდება ზომით.

2014 წელს გოგინავამ და გოგოლაძემ განიხილეს შემდეგი საშუალოები:

$$\left(L_n \circ R_m\right)(f; x, y) := \frac{1}{l_n l_m} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \frac{S_{n-i,j}(f; x, y)}{(i+1)(j+1)}.$$

Theorem (გოგინავა, გოგოლაძე)

ვთქვათ $f \in L_1\left(\mathbb{T}^2\right)$. მაშინ

$$\left(R_n \circ L_m\right)(f; x, y) \to f \text{ ზომით} \mathbb{T}^2\text{-ზე}, \quad \text{როცა} \quad n, m \to \infty.$$

ჩვენ განვიხილეთ

$$\left(T_{n,\beta(n)} \circ L_m\right)(f;x,y)$$

საშუალოები.
შეგახსენებთ, რომ $\beta(n) = 0$ მაშინ მიიღება

$$\left(L_n \circ R_m\right)(f;x,y) = \frac{1}{l_n l_m} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \frac{S_{n-i,j}(f;x,y)}{(i+1)(j+1)}.$$

$\beta(n) =$ n-თვის მიიღება

$$\left(L_n \circ L_m\right)(f;x,y) = \frac{1}{l_n l_m} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \frac{S_{n-i,m-j}(f;x,y)}{(i+1)(j+1)},$$

როგორც ვიცით $\beta(n) = 0$-თვის გვაქვს ზომით კრებადობა.
$\beta(n) =$ n-თვის გვაქვს ზომით კრებადობა, მხოლოდ ბერის პირველი კატეგორიის სიმრავლისთვის.

ახალი შედეგი

ჩვენი მიზანი იყო დაგვედგინა ის პირობა, რომრლიც უზრუნველყოფს ჩვენს მიერ განხილული საშუალოების ზომით კრებადობას და დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემის სამართლიანობა:

Theorem

ა) ვთქვათ $f \in L_1\left(\mathbb{T}^2\right)$ და $\log\beta(n) = O\left(\sqrt{\log n}\right)$. მაშინ

$$\left(T_{n,\beta(n)} \circ L_m\right)(f;x,y) \to f \text{ ზომით } \mathbb{T}^2\text{ზე}, \quad \text{როცა} \quad n,m \to \infty.$$

ბ) ვთქვათ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log\beta(n)}{\sqrt{\log n}} = \infty,$$

მაშინ სიმრავლე ფუნქციებისა $L_1\left(\mathbb{T}^2\right)$-დან, რომლისთვისაც ლოგარითმული $\left(T_{n,\beta(n)} \circ L_m\right)(f)$ საშუალოები კრებადია ზომით $\mathbb{T}^2$-ზე არის ბერის პირველი კატეგორიის. $L_1\left(\mathbb{T}^2\right)$.

ცნობილი თეორემები

ტყებუჩავამ დაამტკიცა, რომ

$$\log \beta(n) = O\left(\sqrt{\log n}\right),$$

მაშინ გვაქვს
ა) $\left\|T_{n,\beta(n)}f - f\right\|_{C(\mathbb{T})} \to 0$ როცა $n \to \infty$ $\forall f \in C(\mathbb{T})$;
ბ) $\left\|T_{n,\beta(n)}f - f\right\|_{L_1(\mathbb{T})} \to 0$ როცა $n \to \infty$ $\forall f \in L_1(\mathbb{T})$.
ჩვენი მიზანი იყო იმავე პირობებში თითქმის ყველგან კრებადობის შესწავლა.

Definition

ვთქვათ $f \in L_1(\mathbb{T})$, მაშინ ვიტყვით,რომ x არის f ფუნქციის ლებეგის წერტილი, თუ

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} |f(x+t) - f(x)|\, dt = 0.$$

ცნობილია, რომ თითქმის ყველა წერტილი არის ლებეგის წერტილი.

ახალი შედეგი

ჩვენ დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემის სამართლიანობა:

Theorem

ვთქვათ $f \in L_1(\mathbb{T})$ და $\log\beta(n) = O\left(\sqrt{\log n}\right)$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} T_{n,\beta(n)}(f,x) = f(x)$$

თუ x არის f ფუნქციის ლებეგის წერტილი.

Corollary

ვთქვათ $f \in L_1(\mathbb{T})$ და $\log\beta(n) = O\left(\sqrt{\log n}\right)$, მაშინ თითქმის ყველგან $\mathbb{T}$-ზე

$$\lim_{n\to\infty} T_{n,\beta(n)}(f,x) = f(x).$$

გმადლობთ ყურადღებისათვის!